expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.

3. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. DOI: 10.1070/SM2006v197n11ABEH003817.

4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of an integral operator with a variable limit of integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 1, pp. 90–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.

5. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on the diagonals. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1175–1189. DOI: 10.1070/IM2012v076n06ABEH002620.

6. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *The elements of functional analysis*. Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).

7. Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: 10.1070/ SM1982 v042 n03 ABEH002257.

УДК 517.518.3+519.216.8

МАРТИНГАЛЫ И ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – ЮНГА – БЕРНШТЕЙНА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

М. Г. Плотников[1], Ю. А. Плотникова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, MGPlotnikov@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, JAPlotnikova@yandex.ru

Во многих работах изучались вопросы единственности представления функций одномерными и кратными рядами по системе Хаара. Хорошо известно, что подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами 2^k является мартингалом на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. В нашей работе вводится понятие $\mathscr{U}$-множества для мартингалов и устанавливается ряд теорем единственности для мартингалов на произвольном компактном фильтрованном вероятностном пространстве. В частности, доказывается, что каждое множество $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ с $\mathbf{P}(U) = 0$ является $\mathscr{U}$-множеством для мартингалов на компактном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ (теорема типа Кантора – Юнга – Бернштейна). Приведенный результат дополняется рядом теорем типа Валле-Пуссена.

Ключевые слова: множество единственности, мартингал, фильтрованное вероятностное пространство, теорема Кантора – Юнга – Бернштейна, теорема Валле-Пуссена.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных результатов в теории ортогональных рядов является теорема Кантора – Юнга – Бернштейна (см., напр., [1; гл. 1, § 70, гл. 14]): *если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

всюду на $[0, 2\pi)$*, за исключением, быть может, точек из некоторого не более чем счетного множества, сходится к нулю, то этот ряд является тождественно нулевым, т. е. все его коэффициенты равны нулю.* С этой теоремы началось развитие разветвленной теории единственности представления функции ортогональными рядами. В частности, для тригонометрических рядов интересным оказался вопрос, можно ли заменить не более чем счетные множества в теореме Кантора – Юнга – Бернштейна на множества из более широкого класса. Оказывается, ответ на этот вопрос связан не только с их метрическими, но и с арифметическими характеристиками (см. по этому поводу [1, гл. 14] и библиографию, содержащуюся в данной монографии).

Теорему Кантора – Юнга – Бернштейна можно усиливать и в другом направлении, рассматривая вместо сходимости к нулю сходимость к конечной функции. В этом направлении хорошо известна (см., напр., [1, гл. 14, § 4]) теорема Валле-Пуссена (мы приводим эту теорему в не самой общей формулировке): *если ряд* (1) *сходится всюду, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества, к суммируемой функции* f*, то данный ряд является рядом Фурье функции* f.

Возможность получить аналоги теорем Кантора – Юнга – Бернштейна и Валле-Пуссена изучалась и для других систем функций. Важную роль в теории функций играет система функций Хаара $\{H_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ (см. [2, гл. 3]).

В 1910 г. А. Хаар показал, что если ряд $\sum c_n H_n$ сходится к нулю всюду на $[0, 1]$, то он является тождественно нулевым. Но доказательство Хаара содержало ошибку. Верное доказательство было получено в 1964 г. независимо сразу в 4 работах Ф. Г. Арутюняна, Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна, М. Б. Петровской, В. А. Скворцова. С другой стороны, в подобных теоремах сходимость всюду нельзя заменить даже на сходимость всюду, кроме одной точки: *для каждой точки* $x_0 \in [0, 1]$ *найдется нетривиальный ряд Хаара, сходящийся к нулю всюду на* $[0, 1]$, *кроме точки* x_0 (результат Г. Фабера, Д. МакЛафлина и Д. Прайса). По поводу результатов выше см. [3] и содержащуюся в этой работе библиографию. Таким образом, аналог теоремы Кантора – Юнга – Бернштейна для рядов Хаара справедлив лишь для сходимости к нулю всюду.

