constructing polynomial solutions to the Dirichlet problem for a second-order equation. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 20–29. DOI: 10.3103/S1066369X12060035.
9. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill, 1953.
10. Karachik V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, vol. 126, no 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9.

УДК 517.984

БАЗИСЫ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ИНВОЛЮЦИЮ

В. П. Курдюмов[1], А. П. Хромов[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KurdyumovVP@yandex.ru
[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

При предположении существования обратного к интегральному оператору, ядро которого терпит разрывы на диагоналях единичного квадрата, доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2[0,1]$.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, краевое условие.

В данной работе исследуется вопрос о базисности Рисса в $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) интегрального оператора:

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 A_2(1-x,t)f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $\alpha^2 \neq 1$, $A_i(x,t)(i=1,2)$ имеют непрерывные производные:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t) \qquad (0 \le k+l \le 2, \quad l \le 1)$$

при $x \ge t$ для $A_1(x,t)$, при $x \le t$ для $A_2(x,t)$, и $A_1(x,x-0) = A_2(x,x+0) = 1$. Таким образом, ядро оператора A терпит разрыв на диагоналях $t = x$ и $t = 1-x$.

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы с ядрами, допускающими разрывы самих ядер или некоторых их производных впервые рассматривались одним из авторов [1]. В дальнейшем таким операторам было уделено много внимания (см., напр., [2–4]).

В [5] для решения вопроса о базисности Рисса с. п. ф. оператора (1) было проведено сведение этого оператора к оператору $\tilde{A}$ в пространстве вектор-функций размерности 2 и установлена базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) при дополнительном предположении существования оператора $\tilde{A}^{-1}$. В настоящей работе базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) устанавливается лишь при предположении существования обратного к оператору (1),что упрощает доказательство основного результата.

1. СВЕДЕНИЕ К ОПЕРАТОРАМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Сведем оператор A к оператору в пространстве вектор-функции размерности 2. Введем следующий оператор:

$$\tilde{A}\tilde{f} = (\tilde{A}\tilde{f})(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x) = \int\limits_0^1 \tilde{A}(x,t)\tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования),

$$\tilde{A}(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon(x,t)A_1(x,t) & \varepsilon(x,t)A_2(1-x,1-t) \\ \varepsilon(t,x)A_2(x,t) & \alpha\varepsilon(t,x)A_1(1-x,1-t) \end{pmatrix},$$

$\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$.

Так же, как и в [5], имеет место

Теорема 1. *Если* $y = Af$, *то* $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$, *где* $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$. *Обратно: если* $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$ *и* $f_1(x) = f_2(1-x)$, *то* $y_1(x) = y_2(1-x)$ *и* $y_1 = Af_1$.

Замечание. Ядро $\tilde{A}(x,t)$ терпит разрыв лишь на линии $t = x$.

Пусть $P = \left\{\tilde{f}(x) : \tilde{f}(x) = (f(x), f(1-x))^T, f \in L_2[0,1]\right\}$. Ясно, что P является подпространством пространства $L_2^2[0,1]$. Обозначим через $\tilde{A}_0$ сужение оператора $\tilde{A}$ на P.

Теорема 2. *Пусть существует* A^{-1}, *тогда существует и* $\tilde{A}_0^{-1}$, *причем если*

$$\tilde{y}(x) = \tilde{A}_0\tilde{f}(x), \tag{2}$$

то

$$\tilde{A_0}^{-1}\tilde{y}(x) = ((A^{-1}y)(x), (A^{-1}y)(1-x))^T,$$

где $y(x)$ *есть первая компонента вектора* $\tilde{y}(x)$.

Доказательство. Пусть имеет место (2). Тогда по теореме 1 $y(x) = Af(x)$. Отсюда $\tilde{f}(x) = ((A^{-1}y)(x), (A^{-1}y)(1-x))^T$. Теорема доказана.

Займемся построением оператора $\tilde{A_0}^{-1}$. Продифференцируем $\tilde{y}(x) = \tilde{A}_0\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = \int_0^1 \tilde{A}_x(x,t)\tilde{f}(t)\,dt + B^{-1}\tilde{f}(x),$$

где $B^{-1} = \tilde{A}(x, x-0) - \tilde{A}(x, x+0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$. Отсюда

$$B\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{A}_1\tilde{f}, \tag{3}$$

где $\tilde{A}_1\tilde{f} = \int_0^1 B\tilde{A}_x(x,t)\tilde{f}(t)\,dt$. Покажем, что $\tilde{A}_1\tilde{f} \in P$. Так как по теореме 1 $\tilde{y}(x) = (y(x), y(1-x))^T$, то

$$B\tilde{y}'(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'(x) \\ -y'(1-x) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(-\alpha y'(x) + y'(1-x), y(x) - \alpha y'(1-x)\right)^T \in P,$$

и поэтому из (3) следует, что $\tilde{A}_1\tilde{f} \in P$. Следовательно, оператор A_1 отображает Р в себя.

