SSSR, 1973, vol. 210, no. 1, pp. 15–17 (in Russian).
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).
12. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.

УДК 517.95; 517.984

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье методом Фурье дается классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с комплексным потенциалом при минимальных условиях гладкости начальных данных. Используется резольвентный подход, состоящий в привлечении в формальном решении метода Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты соответствующей спектральной задачи по спектральному параметру, не требующий никакой информации о собственных и присоединенных функциях и использующий лишь главную часть асимптотики собственных значений. Существенно используется прием А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Граничные условия таковы, что спектральная задача допускает кратный спектр и бесконечное множество присоединенных функций, что создает дополнительные трудности при анализе формального решения.

Ключевые слова: формальное решение, спектральная задача, резольвента, классическое решение.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского [2], В. И. Смирнова [3], О. А. Ладыженской [4], В. А. Ильина [5] (см. также [6]), В. А. Чернятина [7]. Недостатком такого подхода является требование завышенной гладкости на начальные данные. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных [8]. Суть его приема состояла в том, что изучение вопроса о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. На ряде прикладных задач им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования. Приведем его слова: «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.» [8, с. 227].

В. А. Чернятин [7] приемом А. Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Чернятина, есть качественно новый шаг в методе Фурье, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много новых вопросов в теории функций.

В настоящей статье дается дальнейшее развитие метода А. Н. Крылова и В. А. Чернятина путем привлечения метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей из метода Фурье. Его преимущество сказывается особенно в случае несамосопряженной задачи из метода Фурье, в том числе и когда участвуют присоединенные функции в любом количестве. Такое положение и наблюдается в настоящей статье.

Мы будем изучать задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u'_x(0,t) - u'_x(1,t) - au(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, a — комплексное число, условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты изложения.

Мы привлекаем еще спектральную задачу для оператора L_0:

$$L_0 y = -y''(x), \qquad y(0) = y'(0) - y'(1) = 0.$$

Этот оператор рассматривался В. А. Ильиным (см. [5, 6]) и замечателен тем, что все его собственные значения двукратны, причем для каждого собственного значения оператора L_0 имеется одна собственная и одна присоединенная функции. Оператор L_0 участвует в формировании эталонной смешанной задачи (см. [9]) при использовании приема А. Н. Крылова по усилению скорости сходимости рядов, подобных рядам Фурье, т. е. L_0 выполняет одну из важнейших функций в методе Фурье. В результате получаем классическое решение задачи (1)–(3) при минимальных требованиях на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, комплекснозначна, причем

$$\varphi(0) = \varphi'(0) - \varphi'(1) - a\varphi(1) = \varphi''(0) = 0. \tag{4}$$

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$
$$y(0) = y'(0) - y'(1) - ay(1) = 0.$$

Теорема 1. *Собственные значения* $\lambda_n = \rho_n^2$ $(\lambda = \rho^2,\ \mathrm{Re} \geqslant 0)$ *оператора* L *образуют две серии* $\{\lambda'_n\}$, $\{\lambda''_n\}$ *с асимптотиками*

$$\lambda'_n = {\rho'_n}^2, \qquad \rho'_n = 2n\pi + \varepsilon'_n, \qquad \lambda''_n = {\rho''_n}^2, \qquad \rho''_n = 2n\pi + \varepsilon''_n,$$

где $n = n_0, n_0+1, \ldots$, ε'_n *и* ε''_n *есть* $O(1/n)$. *Если* $\varepsilon'_n \neq \varepsilon''_n$, *то они простые, если* $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$, *то двукратные.*

Это хорошо известный факт (см., например, [10, с. 74–75]).

Замечание. В [10] приведена более точная асимптотическая формула для собственных значений, но она нам не потребуется.

Обозначим $\gamma_n = \{\rho \mid |\rho - 2n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь γ_n попадают ρ'_n и ρ''_n и других корней квадратных из собственных значений нет ни внутри, ни на границе γ_n. Пусть $\widetilde{\gamma}_n$ — образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\,\rho \geqslant 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т. е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор и λ — спектральный параметр. Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде (см. также [11, 12]):

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{5}$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения по модулю меньше r, имеют номера, меньше n_0; на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений. Таким образом, получаем, что в формальном решении $u(x,t)$ не фигурируют ни собственные значения, ни собственные функции.