Для d-кратных рядов Хаара на $[0, 1]^d$ теорема типа Кантора – Юнга – Бернштейна установлена для сходимости по прямоугольникам [4], по 1/2-ограниченным прямоугольникам [5], а для сходимости по кубам она не имеет места [6] (речь идет о сходимости всюду). Теоремы типа Валле-Пуссена для одномерных и кратных рядов по системе Хаара содержатся в большом количестве работ (см., напр., [7–10]).

Ряды по системе Хаара интересны тем, что допускают большое количество представлений. Хорошо известен [11; 12, гл. 7, § 1] следующий факт. При подходящем выборе области определения функций Хаара, а также фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$, подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами 2^k является мартингалом. Подобное представление имеет место и для кратных рядов Хаара.

Целью данной заметки является изучение вопроса о справедливости теорем типа Кантора – Юнга – Бернштейна и Валле-Пуссена для мартингалов на произвольных фильтрованных вероятностных пространствах $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. Отметим, что теоремы типа Валле-Пуссена для сходимости почти всюду хорошо известны (см., напр., [12, гл. 7; 13; 14]), однако в них на мартингалы накладываются ограничения типа равномерной интегрируемости. Здесь мы будем рассматривать поточечную сходимость вместо сходимости почти всюду, но при этом будем обходиться без дополнительных ограничений на поведение мартингалов.

1. МАРТИНГАЛЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ

Всюду $\mathbf{N}$ означает множество целых неотрицательных чисел. До конца работы считаем, что имеется *фильтрованное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$, т. е. [15, гл. 1, § 2а, п. 5] вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с выделенной последовательностью $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ σ-алгебр (называемой *фильтрацией*) такой, что

$$\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{F}.$$

Пусть $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ или просто (X_k) — последовательность случайных величин на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Тогда (X_k) называется *мартингалом* (по отношению к фильтрации $(\mathscr{F}_k)$), если для всех $k \in \mathbf{N}$ величина X_k является $\mathscr{F}_k$-измеримой, $\mathbf{E}\,|X_k| < \infty$ и

$$\mathbf{E}\,(X_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k) = X_k \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

(См. по этому поводу [12, гл. 7, § 1].) Отметим, что (2) эквивалентно тому, что

$$\int_B X_{k+1}\,d\mathbf{P} = \int_B X_k\,d\mathbf{P} \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad k \in \mathbf{N}, \quad B \in \mathscr{F}_k. \tag{3}$$

Мартингал (X_k) будем называть *тривиальным*, если $X_k = 0$ ($\mathbf{P}$-п. н.) для каждого $k \in \mathbf{N}$. Множество $A \subset \Omega$ назовем *множеством единственности* для мартингалов (иначе, *множеством типа* $\mathscr{U}_M$), если только тривиальный мартингал (X_k) может обладать тем свойством, что $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega \setminus A$.

Множество $A \subset \Omega$ назовем *множеством типа* $\mathscr{V}_M$, если каждый мартингал (X_k), обладающий тем свойством, что $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = \xi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega \setminus A$ (ξ — случайная величина с $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$), восстанавливается по случайной величине ξ так:

$$X_k = \mathbf{E}\,(\xi\,|\,\mathscr{F}_k) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Очевидно, каждое множество типа $\mathscr{V}_M$ является множеством типа $\mathscr{U}_M$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть заданы $l \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, мартингал (Y_k) и множество $A \in \mathscr{F}_l$, причем $\mathbf{P}(A) > 0$ и*

$$Y_l \geqslant \varepsilon \quad \textit{всюду на} \quad A. \tag{5}$$

Тогда $\mathbf{P}(A') > 0$, где $A' \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in A: \ Y_{l+1}(\omega) \geqslant \varepsilon\}$.

