References

1. Bary N. K. *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II. Oxford, Pergamon Press, 1964, 1061 p. (Rus. ed. : Bary N. K. *Trigonometricheskie ryady*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 936 p.)
2. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Transl. Math. Monogr., vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989, 451 p. (Rus. ed. : *Ortogonal'nye ryady*. Moscow, AFC Publishers, 1999, 560 p.)
3. Golubov B. I. Series with respect to the Haar system. *J. Soviet Math.*, 1973, vol. 1, no. 6, pp. 704–726. DOI: 10.1007/BF01236362.
4. Skvortsov V. A. Uniqueness sets for multiple Haar series. *Math. Notes*, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 1011–1016. DOI: 10.1007/BF01099583.
5. Plotnikov M. G. Uniqueness for multiple Haar series. *Sb. Math.*, 2005, vol. 196, no. 2, pp. 243–261. DOI: 10.1070/SM2005v196n02ABEH000879.
6. Plotnikov M. G. Violation of the uniqueness for two-dimensional uniqueness of double Haar series. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2003, vol. 58, no. 4, pp. 16–19.
7. Arutjunjan F. G., Talaljan A. A. Uniqueness of series in Haar and Walsh systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, iss. 6, pp. 1391–1408 (in Russian).
8. Skvortsov V. A., Talaljan A. A. Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series. *Math. Notes*, 1989, vol. 46, no. 2, pp. 646–653. DOI: 10.1007/BF01137630.
9. Skvortsov V. Henstock – Kurzweil type integrals in P-adic harmonic analysis. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N. S.)*, 2004, vol. 20, no. 2, pp. 207–224.
10. Plotnikov M. G. Several properties of generalized multivariate integrals and theorems of the du Bois-Reymond type for Haar series. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 967–991. DOI: 10.1070/SM2007 v198n07ABEH003869.
11. Gundy R. F. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 124, no. 2, pp. 228–248.
12. Shiryaev A. N. *Probability*, 1nd ed. New York, Springer, 1995, 637 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Verojatnost*. Moscow, Nauka, 1989, 640 p.)
13. Skvortsov V. A. Martingale closure theorem for A-integrable martingale sequences, *Real Anal. Exchange.*, 1998–1999, vol. 24, no. 2, pp. 815–820.
14. Kostin V. V. Right closure of martingale sequences in the sense of the A-integral, *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 84–89. DOI: 10.1007/BF02674649.
15. Shiryaev A. N. *Essentials of Stochastic Finance*, Singapore, World Scientific Publ., 852 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki*. Vol. 1, Moscow, Fusis Publ., 1998, 512 p.)

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов[1], О. В. Блинкова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, RykhlovVS@yandex.ru

[2]Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная академия права, Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличные от нуля, и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Формулируются достаточные условия n-кратной полноты системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ ВОПРОСА И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x,\lambda)y \tag{1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

© Рыхлов В. С., Блинкова О. В., 2014

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_j(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-j} p_{js}(x)\lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{ij}(\lambda)$, $b_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с. з.), собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к. ф.), производных (по Келдышу) цепочек из [1, 2]. Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с. з. пучка $L(\lambda)$, а $Y := \{y_k\}$ — множество всех к. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 1. Система Y к. ф. пучка $L(\lambda)$ называется m-кратно полной в пространстве $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m\ \text{раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. $\square$

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота к. ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае естественно возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \le m \le n-1$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [3], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д. в. (1) со специальной главной частью
$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$
и независящими от λ распадающимися краевыми условиями (2) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка $[0,1]$, а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [4] в случае аналитических коэффициентов д. в. и в [5] — в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [6]. Случай произвольной главной части д. в. (1) был рассмотрен в [7, 8]. В работах [9, 10], относящихся к общему виду (1), (2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к. ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к. ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (2), д. в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце) и не зависящие от λ, проведено в [11].

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к. ф. еще не исследовался. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный д. в. n-го порядка:
$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s\leqslant n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \ne 0, \tag{3}$$
и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями:
$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \qquad i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s\leqslant\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \sum_{j+s\leqslant\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \qquad i = \overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{4}$$
где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$.

Будем называть д. в. $\ell_0(y,\lambda)$ однородным, если в сумме (3) $p_{js} \equiv 0$ при $j+s<n$.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно д. в. $\ell_0(y,\lambda)$, а именно: корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ его характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Не нарушая общности, можно считать, что
$$\omega_n < \omega_{n-1} < \cdots < \omega_{k+1} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \qquad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{5}$$

Пучок вида (3), (4) в случае, когда краевые условия не зависят от λ и

а) $2l > n$, то есть краевые условия полураспадающиеся;

б) существует прямая d, проходящая через начало координат и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем $n-l$, детально рассмотрен в [11], где получены условия n-кратной и m-кратной полноты при $1 \le m \le n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

В работах [12–15] исследована кратная полнота системы к. ф. пучка $L_0(\lambda)$, для которого не выполняются условия а) или б). Это возможно при $0 \leqslant l \leqslant n-1$ и выполнении предположения (5) при определенных значениях k. В [12] рассмотрен случай $l = n-1$ и $k = n$, в [13] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $k = n$, в [14] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $k = n-1$, и, наконец, в [15] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Во всех этих четырех случаях д. в. $\ell_0(y,\lambda)$ предполагалось однородным. Получены достаточные условия m-кратной полноты системы к. ф. в $L_2[0,1]$, где

$$m = \min\{k, n-l\} + \min\{n-k, n-l\}. \tag{6}$$

Но оставался не исследованным крайний случай $l = 0$. Данная статья восполняет этот пробел. В соответствии с формулой (6) в этом случае естественно ожидать n-кратную полноту.