Проводим теперь дальнейшее преобразование ряда (5) с использованием эталонной задачи (см. п. 3).

Лемма 1. *Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится ни внутри, ни на границе замкнутого контура $\widetilde{\gamma}$ ни при каком $n \geqslant n_0$, где $\widetilde{\gamma}$ либо $|\lambda| = r$, либо $\widetilde{\gamma}_n$. Тогда*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t \, d\lambda = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda, \tag{6}$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Так как $\varphi(x) \in D_L$ (область определения оператора L), то

$$g(x) = (L - \lambda E)\varphi(x) + (\lambda - \mu_0)\varphi(x).$$

Отсюда $R_\lambda g = \varphi(x) + (\lambda - \mu_0) R_\lambda \varphi$ и поэтому имеет место (6). □

Наше преобразование формального решения с учетом эталонной задачи дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Для формального решения $u(x, t)$ имеет место формула*

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{7}$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R^0_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda - \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R^0_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda| = r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R^0_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R^0_\lambda g] \cos \rho t \, d\lambda,$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n} [R_\lambda g - R^0_\lambda g] \cos \rho t \, d\lambda,$$

где $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$. Считаем еще, что ранее приведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0, при этом все собственные значения оператора L_0 вне $|\lambda| = r$ попадают внутрь контуров $\widetilde{\gamma}_n$ при $n \geqslant n_0$.

В дальнейшем будем использовать вместо (5) именно представление (7).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x) y + \rho^2 y = 0. \tag{8}$$

Пусть $z_1(x, \rho)$, $z_2(x, \rho)$ — решения уравнения (8) с начальными условиями:

$$z_1(0, \rho) = 1, \qquad z_1'(0, \rho) = 0, \qquad z_2(0, \rho) = 0, \qquad z_2'(0, \rho) = 1.$$

Если $q(x) = 0$, то эти решения есть $z^0_1(x, \rho)$, $z^0_2(x, \rho)$. Таким образом,

$$z^0_1(x, \rho) = \cos \rho x, \qquad z^0_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho}.$$

Теорема 3. *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + M_\rho f,$$

где

$$M_\rho f = \int\limits_0^x M(x,\xi,\rho) f(\xi)\,d\xi, \qquad M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho) \end{vmatrix},$$

$$v_1(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}(z_2'(1,\rho) + a z_2(1,\rho)) z_2(x,\rho), \qquad v_2(x,\rho) = -\frac{1}{\Delta(\rho)}(z_1'(1,\rho) + a z_1(1,\rho)) z_2(x,\rho),$$

$$\Delta(\rho) = z_2'(0,\rho) - z_2'(1,\rho) - a z_2(1,\rho), \qquad (f,g) = \int\limits_0^1 f(\xi) g(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство. Общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - q(x) y + \rho^2 y = f(x) \tag{9}$$

есть

$$y(x,\rho) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2 z_2(x,\rho) + M_\rho f(x), \tag{10}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Если $y = R_\lambda f$, то y удовлетворяет (10) и граничным условиям

$$u_1(y) = y(0) = 0, \qquad u_2(y) = y'(0) - y'(1) - a y(1) = 0.$$

Получаем отсюда

$$c_1 = 0, \qquad c_2 \Delta(\rho) + u_2(M_\rho f) = 0,$$

где $\Delta(\rho) = u_2(z_2)$.

Далее,

$$u_2(M_\rho f) = -\int\limits_0^1 \begin{vmatrix} z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho) \\ z_1'(1,\rho) + a z_1(1,\rho) & z_2'(1,\rho) + a z_2(1,\rho) \end{vmatrix} f(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда

$$u_2(M_\rho f) = -(f, z_1)\left(z_2'(1,\rho) + a z_2(1,\rho)\right) + (f, z_2)\left(z_1'(1,\rho) + a z_1(1,\rho)\right).$$

Таким образом, получаем:

$$R_\lambda f = \frac{1}{\Delta(\rho)}\left[(f, z_1)\left(z_2'(1,\rho) + a z_2(1,\rho)\right) - (f, z_2)\left(z_1'(1,\rho) + a z_1(1,\rho)\right)\right] z_2(x,\rho) + M_\rho f. \qquad \square$$

Теорема 4. *Для $R_\lambda^0 f$ имеет место формула*

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f, z_2^0) + M_\rho^0 f,$$

где

$$v_1^0(x,\rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_2^{0\prime}(1,\rho) z_2^0(x,\rho), \qquad v_2^0(x,\rho) = -\frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_1^{0\prime}(1,\rho) z_2^0(x,\rho),$$

$$\Delta_0(\rho) = 1 - \cos\rho, \qquad M_\rho^0 f = \int\limits_0^x \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2^0(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2^0(\xi,\rho) \end{vmatrix} f(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство такое же, как и доказательство теоремы 3 (здесь $u_1^0(y) = y(0)$, $u_2^0(y) = y'(0) - y'(1)$).