Доказательство. Из (5) вытекает неравенство

$$\int_A Y_l \, d\mathbf{P} \geqslant \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A). \tag{6}$$

Из определения множества A' следует, что

$$Y_{l+1} < \varepsilon \quad \text{всюду на } A \setminus A'.$$

Поэтому

$$\int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} < \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A \setminus A') \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A). \tag{7}$$

Имеем:

$$\int_{A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} = \int_A Y_{l+1} \, d\mathbf{P} - \int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} \stackrel{(3)}{=} \int_A Y_l \, d\mathbf{P} - \int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} \stackrel{(6),\,(7)}{>} \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A) - \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A) = 0,$$

т. е. $\int_{A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} > 0$. Отсюда $\mathbf{P}(A') > 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ обладает тем свойством, что*

$$\begin{gathered} \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k \neq \varnothing \quad \textit{для всякого } l \in \mathbf{N} \textit{ и любой невозрастающей последовательности} \\ (A_k)_{k=l}^{\infty} \textit{ множеств таких, что } A_k \in \mathscr{F}_k \textit{ и } \mathbf{P}(A_k) > 0 \textit{ для всех } k \geqslant l. \end{gathered} \tag{8}$$

Предположим, что заданы $l \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, мартингал (Y_k) и множество $A_l \in \mathscr{F}_l$, для которых выполнено условие (5). *Тогда $\Omega_\varepsilon \cap A_l \neq \varnothing$, где*

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega: \ \varliminf_{k \to \infty} Y_k(\omega) \geqslant \varepsilon\}. \tag{9}$$

Доказательство. Многократно применив лемму 1, отыщем невозрастающую последовательность $(A_k)_{k=l}^{\infty}$ множеств такую, что $\mathbf{P}(A_k) > 0$, $A_k \in \mathscr{F}_k$ и

$$Y_k(\omega) \geqslant \varepsilon \quad \text{всюду на } A_k \tag{10}$$

для всех $k \geqslant l$. Из (9) и (10) видно, что

$$\Omega_\varepsilon \cap A_l \supset \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k. \tag{11}$$

Теперь утверждение леммы вытекает из (8) и (11). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Предположим, что пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ обладает свойством* (8). *Пусть заданы $l \in \mathbf{N}$, мартингал (Y_k) и множество $B \in \mathscr{F}_l$ такие, что*

$$\int_B Y_l \, d\mathbf{P} > 0. \tag{12}$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение $\Omega_\varepsilon \cap B \neq \varnothing$, где Ω_ε определяется формулой (9).

Доказательство. Из (12) вытекает наличие $\varepsilon > 0$ и множества $A \in \mathscr{F}_l$, для которых выполнено условие (5). Теперь утверждение данной леммы вытекает из леммы 2. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы множество* U *и мартингал* (Y_k), *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(U) = 0$ *и*

$$\varliminf_{k\to\infty} Y_k(\omega) \leqslant 0 \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad \omega \in \Omega \setminus U. \tag{13}$$

Тогда

$$\int_B Y_l \, d\mathbf{P} \leqslant 0$$

для всех $l \geqslant q$ *и множеств* $B \in \mathscr{F}_l$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $l \geqslant q$ и множество $B \in \mathscr{F}_l$ такие, что $\int_B Y_l \, d\mathbf{P} > 0$. Тогда $B \setminus U \in \mathscr{F}_l$ и $\int_{B\setminus U} Y_l \, d\mathbf{P} > 0$. Согласно лемме 3 найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\Omega_\varepsilon \cap B) \setminus U = \Omega_\varepsilon \cap (B \setminus U) \neq \varnothing$, Ω_ε определяется формулой (9). Значит, существует точка $\omega_0 \in B \setminus U$ такая, что $\varliminf_{k\to\infty} Y_k(\omega_0) \geqslant \varepsilon$. Последнее соотношение противоречит (13). Лемма доказана. □

Лемма 5. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы множество* U, *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$ *и мартингал* (X_k), *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(U) = 0$ *и*

$$\varliminf_{k\to\infty} X_k(\omega) \leqslant \xi(\omega) \qquad \textit{для всех } \omega \in \Omega \setminus U.$$