Пусть $\{\sqrt{2}\varphi_k(x)\}$ — ортонормированный базис в $L_2[0,1]$, состоящий из достаточно гладких функций. Тогда для $f \in L_2[0,1]$:

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1\varphi_k(x), \qquad f(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1\varphi_k(1-x),$$

где $(\cdot,\cdot)_1$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Отсюда, так как для $\tilde{f}, \tilde{g} \in P$ выполняется $(\tilde{f}, \tilde{g}) = 2(f,g)_1$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$, то для $\tilde{f} \in P$ получим:

$$\tilde{f}(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1(\varphi_k(x), \varphi_k(1-x))^T = \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{f}, \tilde{\varphi_k})\tilde{\varphi_k}(x).$$

Ясно, что $\{\tilde{\varphi_k}(x)\}$ есть ортонормированный базис в P. Так же как и в [6, с. 267–268], представим оператор $\tilde{A}_1$ на подпространстве Р в виде $\tilde{A}_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2^2[0,1]$), а V — конечномерный:

$$V\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(\tilde{f}, \tilde{\psi_k})\tilde{\varphi_k}(x).$$

Из (3) получаем:

$$(E + W)\tilde{f}(x) = B\tilde{y'}(x) - V\tilde{f}(x). \tag{4}$$

Отсюда следует, что оператор $E+W$, а следовательно, и оператор W отображают P в P. А так как $\|W\|<1$, то оператор $(E+W)^{-1}$ существует и он также есть отображение P в себя. Из (4) получаем:

$$(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)=\tilde{f}(x)+(E+W)^{-1}V\tilde{f}(x). \tag{5}$$

Так же как и в [5, лемма 1], имеет место

Лемма 1. *Оператор $\tilde{A_0}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} M=m$, *где*

$$M=\begin{pmatrix} E+(\theta,\psi)^T \\ \int\limits_0^1 \tilde{A}(0,T)\theta^T(t)dt \end{pmatrix}.$$

Здесь E — единичная матрица $m\times m$, $(\theta,\psi)=(\tilde{\theta}_j,\tilde{\psi}_k)_{j,k=1}^m$,

$$\tilde{\theta}_j=(E+W)^{-1}\tilde{\varphi}_j, \theta^T=(\tilde{\theta_1},\ldots,\tilde{\theta_m}), \psi=(\tilde{\psi_1},\ldots,\tilde{\psi_m}).$$

Обозначим через Δ минор матрицы M, образованный из первых m строк, через $\Delta_{i,j}$ — его алгебраические дополнения, и пусть $W_1(x,t)$ — ядро оператора W_1, определенного соотношением

$$(E+W)^{-1}=E+W_1. \tag{6}$$

Теорема 3. *Область определения оператора $\tilde{A}_0^{-1}$ принадлежит подпространству P и справедливо представление*

$$\tilde{A}_0^{-1}\tilde{y}(x)=l(\tilde{y})(x)=B\tilde{y}'(x)+a_1(x)\tilde{y}(0)+a_2(x)\tilde{y}(x)+\int\limits_0^1 a(x,t)\tilde{y}(t)dt, \tag{7}$$

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0)+\tilde{M}_1\tilde{y}(1)=0, \tag{8}$$

где

$$a_1(x)=B_1(x)-\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m\tilde{\theta}_k(x)(b_j-\int\limits_0^1 S_j(t)B_1(t)dt)\Delta_{jk}, \qquad B_1(x)=W_1(x,1)BE_1-W_1(x,0)B,$$

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad \tilde{\theta}_k(x)=(E+W_1)\tilde{\varphi}_k(x), \qquad b_j=S_j(1)BE_1-S_j(0)B, \qquad S_j(x)=\bar{\tilde{\psi}}_j^T(x),$$

$$a_2(x)=(W_1(x,x-0)-W_1(x,x+0))B,$$

$$a(x,t)=B(x,t)+\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m\tilde{\theta}_k(x)(S_j'(t)B-S_j(t)a_2(t)-\int\limits_0^1 S_j(\tau)B(\tau,t)d\tau)\Delta_{jk}, \quad B(x,t)=-W_{1_t}(x,t)B,$$

$$S_j'(x)=p_j(x)BA_1(x)+\int\limits_0^1 p_j(t)B\tilde{A}_{xt}(t,x)dt, \tag{9}$$

$$p_j(x)=\bar{\tilde{\varphi}}_k^T(x), \qquad A_1(x)=\tilde{A}_\zeta(\zeta,x)\Big|_{\zeta=x-0}-\tilde{A}_\zeta(\zeta,x)\Big|_{\zeta=x+0}, \qquad \tilde{M}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \qquad \tilde{M}_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Принадлежность области определения оператора $\tilde{A}_0^{-1}$ подпространству P следует из теоремы 1. Докажем формулы (7), (8). Для определенности считаем. что $\Delta\neq 0$. Из (5) получаем систему

$$\Big((E+W)^{-1}B\tilde{y}',\tilde{\psi}_j\Big)=(\tilde{f},\tilde{\psi}_j)+\Big((E+W)^{-1}V\tilde{f},\tilde{\psi}_j\Big)=$$
$$=(\tilde{f},\tilde{\psi}_j)+\sum_{k=1}^m(\tilde{f},\tilde{\psi}_k)(\tilde{\theta}_k,\tilde{\psi}_j) \qquad (j=1,\ldots,m). \tag{10}$$