Теорема 5. *В полосе $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant h$ ($h > 0$ любое) имеют место асимптотические формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad z_1'(x,\rho) = -\rho \sin\rho x + O(1),$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad z_2'(x,\rho) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Эти оценки содержатся в [10, с. 59].

Теорема 6. *Для* $z_j(x,\rho)$ $(j=1,2)$ *имеют место формулы:*

$$z_1(x,\rho)=\cos\rho x+\int\limits_0^x K_1(x,\xi)\cos\rho\xi\,d\xi, \tag{11}$$

$$z_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x K_2(x,\xi)\frac{\sin\rho\xi}{\rho}\,d\xi, \tag{12}$$

где $K_j(x,\xi)$ $(j=1,2)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и* ξ*,* $K_2(x,0)\equiv 0$.

Замечание. Формулы (11), (12) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [13, с. 17, 33]).

Лемма 2. *При* $\rho\in\gamma_n$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$v_1^{(j)}(x,\rho)=v_1^{0(j)}(x,\rho)+O(\rho^{j-2}), \tag{13}$$

$$v_2^{(j)}(x,\rho)=v_2^{0(j)}(x,\rho)+O(\rho^{j-1}), \tag{14}$$

где $j=0,1,2$, $v_s^{(j)}(x,\rho)=\dfrac{d^j}{dx^j}v_s(x,\rho)$ *и оценки* $O(\ldots)$ *равномерны по* x.

Доказательство. Имеем:

$$\Delta(\rho)=z_2'(0,\rho)-z_2'(1,\rho)+az_2(1,\rho)=1-\cos\rho+O\left(\frac{1}{\rho}\right)=\Delta_0(\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда при $\rho\in\gamma_n$ имеем:

$$\frac{1}{\Delta(\rho)}=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\Delta(\rho)}(z_2'(1,\rho)+az_2(1,\rho))=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}z_2^{0\prime}(1,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{1}{\Delta(\rho)}(z_1'(1,\rho)+az_1(1,\rho))=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}z_1^{0\prime}(1,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Тогда

$$v_1(x,\rho)=\left(\frac{z_2^{0\prime}(1,\rho)}{\Delta_0(\rho)}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\left(z_2^0(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)=v_1^0(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

$$v_2(x,\rho)=\left(-\frac{z_1^{0\prime}(1,\rho)}{\Delta_0(\rho)}+O(1)\right)\left(z_2^0(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)=v_2^0(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

и тем самым (13) и (14) при $j=0$ установлены.

Используя теперь вместо $z_2(x,\rho)$ асимптотики для $z_2^{(j)}(x,\rho)$ $(j=1,2)$ придем аналогично к (13) и (14) при $j=1,2$. □

Лемма 3. *Если* $g(x)\in C[0,1]$ *и* $\rho\in\gamma_n$*, то*

$$(g,z_1)=(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi)-(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi), \tag{15}$$

$$(g,z_1-z_1^0)=\frac{1}{2n\pi+\mu}\left[(g_2(\xi)\cos\mu\xi,\sin 2n\pi\xi)+(g_2(\xi)\sin\mu\xi,\cos 2n\pi\xi)\right], \tag{16}$$

где $g_1(\xi)=g(\xi)+\int\limits_\xi^1 K_1(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau$, $g_2(\xi)=g(\xi)K_1(\xi,\xi)-\int\limits_\xi^1 K_{1\xi}'(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau$, $\rho=2n\pi+\mu$.