Тогда

$$\int_B X_l \, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi \, d\mathbf{P}$$

для всех $l \geqslant q$ *и множеств* $B \in \mathscr{F}_l$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 4 к мартингалу (Y_k), где $Y_k \equiv X_k - \mathbf{E}\,(\xi \,|\, \mathscr{F}_k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Лемма доказана. □

3. ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – ЮНГА – БЕРНШТЕЙНА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ

Теорема 1. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы: множество* U, *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$ *и* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$; *мартингал* (X_k) *такой, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} X_k(\omega) \leqslant \xi(\omega) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} X_k(\omega) \tag{14}$$

для всех $\omega \in \Omega \setminus U$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Доказательство. К мартингалам (X_k) и $(-X_k)$ примени́ма лемма 5. Для мартингала (X_k) указанная лемма дает неравенство

$$\int_B X_l \, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi \, d\mathbf{P}, \tag{15}$$

а для мартингала $(-X_k)$ — неравенство

$$\int_B -X_l \, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi \, d\mathbf{P}, \tag{16}$$

для всех $l \geqslant q$ и множеств $B \in \mathscr{F}_l$. Из (3), (15) и (16) вытекает равенство (4) для всех $k \geqslant q$. Так как (X_k) — мартингал, то равенство (4) распространяется и на все $0 \leqslant k \leqslant q - 1$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы: множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$; *наконец, мартингал* (X_k) *такой, что для всякого* $\omega \in \Omega \setminus U$ *найдется возрастающая последовательность* (k_s) *(зависящая, вообще говоря, от* ω*) натуральных чисел, причем*

$$\lim_{s\to\infty} X_{k_s}(\omega) = \xi(\omega), \qquad \omega \in \Omega \setminus U. \tag{17}$$

Тогда для каждого $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения теоремы 1 и того факта, что условие (14) является следствием соотношения (17). Теорема доказана. □

Из теоремы 2 сразу вытекает

Теорема 3. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы*: *множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}|\xi| < \infty$; *мартингал* (X_k) *такой, что* $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = \xi(\omega)$ *для всех* $\omega \in \Omega \backslash U$. *Тогда для всех* $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Следствие 4. *Если пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8), *то любое множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) > 0$ *является множеством типа* $\mathscr{V}_M$ *и, как следствие, множеством типа* $\mathscr{U}_M$.

Следствие 5. *Если пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8), *то* $\varnothing$ *является множеством типа* $\mathscr{V}_M$ *и, как следствие, множеством типа* $\mathscr{U}_M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 14-01-00417) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-3682.2014.1).

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М : ГИФМЛ, 1961. 936 с.
2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
3. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анализ. 1970, 1971. С. 109–146.
4. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 789–798.
5. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для кратных рядов Хаара // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 97–116. DOI: 10.4213/sm1268.
6. *Плотников М. Г.* О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2003. № 4. С. 20–24.
7. *Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1391–1408.
8. *Скворцов В. А., Талалян А. А.* Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 2. С. 104–113.
9. *Skvortsov V.* Henstock–Kurzweil type integrals in P-adic harmonic analysis // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N.S.). 2004. Vol. 20, № 2. P. 207–224.
10. *Плотников М. Г.* Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 63–90. DOI: 10.4213/sm1506.
11. *Gundy R. F.* Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 124, № 2. P. 228–248.
12. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М. : Наука, 1989. 640 с.
13. *Skvortsov V. A.* Martingale closure theorem for A-integrable martingale sequences // Real Anal. Exchange. 1998–1999. Vol. 24, № 2. P. 815–820.
14. *Костин В. В.* Замкнутость справа мартингальных последовательностей в смысле A-интеграла // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 98–104. DOI: 10.4213/mzm923.
15. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. Т. 1. М. : Фазис, 1998. 512 с.