Определитель системы (10) есть Δ. Найдем явно $(\tilde{f},\tilde{\psi}_k)$ из (10) и подставим в (5):

$$\tilde{f}(x)=(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)-\sum_{k=1}^{m}(\tilde{f},\tilde{\psi}_k)\tilde{\theta}_k(x)=$$

$$=(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)-\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\Big((E+W)^{-1}B\tilde{y}',\tilde{\psi}_j\Big)\Delta_{jk}\tilde{\theta}_k(x). \qquad (11)$$

Подставим (6) в (11) и рассмотрим каждое из полученных слагаемых. Имеем:

$$(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)=B\tilde{y}'(x)+W_1B\tilde{y}'(x). \qquad (12)$$

Из (6) следует справедливость соотношений

$$W_1(x,t)=-W(x,t)-\int_0^1 W(x,\tau)W_1(\tau,t)\,d\tau=-W(x,t)-\int_0^1 W_1(x,\tau)W(\tau,t)d\tau, \qquad (13)$$

где $W(x,t)$ — ядро оператора W. Из (13), так же как и в [7, с. 385–386], получаем, что $W_1(x,t)$ обладает теми же дифференциальными свойствами, что и $W(x,t)$, а в силу равенства $W=\tilde{A}_1-V$ теми же свойствами, что и $\tilde{A}_x(x,t)$. В частности, $W_1(x,t)$ терпит разрыв на диагонали $t=x$. Проводя в (12) интегрирование по частям и учитывая формулу

$$\tilde{y}(1)=E_1\tilde{y}(0), \qquad (14)$$

найдем

$$(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)=B\tilde{y}'(x)+B_1(x)\tilde{y}(0)+a_2(x)\tilde{y}(x)+\int_0^1 B(x,t)\tilde{y}(t)dt. \qquad (15)$$

Из (15) сразу получаем:

$$\Big((E+W)^{-1}B\tilde{y}',\tilde{\psi}_j\Big)=\Big(B\tilde{y}'(x)+B_1(x)\tilde{y}(0)+a_2(x)\tilde{y}(x)+\int_0^1 B(x,t)\tilde{y}(t)dt,\tilde{\psi}_j(x)\Big). \qquad (16)$$

Так как для $f,g\in L_2^2[0,1]$ справедливы формулы

$$(f,g)=\int_0^1 (f(x),g(x))_2dx=\int_0^1 \bar{g}^T(x)f(x)dx, \qquad (17)$$

где $(\cdot,\cdot)_2$ — скалярное произведение в двумерном комплексном пространстве, то для первого слагаемого из (16) находим:

$$\Big(B\tilde{y}'(x),\tilde{\psi}_j(x)\Big)=\int_0^1\Big(B\tilde{y}'(x),\tilde{\psi}_j(x)\Big)_2\,dx=\int_0^1\Big(\tilde{y}'(x),\bar{B}^T\tilde{\psi}_j(x)\Big)_2\,dx=\int_0^1\bar{\tilde{\psi}}{}_j^T(x)B\tilde{y}'(x)\,dx.$$

Проводя здесь интегрирование по частям, учитывая формулу (14), получим:

$$\Big(B\tilde{y}'(x),\tilde{\psi}_j(x)\Big)=b_j\tilde{y}(0)-\int_0^1 S_j'(t)B\tilde{y}(t)\,dt, \qquad (18)$$

где для $S_j'(t)$ имеет место формула (9), которая получается из равенства $\tilde{\psi}_k=\tilde{A}_1^*\tilde{\varphi}_k$, записанного в виде $\tilde{\psi}_k(x)=\int_0^1\bar{\tilde{A}}{}_t^T(t,x)\bar{B}^T\tilde{\varphi}_k(t)dt$. Для второго слагаемого из (16), опять используя (17), находим:

$$\Big(B_1(x)\tilde{y}(0),\tilde{\psi}_j(x)\Big)=\int_0^1\Big(B_1(t)\tilde{y}(0),\tilde{\psi}_j(t)\Big)_2\,dt=\int_0^1\Big(\tilde{y}(0),\bar{B}_1^T\tilde{\psi}_j(t)\Big)_2\,dt=\int_0^1 S_j(t)B_1(t)\,dt\tilde{y}(0). \qquad (19)$$

Аналогично рассматриваются третье и последнее слагаемые из (16):

$$\left(a_2(x)\tilde{y}(x),\tilde{\psi}_j(x)\right)=\int\limits_0^1 S_j(t)a_2(t)\tilde{y}(t)dt, \tag{20}$$

$$\Bigl(\int\limits_0^1 B(x,t)\tilde{y}(x)dt,\tilde{\psi}_j(x)\Bigr)=\int\limits_0^1\Bigl(\int\limits_0^1 S_j(x)B(x,t)dx\Bigr)\tilde{y}(t)\,dt. \tag{21}$$

Теперь из (11), (15), (16), (18)–(21) получаем (7).