Доказательство. Имеем:

$$(g, z_1) = \Big(g, \cos\rho\xi + \int\limits_0^\xi K_1(\xi,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau\Big) = (g_1(\xi), \cos\rho\xi)$$

и отсюда следует (15). Формула (16) получается аналогично. □

Лемма 4. *Если $g(x) \in C[0,1]$ и $\rho \in \gamma_n$, то*

$$(g, z_2) = \frac{1}{2n\pi+\mu}\left[(g_3(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi) + (g_3(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2n\pi\xi)\right], \tag{17}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi+\mu)^2}\left[(g_4(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2n\pi\xi) - (g_4(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2n\pi\xi)\right], \tag{18}$$

где $g_3(\xi) = g(\xi) + \int\limits_\xi^1 K_2(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau$, $g_4(\xi) = -g(\xi)K_2(\xi,\xi) + \int\limits_\xi^1 K_{2,\xi}(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau$.

Доказательство. Формула (17) получается так же как и (15).

Далее, так как $K_2(\xi,0) \equiv 0$, то имеем:

$$z_2 - z_2^0 = -\frac{1}{\rho}\cos\rho x K_2(x,x) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \cos\rho\tau K'_{2,\tau}(x,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда приходим к (18). □

Лемма 5. *Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, где $\mu \in \gamma_0$ и $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(2n\pi x))$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}, \tag{19}$$

где постоянная C не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \gamma_0$.

Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}|\beta_n^2(\mu)|}. \tag{20}$$

По неравенству Бесселя получаем:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(\mu)| \leqslant C\|f(x,\mu)\|^2, \tag{21}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$. Но $\|f(x,\mu)\| \leqslant C\|f\|$, где C не зависит от $\mu \in \gamma_0$. Тем самым из (20) и (21) получаем (19). □

3. ИССЛЕДОВАНИЕ $u_0(x,t)$

Лемма 6. *Для $u_0(x,t)$ имеет место формула*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\Bigg)(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{22}$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$.

Доказательство. Действительно, по лемме 1, взяв R_λ^0 вместо R_λ и φ_1 вместо φ, имеем:

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} (R_\lambda^0 \varphi_1) \cos \rho t \, d\lambda = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} R_\lambda^0 g_1 \cos \rho t \, d\lambda,$$

где $g_1 = (L_1^0 - \mu_0 E)\varphi$. Но $g_1 = (L^0 - \mu_0 E) R_{\mu_0}^0 g = g$. Значит, имеет место (6) с заменой R_λ на R_λ^0 и φ на φ_1. □

Лемма 7. *Собственные значения оператора L_0 есть*

$$\lambda_n^0 = \rho_n^{02} = 4\pi^2 n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

При этом λ_0^0 — простое собственное значение, а остальные λ_n^0 двукратные.

Доказательство. Все ρ_n^0, отличные от нуля, есть корни $\Delta_0(\rho) = 1 - \cos\rho$. Но $1 - \cos\rho = 2\sin^2(\rho/2)$. Отсюда $\rho_n^0 = 2\pi n$ и все они двукратны при $n \neq 0$. Докажем, что 0 есть простое собственное значение оператора L_0. Действительно, если $y'' = 0$, то $y(x) = c_0 + c_1 x$. Найдем c_0 и c_1 из граничных условий. Из $y(0) = 0$ следует $c_0 = 0$, тогда $y(x) = c_1 x$. Отсюда $y'(x) = c_1$, т. е. $y(x) = x$ есть собственная функция для собственного значения $\lambda_0 = 0$. Покажем, что присоединенных функций для λ_0 нет. В противном случае существует $\varphi(x)$ такое, что $L_0 \varphi = x$, т. е. $-\varphi'' = x$. Отсюда $\varphi(x) = c_0 + c_1 x - \int\limits_0^x (x - t) t \, dt$. Для $\varphi(x)$ должны выполняться условия: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$. Но тогда $c_0 = 0$, $c_1 = c_1 - \int\limits_0^1 t \, dt$, чего быть не может. □

Лемма 8. *Для $R_\lambda^0 f$ имеет место формула*

$$R_\lambda^0 f = \frac{1}{1 - \cos\rho} \int\limits_0^1 f(\xi) \cos\rho(1 - \xi) \, d\xi \; \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x - \xi)}{\rho} f(\xi) \, d\xi. \tag{23}$$

Утверждение леммы следует из теоремы 4.