Введем необходимые обозначения. Считаем, что краевые условия (4) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что при $s_0 = 0$, $s_{r+1} = n$ имеем:

$$\chi_{s_0+1} = \dots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \dots = \chi_{s_2} < \dots < \chi_{s_r+1} = \dots = \chi_{s_{r+1}},$$

где обозначено $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$, и γ, δ таковы, что

$$s_\gamma + 1 \leqslant n-k+1 \leqslant s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \leqslant k+1 \leqslant s_{\delta+1}. \tag{7}$$

В случае $l = 0$ считаем, что $\gamma = 0$, $\delta = r+1$ при $k = n$ и $\gamma = r+1$, $\delta = 0$ при $k = 0$.

Обозначим

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu, \qquad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu, \qquad \varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \qquad i,j = \overline{1,n};$$
$$[n]_+ = \max\{0, n\}.$$

Пусть A и B есть соответственно определители

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\gamma,k+1} & \dots & a_{s_\gamma,n} \\ b_{s_\gamma+1,1} & \dots & b_{s_\gamma+1,k} & a_{s_\gamma+1,k+1} & \dots & a_{s_\gamma+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_\delta,1} & \dots & a_{s_\delta,k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\delta+1,1} & \dots & a_{s_\delta+1,k} & b_{s_\delta+1,k+1} & \dots & b_{s_\delta+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & b_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть для пучка $L_0(\lambda)$ выполняются условия (5), $l = 0$ и*

$$A \neq 0, \qquad B \neq 0. \tag{8}$$

Тогда система к. ф. этого пучка n-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$ в случае, если выполняется хотя бы для одного $i = \overline{1,n}$ неравенство $\max\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\} > n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае. □

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этой теоремы. Схема доказательства этой теоремы соответствует схеме доказательства теорем 2.1, 2.2 и 2.3 из [11] с модификациями, сделанными при доказательстве соответствующих теорем в [13, 14]. Центральную роль в доказательстве играет Лемма 1 об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем параграфе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ

В [11, с. 23] доказано, что уравнение $l_0(y,\lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ф. с. р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, имеющую асимптотику

$$y_j^{(s-1)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^{s-1} e^{\lambda\omega_j x}[1], \qquad j,s = \overline{1,n}, \tag{9}$$

и аналитическую при $|\lambda| \gg 1$, где обозначено $[1] = 1 + O(1/\lambda)$.

Наряду с ф. с. р. (9) будет использоваться ф. с. р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям:

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0,\lambda)=\delta_{js}, \qquad j,s=\overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Будем далее обозначать объекты, построенные по ф. с. р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф. с. р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

С. з. λ_ν, $\nu=1,2,\ldots$, пучка (3), (4) являются нулями целой функции

$$\tilde{\Delta}(\lambda):=\det\bigl(U_i^0(\tilde{y}_j(x,\lambda),\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n.$$

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x,\lambda),\ldots,\tilde{y}_n(x,\lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left(\frac{\partial^r\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^r},\ldots,\frac{\partial^r\bigl(\lambda^{n-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\bigr)}{\partial\lambda^r}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{10}$$

где $i=\overline{1,n}$, $r=\overline{0,s}$, являются производными, по Келдышу, n-цепочками для к. ф., соответствующих с. з. λ_ν, которое является нулем $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s+1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^m\frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\,h_j(x)\,dx, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

где $h_j(x)\in L_2[0,1]$.

Перепишем (11) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)=\frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda),\ldots,\tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda)=\int_0^1\sum_{\nu=1}^n h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx=\lambda^{n-1}\int_0^1 h_n(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_n(x,\lambda)=\sum\limits_{\nu=1}^n h_\nu(x)\lambda^{\nu-n}$.

В [11, с. 48–49] доказаны следующие два простых утверждения, которые в случае $l=0$ формулируются следующим образом:

Утверждение 1. *Функции $\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$, ..., $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Утверждение 2. *Функции $\tilde{\Theta}_1(\lambda)$, ..., $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ не зависят от выбора ф. с. р. уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Из (12) и утверждения 2 получим:

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)\equiv\Theta_i(\lambda)\equiv\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]\right\}, \qquad \Pi_\varepsilon^-=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\left[\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right]\right\},$$

где $\varepsilon>0$ и достаточно мало.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть справеливы предположения* (5), (7), $l=0$ *и выполняются условия* (8). *Тогда при $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+\bigcup\Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda|\gg1$ имеют место оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)|\leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

где $C(\varepsilon)$ — некоторая константа, зависящая только от ε.