Докажем справедливость краевых условий (8). Так как $\tilde{y}(x)=\tilde{A}_0\tilde{f}(x)$, то $\tilde{y}(x)=(y_1(x),y_2(x))^T$ удовлетворяют условию $\tilde{y}(0)=\int\limits_0^1\tilde{A}(0,t)l(\tilde{y})(t)dt$, первая компонента которого в силу соотношения $y_1(x)=y_2(1-x)$ определяет два равносильных условия $y_1(0)=0$ и $y_2(1)=0$. Они определяют краевые условия одномерных операторов $\left(A^{-1}y_1\right)(x)$ и $\left(A^{-1}y_2\right)(1-x)$ из теоремы 2, и в векторной форме имеют вид (8). Теорема доказана.

Замечание. В (7) матричные функции $a_1(x),a_2'(x)$ непрерывны, $a(x,t)$ непрерывна при $x\le t$ и при $x\ge t$.

В дальнейшем считаем, что область определения оператора (7), (8) может не принадлежать подпространству P. Такой оператор рассматриваем как результат сведения оператора A^{-1} (который согласно теоремам 2 и 3 является интегродифференциальным, содержащим инволюцию) к оператору, не содержащему инволюцию в пространстве вектор-функций размерности 2.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (7), (8)

Рассмотрим краевую задачу:

$$B\tilde{y}'(x)+a_1(x)\tilde{y}(0)+a_2(x)\tilde{y}(x)+\int\limits_0^1 a(x,t)\tilde{y}(t)dt-\lambda\tilde{y}(x)=\tilde{f}(x),$$

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0)+\tilde{M}_1\tilde{y}(1)=0,$$

где $a_i(x)$ $(i=1,2)$, $a(x,t)$ — те же, что и в теореме 3, $\tilde{y}(x)=(y_1(x),y_2(x))^T$, $\tilde{f}(x)\in P$. Выполним в ней замену переменных $\tilde{y}(x)=\Gamma y(x)$, где

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{\alpha^2-1}-\alpha & \sqrt{\alpha^2-1}+\alpha\end{pmatrix}.$$

Тогда получим:

$$y'(x)+P_1(x)y(0)+P_2(x)y(x)+Ny(x)-\lambda Dy(x)=m(x), \tag{22}$$

$$M_0y(0)+M_1y(0)=0, \tag{23}$$

где $P_i(x)=D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma(i=1,2)$, $Ny(x)=\int\limits_0^1 N(x,t)y(t)\,dt$, $N(x,t)=D\Gamma^{-1}a(x,t)\Gamma$, $m(x)=D\Gamma^{-1}\tilde{f}(x)$, $M_0=\tilde{M}_0\Gamma$, $M_1=\tilde{M}_1\Gamma$, $D=\Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma=\operatorname{diag}(\omega,-\omega)$, $\omega=\sqrt{\alpha^2-1}$.

Положим $H_0(x)=\operatorname{diag}(h_1(x),h_2(x))$, где $h_i(x)=e^{-\int\limits_0^x p_{ii}(t)dt}$, $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_2(x)$. Пусть, далее, $H_1(x)=\begin{pmatrix}0 & r_2(x)\\ r_1(x) & 0\end{pmatrix}$ — кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения:

$$H_0'(x)+P_2(x)H_0(x)+(H_1(x)D-DH_1(x))=0.$$

Так же как и лемма 16 из [3], получается

Лемма 2. *Замена* $y(x) = H(x,\lambda)v(x)$, *где* $H(x,\lambda) = H_0(\lambda) + \dfrac{1}{\lambda}H_1(x)$, *приводит систему* (22), (23) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(x) + \int\limits_0^1 N_\lambda(x,t)v(t)dt - \lambda D v(x) = m(x,\lambda), \tag{24}$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \tag{25}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left[H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right]$, $N_\lambda(x,t) = H^{-1}(x,\lambda)N(x,t)H(t,\lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1,\lambda)$, $m(x\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$.

Рассмотрим простейший случай системы (24), (25):

$$\omega'(x) - \lambda D\omega(x) = m(x) \tag{26}$$

$$U(\omega) = 0. \tag{27}$$

Здесь сейчас $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L_2[0,1]$. Обозначим через $S_1(S_2)$ полуплоскость в комплексной области, определяемую неравенством $\operatorname{Re}\lambda\omega \le 0$ ($\operatorname{Re}\lambda\omega \ge 0$). Для определенности будем рассматривать полуплоскость S_1.

Обозначим $g_1(x,t,\lambda) = \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega(x-t)}$, $g_2(x,t,\lambda = -\varepsilon(t,x)e^{-\lambda\omega(x-t)})$, $g(x,t,\lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\lambda), g_2(x,t,\lambda))$. Имеют место следующие утверждения (см. [5, леммы 3, 4]).

Лемма 3. *Для решения* $\omega(x) = \omega(x,\lambda)$ *системы* (26), (27) *имеет место формула:*

$$\omega(x,\lambda) = g_\lambda m(x) - V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\Phi(m,\lambda),$$

где $g_\lambda m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)m(t)dt$, $V(x,\lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda\omega x}, e^{\lambda\omega(1-x)})$, $\Delta(\lambda) = U(V(x,\lambda))$, $\Phi(m,\lambda) = \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt$ (U_x *означает, что* U *применяется к* $g(x,t,\lambda)$ *по переменной* x). *Считается, что* λ *таково, что* $det\Delta(\lambda) \ne 0$.