Теорема 7. *Имеем место формула*

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0(x, t), \tag{24}$$

где $u_0^0(x, t) = 2x(\varphi_1, 1)$, $u_n^0(x, t) = a_n \sin\rho_n^0 x \cos\rho_n^0 t + b_n x \cos\rho_n^0 x \cos\rho_n^0 t - b_n t \sin\rho_n^0 x \sin\rho_n^0 t$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_n = 4((1 - \xi)\varphi_1(\xi), \sin\rho_n^0 \xi)$, $b_n = 4(\varphi_1(\xi), \cos\rho_n^0 \xi)$.

Утверждение теоремы следует из (22) и (23) по теореме вычетов.

Лемма 9. *Для функций $u_n^0(x, t)$ справедливы формулы:*

$$u_n^0(x, t) = \frac{1}{2}(v_n(x + t) + v_n(x - t)) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{25}$$

где $v_0(x) = u_0^0(x, t)$ ($u_0^0(x, t)$ не зависит от t), $v_n(x) = a_n \sin\rho_n^0 x + b_n x \cos\rho_n^0 x$.

Доказательство. Для $n = 0$ равенство (25) очевидно. Пусть $n \geqslant 1$. Тогда, используя формулы для умножения тригонометрических функций, имеем:

$$u_n^0(x, t) = \frac{1}{2}\big\{a_n(\sin\rho_n^0(x + t) + \sin\rho_n^0(x - t)) + b_n x(\cos\rho_n^0(x + t) + \cos\rho_n^0(x - t)) -$$
$$- b_n t(\cos\rho_n^0(x - t) - \cos\rho_n^0(x + t))\big\} = \frac{1}{2}\big\{[a_n \sin\rho_n^0(x + t) + b_n(x + t)\cos\rho_n^0(x + t)] +$$
$$+ [a_n \sin\rho_n^0(x - t)) + b_n(x - t)\cos\rho_n^0(x - t)]\big\} = \frac{1}{2}(v_n(x + t) + v_n(x - t)).$$ □

Обозначим

$$F(x) = \sum_0^\infty v_n(x), \qquad F_1(x) = \sum_1^\infty a_n \sin\rho_n^0 x, \qquad F_2(x) = \sum_0^\infty b_n \cos\rho_n^0 x.$$

Лемма 10. *Функции* $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ *непрерывно дифференцируемы на оси* $(-\infty,\infty)$, $F_1(x)=-F_1(-x)$, $F_1(1+x)=F_1(x)$, $F_2(x)=F_2(-x)$, $F_2(1+x)=F_2(x)$. *При этом* $F(x)=\varphi_1(x)$ *при* $x\in[0,1]$.

Доказательство. Интегрируя два раза по частям формулы для a_n и b_n с учетом краевых условий на $\varphi_1(x)$, имеем:

$$a_n=\frac{\alpha_n}{\rho_n^{0\,2}},\qquad b_n=\frac{\alpha_n}{\rho_n^{0\,2}},$$

где через α_n обозначаем различные числа α_n, лишь бы $\sum|\alpha_n|^2<\infty$. Отсюда следует гладкость $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, если воспользоваться неравенством Коши – Буняковского. Свойства симметрии и периодичности $F_1(x)$ и $F_2(x)$ очевидны. То, что $F(x)=\varphi_1(x)$ при $x\in[0,1]$, следует из разложения функции $\varphi_1(x)$ (как функции из области определения оператора L_0) по собственным и присоединенным функциям оператора L_0 в силу регулярности краевых условий. □

Лемма 11. *Если* $x\in[0,1]$, *а* m *— любое целое число, то*

$$F(m+x)=m\varphi_1(1-x)+(m+1)\varphi_1(x). \tag{26}$$

Доказательство. Имеем $F(x)=F_1(x)+xF_2(x)$ при $x\in(-\infty,\infty)$. Пусть теперь $x\in[0,1]$. Тогда

$$F(1-x)=F_1(1-x)+(1-x)F_2(1-x)=-F_1(x)+(1-x)F_2(x)=$$
$$=-F(x)+F_2(x)=-\varphi_1(x)+F_2(x).$$

Но $F(1-x)=\varphi_1(1-x)$. Значит, $F_2(x)=\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x)$. Поэтому

$$F(m+x)=F_1(m+x)+(m+x)F_2(m+x)=F_1(x)+(m+x)F_2(x)=$$
$$=F(x)+mF_2(x)=\varphi_1(x)+m(\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x))=m\varphi_1(1-x)+(m+1)\varphi_1(x).$$ □