Martingales and Theorems of Cantor–Young–Bernstein and de la Vallée Poussin

M. G. Plotnikov[1], Ju. A. Plotnikova[2]

Vologda State Academy of Milk Industry, 2, Shmidt str., P.O. Molochnoe, Vologda, 160555, Russia, MGPlotnikov@gmail.com, JAPlotnikova@yandex.ru

Uniqueness problems for one-dimensional Haar series and for multiple ones have understood in numerous works. It is well-known that the subsequence of the partial sums S_{2^k} of an arbitrary Haar series can be represented as a discrete-time martingale on some filtered probability space $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. In paper the concept of a $\mathscr{U}$-set for martingales is presented and some uniqueness theorems for martingales on arbitrary compact filtered probability spaces are established. In particular, it is proved that every set $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ with $\mathbf{P}(U) = 0$ is a $\mathscr{U}$-set for martingales on a compact space $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ (Cantor–Young–Bernstein type theorem). The result above is supplemented by some de la Vallée Poussin type theorems.

Key words: set of uniqueness, martingale, filtered probability space, Cantor – Young – Bernstein theorem, de la Vallée Poussin theorem.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 14-01-00417) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools* (*project no.* НШ-3682.2014.1).

References

1. Bary N. K. *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II. Oxford, Pergamon Press, 1964, 1061 p. (Rus. ed. : Bary N. K. *Trigonometricheskie ryady*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 936 p.)
2. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Transl. Math. Monogr., vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989, 451 p. (Rus. ed. : *Ortogonal'nye ryady*. Moscow, AFC Publishers, 1999, 560 p.)
3. Golubov B. I. Series with respect to the Haar system. *J. Soviet Math.*, 1973, vol. 1, no. 6, pp. 704–726. DOI: 10.1007/BF01236362.
4. Skvortsov V. A. Uniqueness sets for multiple Haar series. *Math. Notes*, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 1011–1016. DOI: 10.1007/BF01099583.
5. Plotnikov M. G. Uniqueness for multiple Haar series. *Sb. Math.*, 2005, vol. 196, no. 2, pp. 243–261. DOI: 10.1070/SM2005v196n02ABEH000879.
6. Plotnikov M. G. Violation of the uniqueness for two-dimensional uniqueness of double Haar series. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2003, vol. 58, no. 4, pp. 16–19.
7. Arutjunjan F. G., Talaljan A. A. Uniqueness of series in Haar and Walsh systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, iss. 6, pp. 1391–1408 (in Russian).
8. Skvortsov V. A., Talaljan A. A. Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series. *Math. Notes*, 1989, vol. 46, no. 2, pp. 646–653. DOI: 10.1007/BF01137630.
9. Skvortsov V. Henstock – Kurzweil type integrals in P-adic harmonic analysis. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N. S.)*, 2004, vol. 20, no. 2, pp. 207–224.
10. Plotnikov M. G. Several properties of generalized multivariate integrals and theorems of the du Bois-Reymond type for Haar series. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 967–991. DOI: 10.1070/SM2007v198n07ABEH003869.
11. Gundy R. F. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 124, no. 2, pp. 228–248.
12. Shiryaev A. N. *Probability*, 1nd ed. New York, Springer, 1995, 637 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Verojatnost*. Moscow, Nauka, 1989, 640 p.)
13. Skvortsov V. A. Martingale closure theorem for A-integrable martingale sequences, *Real Anal. Exchange.*, 1998–1999, vol. 24, no. 2, pp. 815–820.
14. Kostin V. V. Right closure of martingale sequences in the sense of the A-integral, *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 84–89. DOI: 10.1007/BF02674649.
15. Shiryaev A. N. *Essentials of Stochastic Finance*, Singapore, World Scientific Publ., 852 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki*. Vol. 1, Moscow, Fusis Publ., 1998, 512 p.)

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов[1], О. В. Блинкова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, RykhlovVS@yandex.ru

[2]Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная академия права, Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличные от нуля, и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Формулируются достаточные условия n-кратной полноты системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ ВОПРОСА И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x,\lambda)y \qquad (1)$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$