Лемма 4. *Имеет место асимптотическая формула:*

$$\det\Delta(\lambda) = [\theta_0] + [\theta_1]e^{2\lambda\omega},$$

где $\theta_0 = (\omega+\alpha)h_2(1)$, $\theta_1 = (\omega-\alpha)h_1(1)$, $[a] = a + O(1/\lambda)$.

Из леммы 4 следует, что $\theta_0\theta_1 \ne 0$. Обозначим через $S_{1\delta}$ область, полученную из S_1 удалением всех точек $\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right) + k\pi i\right)$ ($k = 0, \pm1, \ldots$), являющихся нулями функции $\theta_0 + \theta_1 e^{2\lambda\omega}$, вместе с окрестностями, ограниченными окружностями Γ_k одного и того же достаточно малого радиуса δ. Из леммы 4 следует, что в области $S_{1\delta}$ при достаточно больших $|\lambda|$ справедлива оценка

$$|\det\Delta(\lambda)| \ge C > 0, \tag{28}$$

где C не зависит от λ.

Из леммы 3 и оценки (28) получаем следующее утверждение о структуре решения краевой задачи (26), (27).

Теорема 4. *Если* $\lambda \in S_{1\delta}$ *и* $|\lambda|$ *достаточно велико, то существует единственное решение* $\omega(x,\lambda) = R_{1\lambda}m$ *краевой задачи* (26), (27), *для компонент которого имеют место представления:*

$$(R_{1\lambda}m)_1 = \int\limits_0^x e^{\lambda\omega(x-t)}m_1(t)\,dt + \Phi_1(m,\lambda)\sigma(x,\lambda),$$

$$(R_{1\lambda}m)_2 = -\int\limits_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)}m_2(t)\,dt + \Phi_2(m,\lambda)\sigma(x,\lambda),$$

где $\Phi_j(m,\lambda)$ — *линейные комбинации с ограниченными по* λ *коэффициентами интегралов* $\int\limits_0^1 \sigma(t,\lambda)m_j(t)dt$ (*здесь под* $\sigma(t,\lambda)$ *понимается любая из функций* $e^{\lambda\omega t}, e^{\lambda\omega(1-t)}$) *и* $m_j(t)$ $(j = 1,2)$ — *компоненты вектора* $m(t)$.

Изучим теперь краевую задачу (24), (25). Обозначим через $q(x)$ любой из векторов:

$$H_0^{-1}(x)m(x), -H_0^{-1}(x)H_1(x)H^{-1}(x)m(x).$$

Через $P(x)$ обозначим любую из матриц:

$$H_2(x) = H_0^{-1}(x)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right), H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0),$$
$$H_0^{-1}(x)P_1(x)H_1(0) - H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0).$$

Далее, через M_λ обозначим любой из операторов:

$$N_1L_\lambda^{-1}, \qquad H_2(x)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}, \qquad N_2L_\lambda^{-1}R_{1\lambda},$$

где $N_1 = H_0^{-1}(x)NH_0(x)$, $L_\lambda = E + R_{1\lambda}P_2(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$, N_λ — интегральный оператор с ядром $N_\lambda(x,t)$, $N_2 = H_0^{-1}(x)\left(NH_1(x) - H_1(x)H_0^{-1}NH_0(x)\right)$.

Наконец, через $b_1(\lambda)$ обозначим любой из векторов (не зависящих от x): $\alpha(\lambda)R_{1\lambda}q(x)|_{x=0}$, $\alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x)|_{x=0}$; $b_2(\lambda) = \alpha(\lambda)R_{1\lambda}\, M_\lambda q(x)|_{x=0}$, где $\alpha(\lambda)$ — некоторые квадратные матрицы с ограниченными по λ элементам из некоторого конечного набора таких матриц; $Q(\lambda)$ — вектор, с компонентами, допускающими оценку $O(\lambda^{-2}\|f\|)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Теорема 5. *Если λ — то же, что и в теореме 4, то существует единственное решение $v(x,\lambda)$ задачи (24), (25), которое представимо в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами следующих векторов:*

$$R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda q(x), \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x),$$
$$R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda P(x)b_1(\lambda),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda), \qquad Q(\lambda).$$

Доказательство. Для решения задачи (24), (25) имеем:

$$v(x,\lambda) = -R_{1\lambda}\left(P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + P_2(x,\lambda)v(x,\lambda) + N_\lambda v - m(x,\lambda)\right),$$

отсюда

$$L_\lambda v(x,\lambda) = -R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + R_{1\lambda}m(x,\lambda). \tag{29}$$

Для доказательства существования оператора L_λ^{-1} получим сначала представление для оператора $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$. Имеем:

$$H^{-1}(x,\lambda) = \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right)^{-1} = \left[H_0(x)\left(E + \frac{1}{\lambda}H_0^{-1}(x)H_1(x)\right)\right]^{-1} =$$
$$= H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left[H_0^{-1}(x)H_1(x)\left(E + \frac{1}{\lambda}H_0^{-1}(x)H_1(x)\right)^{-1}H_0^{-1}(x)\right] = H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}H_2(x,\lambda), \tag{30}$$