Следствие. $F(x)\in C^2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Имеем: $-\varphi_1''(x)-\mu_0\varphi_1(x)=-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)-\mu_0\varphi(x)$. Так как $\varphi_1(0)=\varphi(0)=\varphi''(0)=0$, то и $\varphi_1''(0)=0$. Поэтому

$$F''(m+0)=m\varphi_1''(1)+(m+1)\varphi_1''(0)=m\varphi_1''(1),$$
$$F''(m-0)=F''(m-1+1-0)=(m-1)\varphi_1''(0)=m\varphi_1''(1)=m\varphi_1''(1),$$

т. е. $F''(m+0)=F''(m-0)$.

Если же $x\neq m$, то $F''(x)$ непрерывны в силу (26). □

Теорема 8. *Функция* $u_0(x,t)$ *есть классическое решение эталонной задачи* (1)–(3), *т. е. когда* $q(x)\equiv 0$ *и вместо* $\varphi(x)$ *берется* $\varphi_1(x)$.

Доказательство. Имеем:

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+t)+F(x-t)]. \tag{27}$$

Поэтому по следствию леммы 11

$$\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial x^2}.$$

Выполнение начальных и граничных условий следует из (27) и законности почленного дифференцирования ряда (24) по x. □

Результаты этого параграфа получены совместно с В. В. Корневым.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ $u_2(x,t)$

По теоремам 3 и 4 с учетом того, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ есть целые функции по λ для $u_2(x,t)$, получаем следующее представление:

$$u_2(x,t)=\sum_{n\geqslant n_0}a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{2\rho\cos\rho t}{\rho^2-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)-v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)-v_2^0(x,\rho)(g,z_2)]\,d\rho. \tag{28}$$

Лемма 12. *Ряды* $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$, $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$ *и* $t\in[-T,T]$ *при любом фиксированном* $T>0$.

Доказательство. Имеем:

$$J(x,\rho)=J_1(x,\rho)+J_2(x,\rho), \tag{29}$$

где $J(x,\rho)$ — выражение в квадратных скобках в (28),

$$J_1(x,\rho)=(v_1(x,\rho)-v_1^0(x,\rho))(g,z_1)+(v_2(x,\rho)-v_2^0(x,\rho))(g,z_2),$$
$$J_2(x,\rho)=v_1^0(x,\rho)(g,z_1-z_1^0)+v_2^0(x,\rho)(g,z_2-z_2^0).$$

Обозначим через $\beta_n(\mu)$ любой из функционалов:

$$\begin{array}{ll}(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi), & -(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi),\\ (g_2(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi), & -(g_2(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi),\\ (g_3(\xi)\cos\mu\xi,\sin 2n\pi\xi), & (g_3(\xi)\sin\mu\xi,\cos 2n\pi\xi),\\ (g_4(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi), & -(g_4(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi).\end{array}$$

Тогда по леммам 3 и 4 имеем:

$$(g,z_1)=\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu),\qquad (g,z_2)=\frac{1}{2n\pi+\mu}\left[\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu)\right],$$
$$(g,z_1-z_1^0)=\frac{1}{2n\pi+\mu}\left[\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu)\right],\qquad (g,z_2-z_2^0)=\frac{1}{(2n\pi+\mu)^2}\left[\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu)\right].$$

Тогда, используя также лемму 2 и оценки

$$v_1^{(j)}(x,\rho)=O(\rho^{j-1}),\qquad v_2^{(j)}(x,\rho)=O(\rho^{j}), \tag{30}$$

получим из представления (29) оценку

$$J^{(j)}(x,\rho)=O(n^{j-2})\left[|\beta_n(\mu)|+|\beta_n(\mu)|\right]+O(n^{j-1})\frac{1}{|2n\pi+\mu|}\left[|\beta_n(\mu)|+|\beta_n(\mu)|\right]+$$
$$+O(n^{j-1})\frac{1}{|2n\pi+\mu|}\left[|\beta_n(\mu)|+|\beta_n(\mu)|\right]+O(n^{j})\frac{1}{|2n\pi+\mu|^2}\left[|\beta_n(\mu)|+|\beta_n(\mu)|\right]=O(n^{j-2}\widetilde{\beta}_n(\mu)), \tag{31}$$

где $\widetilde{\beta}_n(\mu)=\sum\limits_1^8|\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x\in[0,1]$ и $\mu\in\gamma_0$. Отсюда

$$|a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)|=\left|\int\limits_{\gamma_0}O(n^{j-3})\widetilde{\beta}_n(\mu)\,|d\mu|\right|.$$

Если $j=0,1$, то отсюда $|a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)|=O(n^{-2})$ и тем самым ряды $\sum|a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)|$ сходятся равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$.

Далее из (31) следует оценка

$$|a^{(2)}_{n,x^2}(x,t)|=\int\limits_{\gamma_0}O\left(n^{-1}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right)\,|d\mu|,$$

и поэтому по лемме 6

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}|a^{(2)}_{n,x^2}(x,t)|=\int\limits_{\gamma_0}O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right)|d\mu|=O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right),$$

где оценка $O(\ldots)$ равномерна по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$. Тем самым утверждение леммы получено для рядов $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$.

Аналогично (даже проще) исследуются ряды $\sum a^{(j)}_{n,t_j}(x,t)$. □

5. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Теорема 9. *Формальное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *есть классическое решение при* $\varphi(x) \in \in C^2[0,\pi]$ *и выполнении условий* (4).

Доказательство. Для формального решения (5) в силу формулы (9) и аналитичности $M_\rho f$ по лемме 1 имеем формулу

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t\,d\lambda. \quad (32)$$

Отсюда в силу оценок (31) по леммам 2–4 получаем, что ряд (32) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по x и t, сходятся абсолютно и равномерно (см. также доказательство леммы 12). Таким образом, в этом случае процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям.

Далее, в силу теоремы 2 и леммы 12 формальное решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда по теореме

$$Mu_0(x,t) = 0.$$

Далее,

$$Mu_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\left((R_\lambda g)(x)\cos\rho t\right)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}M\left(\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}M\left((R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\right)d\lambda = \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda.$$

Теперь имеем:

$$Mu_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\Big(\big[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)-$$
$$-v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)-v_1^0(x,\rho)(g,z_2^0)\big]\cos\rho t\Big)\,d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\Big(\big[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)\big]\cos\rho t\Big)\,d\lambda.$$

Но

$$M\left(v_j(x,\rho)\cos\rho t\right) = -v_j''(x,\rho)\cos\rho t - \rho^2 v_j(x,\rho)\cos\rho t = -q(x)v_j(x,\rho)\cos\rho t.$$

Значит,

$$Mu_2(x,t) = \frac{q(x)}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda,$$

т. е. $Mu = -q(x)u(x,t)$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 4 т. М. : Гостехиздат, 1953. Т. 4. 204 с.
4. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
5. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.
6. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
7. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в сме-

шанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

9. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.

10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

11. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.

12. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

13. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 332 с.

About the Classical Solution of the Mixed Problem for the Wave Equation

A. P. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

The classic solution of the mixed problem for a wave equation with a complex potential and minimal smoothness of initial data is established by the Fourier method. The resolvent approach consists of constructing formal solution with the help of the Cauchy – Poincaré method of integrating the resolvent of the corresponding spectral problem over spectral parameter. The method requires no information about eigen and associated functions and uses only the main part of eigenvalues asymptotics. Krylov's idea of accelerating the convergence of Fourier series is essentially employed. The boundary conditions of the mixed problem can produce multiple spectrum and infinite number of associated functions in the spectral problem, thus making more difficult the analysis of the formal solution.

Key words: formal solution, spectral problem, resolvent, classical solution.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).

2. Petrovsky I. G, *Lectures on partial differential equations*. Dover Publ. Inc., 1992, 245 p. (Rus. ed. : Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniiakh s chastnymi proizvodnymi*. Moscow, GITTL, 1953, 360 p.).

3. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [A Course of Higher Mathematics : in 5 vol., vol. 4]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 204 p. (in Russian).

4. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Mixed problem for a hyperbolic equation]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 282 p. (in Russian).

5. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works : in 2 vol.]. Moscow, OOO «Maks-press», 2008, vol. 1, 727 p. (in Russian).

6. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Rus. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.

7. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).

8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. (in Russian).

9. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.

10. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).

11. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964, 462 p. (in Russian).

12. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 106 p. (in Russian).

13. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 332 p. (in Russian).