где $H_2(x,\lambda)$ — матрица, стоящая в квадратных скобках. Далее, так как для $H_2(x,\lambda)$ справедливо представление:

$$H_2(x,\lambda) = H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{31}$$

то из (30) и (31) получаем:

$$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda) = \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}H_2(x,\lambda)\right)NH(x,\lambda) =$$
$$= \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)N\left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right) = N_1 + \frac{1}{\lambda}N_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{32}$$

Покажем, что в $S_{1\delta}$ при $|\lambda|$ достаточно больших

$$\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_1 = o(1), \tag{33}$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_2^2[0,1]$. В самом деле, из (32) следует, что

$$\|R_{1\lambda}N_\lambda - R_{1\lambda}N_1\|_1 = \|R_{1\lambda}(N_\lambda - N_1)\|_1 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

а по лемме 6 из [7] $\|R_{1\lambda}N_1\|_1 = \|R_{1\lambda}H_0^{-1}NH_0\|_1 = o(1)$. Поэтому оценка (33) имеет место и, следовательно, существует оператор L_λ^{-1}. Из (29) находим

$$v(x,\lambda) = -L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda). \tag{34}$$

Для нахождения $v(0,\lambda)$ из (34) получаем уравнение

$$\left(E + L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)\big|_{x=0}\right)v(0,\lambda) = L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x\lambda)|_{x=0}, \tag{35}$$

в котором по лемме 6 из [7] $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)|_{x=0} = o(1)$. Поэтому из (35) следует, что

$$v(0,\lambda) = \alpha(\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)\,|_{x=0}\,. \tag{36}$$

Из определения L_λ следует что

$$L_\lambda^{-1}R_{1\lambda} = R_{1\lambda} - R_{1\lambda}P_2(x,\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda} - R_{1\lambda}N_\lambda L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}. \tag{37}$$

Найдем нужное представление для $P_2(x,\lambda)$. Используя (30), находим:

$$P_2(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,H^{-1}(x,\lambda)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\,H_2(x,\lambda)\right)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\,H_2(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{38}$$

Теперь, используя представления (32), (38) и обозначение для M_λ, найдем из (37), что оператор $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$R_{1\lambda}, \qquad \frac{1}{\lambda}\,R_{1\lambda}M_\lambda, \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}, \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{39}$$

где $O(\lambda^{-2})$ — оператор с компонентами, имеющими указанную оценку. Далее, используем (30) и (31) для

$$m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x) = \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)m(x) =$$
$$= q_1(x) + q_2(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{40}$$

где $q_1(x) = H_0^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}m(x)$. Из (40) и представления $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}$ в виде линейной комбинации операторов из (39) получим, что $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами векторов

$$\frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x) \qquad (j=0,1),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda q(x), \qquad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \tag{41}$$

Тогда вектор $v(0,\lambda) = \alpha(\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)|_{x=0}$ из (36) представим в виде линейной комбинации векторов

$$b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}b_2(\lambda), \qquad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \tag{42}$$

Наконец, используя формулу

$$P_1(x,\lambda) = P_{11}(x) + \frac{1}{\lambda}P_{12}(x) + O\left(\lambda^{-2}\right),$$

где $P_{11}(x) = H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0)$, $P_{12}(x) = H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0) - H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}P_1(x)H_0(0)$, найдем, что оператор $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$\frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}P(x), \qquad \frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x) \qquad (j=0,1), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda P(x), \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{43}$$

Теперь из (34), (41)–(43) следует утверждение теоремы.

Так же как и лемма 5 из [5], получается

Лемма 5. *Каждая компонента вектор-функции $R_{1\lambda}q(x)$ представима в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов*

$$\int_0^x e^{\lambda\omega(x-t)}Tf(t)\,dt, \qquad \int_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)}Tf(t)\,dt$$

и с ограниченным по λ коэффициентами операторов

$$\sigma(x,\lambda)\int_0^x \sigma(t,\lambda)Tf(t)\,dt,$$

где $\sigma(x,\lambda)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 4, $Tf(x)$ — один из операторов: $\Theta(x)f(x)$ или $\Theta(x)f(1-x)$, где $\Theta(x)$ — любая функция из некоторого конечного набора непрерывных функций.

3. РЕЗОЛЬВЕНТА ОПЕРАТОРА A

Теорема 6. *Если $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ существует, то*

$$R_\lambda f = y_1(x), \tag{44}$$

где $y_1(x)$ — первая компонента решения системы

$$l(\tilde y)(x) - \lambda\tilde y(x) = \tilde f(x), \tag{45}$$

$$\tilde M_0\tilde y(0) + \tilde M_1\tilde y(1) = 0, \tag{46}$$

где $\tilde f(x) \in P$. Обратно, пусть $\tilde y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ есть решение системы (45), (46) *и λ таково, что однородная краевая задача для* (45), (46) *имеет только нулевое решение, тогда R_λ существует и определяется по формуле* (44).

Доказательство. Пусть R_λ существует и $y_1(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда

$$y_1(x) - \lambda A y_1(x) = Af(x). \tag{47}$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, получим $\tilde y(x) - \lambda\tilde A_0\tilde y(x) = \tilde A_0\tilde f(x)$, где $\tilde y(x) = (y_1(x), y_1(1-x))^T$. Используя теорему 3, получим (45), (46).

Доказательство обратного утверждения приведем так же как и в лемме 1 из [2]. Пусть $\tilde y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ удовлетворяет системе (45), (46). Используя теоремы 2 и 3, не трудно показать, что вектор $\tilde u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = y_2(1-x)$, $u_2(x) = y_1(1-x)$, также удовлетворяет (45), (46). Значит, $\tilde y(x) = \tilde u(x)$ и, следовательно,

$$y_2(x) = y_1(1-x), \tag{48}$$

т. е. $\tilde y(x) \in P$. Поэтому система (45), (46) может быть записана в виде $\tilde A_0^{-1}\tilde y(x) - \lambda\tilde y(x) = \tilde f(x)$ или

$$\tilde y(x) - \lambda\tilde A_0\tilde y(x) = \tilde A_0\tilde f(x). \tag{49}$$

Используя (48) в первой компоненте уравнения (49), получим (47).

Покажем, что оператор $E-\lambda A$ обратим. В самом деле, если $v_1(x)-\lambda A v_1(x)=0$, то, как показано ранее, $\tilde{v}(x)=(v_1(x),v_2(x))^T$, где $v_2(x)=v_1(1-x)$, удовлетворяет уравнению (49) при $\tilde{f}(x)=0$. Значит, $v_1(x)=0$ и, следовательно, $E-\lambda A$ обратим. А тогда из (47) следует, что $y_1(x)=R_\lambda f(x)$. Лемма доказана.

Все дальнейшие рассуждения с очевидными изменениями повторяют приведенные в [5], поэтому их приводим без доказательств.

Лемма 6. *Если $v(x,\lambda)=(v_1(x,\lambda),v_2(x,\lambda))^T$ есть решение системы* (24), (25), *то*

$$R_\lambda f(x)=\sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}h_j(x)v_j(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{2}r_j(x)v_j(x,\lambda),$$

где γ_{ij} — элементы матрицы Γ, $r_1(x)=\gamma_{12}r_{21}(x)$, $r_2(x)=\gamma_{11}r_{12}(x)$, $r_{ij}(x)$ — элементы матрицы $H_1(x)$.

Обозначим $\sigma(x,\lambda_1,k)=\sigma(x,\lambda)|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}$; через $\omega(x,t,\lambda_1,k)$ — любую из функций $\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega(x-t)}$ или $\varepsilon(t,x)e^{-\lambda\omega(x-t)}$ при $\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i$. Введем операторы A_k:

$$A_k g=\int_0^1 A(x,t,\lambda_1,k)g(t)dt,$$

где $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\sigma(x,\lambda_1,k)\sigma(t,\lambda_1,k)$ или $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$, $\psi(x)$ совпадает с 1, либо с одной из функций $h_j(x),r_j(x)$ из леммы 6, и операторы M_k:

$$M_k g=\int_0^1 M(x,t,\lambda_1,k)g(t)dt,$$

где $M(x,t,\lambda_1,k)=M(x,t,\lambda)|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}$, $M(x,t,\lambda)$ есть одна из $M_{kj}(x,t,\lambda)$ $(k,j=1,2)$, а $M_{kj}(x,t,\lambda)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ.

Введем еще следующие функционалы: $d_1(f,k)=A_kTf|_{x=0}$, $d_2(f,k)=A_kM_kA_kTf|_{x=0}$, $d_3(f,k)=A_kM_kTf|_{x=0}$. Здесь в $A_kM_kA_k$ операторы A_k перед M_k и A_k после M_k, вообще говоря, различны.

Пусть $\lambda\in S_{1\delta}$, $\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i$ и λ_1 принадлежит ограниченной области в комплексной плоскости.

Лемма 7. *При больших $|\lambda|$ в $S_{1\delta}$ имеет место представление*

$$R_\lambda f|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}=\Omega(x,\lambda_1,k;f)+O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right),$$

где $\Omega(x,\lambda_1,k;f)$ есть линейная комбинация с ограниченными по λ_1 и k коэффициентами следующих всевозможных операторов:

$$A_kTf,\qquad \frac{1}{k}A_kTf,\qquad A_kM_kA_kTf,\qquad \frac{1}{k}A_kM_kTf;$$
$$d_s(f,k)A_kp(x),\qquad d_s(f,k)A_kM_kA_kp(x),\qquad \frac{1}{k}d_s(f,k)A_kM_kp(x)\qquad (s=1,2);$$
$$\frac{1}{k}d_3(f,k)A_kp(x),\qquad \frac{1}{k}d_3(f,k)A_kM_kA_kp(x),$$

где $p(x)$ — любой элемент матрицы $P(x)$. При этом, если в первом операторе A_kTf ядро A_k совпадает с $\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$, то коэффициент при A_kTf не зависит от λ_1 и k.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Лемма 8. *Если в $d_s(f,k)$ $(s=1,2)$ ядра операторов A_k, M_k отличаются лишь параметром k, то справедливы оценки:*

$$\sum_k |d_s(f,k)|^2\le\|f\|^2\qquad (s=1,2),$$

где C не зависит от λ_1 из ограниченной области.

Пусть Γ_k — окружности из определения $S_{1\delta}$ и без ограничений общности будем считать, что Γ_k находятся целиком в S_1. Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел.

Лемма 9. *Имеет место оценка*

$$\|\sum_{k\in J}\int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda\| \le C,$$

где постоянная C *не зависит от* J.

Положим

$$E(\lambda_k) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda,$$

где теперь $\{\lambda_k\}$ — все характеристические значения оператора A и Γ_k — замкнутый контур в λ-плоскости, содержащий внутри себя лишь одно λ_k.

Лемма 10. *Если* $f(x) \in L_2[0,1]$ *и* $E(\lambda_k)f = 0$ *для всех* k, *то* $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Из леммы 4 следует, что достаточно большие $|\lambda_k|$ простые, тогда, используя леммы 9 и 10 так же как и в [4, теорема 5], получаем основной результат.

Теорема 7. *Система собственных и присоединенных функций оператора* A *образует базис Рисса в* $L_2[0,1]$.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (*проект* № 1.1520.2014K).

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–942. DOI: 10.4213/mzm1472.
2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрыва производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: 10.4213/sm601.
3. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. DOI: 10.4213/sm1534.
4. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110. DOI: 10.4213/mzm92.
5. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121. DOI: 10.4213/im7797.
6. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М. : Наука, 1965.
7. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

Riescz Basis Property of Eigen and Associated Functions of Integral Operators with Discontinuous Kernels, Containing Involution

V. P. Kurdumov, A. P. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KurdyumovVP@yandex.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

For invertible integral operator which kernel is discontinuous on the diagonals of the unit square Riescz basis property of its eigen and associated functions in $L_2[0,1]$ is proved.

Key words: Riescz basis, resolvent, boundary condition.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (*project no.* 1.1520.2014K).

References

1. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 6, pp. 804–813. DOI: 10.1007/BF02313039.
2. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of

expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.

3. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. DOI: 10.1070/SM2006v197n11ABEH003817.

4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of an integral operator with a variable limit of integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 1, pp. 90–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.

5. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on the diagonals. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1175–1189. DOI: 10.1070/IM2012v076n06ABEH002620.

6. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *The elements of functional analysis*. Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).

7. Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: 10.1070/ SM1982 v042 n03 ABEH002257.

УДК 517.518.3+519.216.8

МАРТИНГАЛЫ И ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – ЮНГА – БЕРНШТЕЙНА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

М. Г. Плотников[1], Ю. А. Плотникова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, MGPlotnikov@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, JAPlotnikova@yandex.ru

Во многих работах изучались вопросы единственности представления функций одномерными и кратными рядами по системе Хаара. Хорошо известно, что подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами 2^k является мартингалом на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. В нашей работе вводится понятие $\mathscr{U}$-множества для мартингалов и устанавливается ряд теорем единственности для мартингалов на произвольном компактном фильтрованном вероятностном пространстве. В частности, доказывается, что каждое множество $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ с $\mathbf{P}(U) = 0$ является $\mathscr{U}$-множеством для мартингалов на компактном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ (теорема типа Кантора – Юнга – Бернштейна). Приведенный результат дополняется рядом теорем типа Валле-Пуссена.

Ключевые слова: множество единственности, мартингал, фильтрованное вероятностное пространство, теорема Кантора – Юнга – Бернштейна, теорема Валле-Пуссена.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных результатов в теории ортогональных рядов является теорема Кантора – Юнга – Бернштейна (см., напр., [1; гл. 1, § 70, гл. 14]): *если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

всюду на $[0, 2\pi)$*, за исключением, быть может, точек из некоторого не более чем счетного множества, сходится к нулю, то этот ряд является* <u>*тождественно нулевым*</u>*, т. е. все его коэффициенты равны нулю.* С этой теоремы началось развитие разветвленной теории единственности представления функции ортогональными рядами. В частности, для тригонометрических рядов интересным оказался вопрос, можно ли заменить не более чем счетные множества в теореме Кантора – Юнга – Бернштейна на множества из более широкого класса. Оказывается, ответ на этот вопрос связан не только с их метрическими, но и с арифметическими характеристиками (см. по этому поводу [1, гл. 14] и библиографию, содержащуюся в данной монографии).

Теорему Кантора – Юнга – Бернштейна можно усиливать и в другом направлении, рассматривая вместо сходимости к нулю сходимость к конечной функции. В этом направлении хорошо известна (см., напр., [1, гл. 14, § 4]) теорема Валле-Пуссена (мы приводим эту теорему в не самой общей формулировке): *если ряд* (1) *сходится всюду, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества, к суммируемой функции* f*, то данный ряд является рядом Фурье функции* f.