Доказательство. Так как справедливы соотношения (13), то чтобы оценить сверху $\Theta_i(\lambda)$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Пусть $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Исходя из вида ф. с. р. (9), в этом случае будем иметь при $\sigma = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$ (при $k = 0$ этого случая не будет):

$$U_\sigma(y_j,\lambda) = \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma0}} \alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}[1] + \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma1}} \beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}[1] =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{\sigma1}}e^{\lambda\omega_j}\left(\sum_{\nu+s=\varkappa_{\sigma1}} \beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{\sigma0}-\varkappa_{\sigma1}}e^{-\lambda\omega_j})\right) = \lambda^{\varkappa_{\sigma1}}e^{\lambda\omega_j}[b_{\sigma j}]. \tag{15}$$

При $\sigma = \overline{1,n}$, $j = \overline{k+1,n}$ (при $k = n$ этого случая не будет):

$$U_\sigma(y_j,\lambda) = \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma0}} \alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}[1] + \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma1}} \beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}[1] =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{\sigma0}}\left(\sum_{\nu+s=\varkappa_{\sigma0}} \alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{\sigma0}}e^{\lambda\omega_j})\right) = \lambda^{\varkappa_{\sigma0}}[a_{\sigma j}]. \tag{16}$$

Следовательно, подставляя (15), (16) в $\Delta(\lambda)$, вынося из первых k столбцов экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$, а из всех строк множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma0}}$, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu} \begin{vmatrix} \lambda^{\chi_1}[b_{11}] & \dots & \lambda^{\chi_1}[b_{1k}] & [a_{1,k+1}] & \dots & [a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,k}] & [a_{s_\gamma+1,k+1}] & \dots & [a_{s_\gamma+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{n-k+1}}[b_{n-k+1,1}] & \dots & \lambda^{\chi_{n-k+1}}[b_{n-k+1,k}] & [a_{n-k+1,k+1}] & \dots & [a_{n-k+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},k}] & [a_{s_{\gamma+1},k+1}] & \dots & [a_{s_{\gamma+1},n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_n}[b_{n1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[b_{nk}] & [a_{n,k+1}] & \dots & [a_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по последним $n-k$ столбцам. Выделим главную часть — это будут в силу соотношений (7) слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k$ столбцов на их алгебраические дополнения k-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых k столбцах и в любых k строках из строк с номерами от $s_\gamma+1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(n-k))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=n-k+1}^{n}\chi_\sigma.$$

Затем только главные члены опять свернем в определитель. Получим с учетом (8):

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}(\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{\sigma0})} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\left(A + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu} A[1].$$

Следовательно, для $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$ получим при условии (8) оценку снизу:

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{17}$$

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, в соответствии с формулой (13). С учетом (9) получим после вынесения множителя λ^{n-1} из i-й строки и разложения определителя по элементам этой строки

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}[1]\,d\xi, \tag{18}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$, то есть с учетом (15), (16)

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\left|\begin{matrix}\lambda^{\varkappa_{11}}e^{\lambda\omega_1}[b_{11}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{11}}e^{\lambda\omega_k}[b_{1k}] & \lambda^{\varkappa_{10}}[a_{1,k+1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{10}}[a_{1n}]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_k}[b_{nk}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{n,k+1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}]\end{matrix}\right|_{ij}, \tag{19}$$

где индекс $\{ij\}$ у определителя здесь и далее означает, что в этом определителе отсутствует i-я строка и j-й столбец.

Далее рассмотрим два случая: $1\leqslant j\leqslant k$ и $k+1\leqslant j\leqslant n$.

Пусть $1\leqslant j\leqslant k$. Вынося множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma 0}}$ из строк с номерами от 1 до $i-1$ и от $i+1$ до n, а также вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$ из первых $k-1$ столбцов с номерами от 1 до $j-1$ и от $j+1$ до k, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}}e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\times$$

$$\times\left|\begin{matrix}\lambda^{\chi_1}[b_{11}] & \ldots & \lambda^{\chi_1}[b_{1k}] & [a_{1,k+1}] & \ldots & [a_{1n}]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,1}] & \ldots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,k}] & [a_{s_\gamma+1,k+1}] & \ldots & [a_{s_\gamma+1,n}]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},1}] & \ldots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},k}] & [a_{s_{\gamma+1},k+1}] & \ldots & [a_{s_{\gamma+1},n}]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda^{\chi_n}[b_{n1}] & \ldots & \lambda^{\chi_n}[b_{nk}] & [a_{n,k+1}] & \ldots & [a_{nn}]\end{matrix}\right|_{ij}.$$

Обозначим последний определитель как D_{ij}. Разложим этот определитель в сумму по последним $n-k$ столбцам. Выделим главную часть. Вид главной части зависит от того, как соотносятся величины i, $n-k+2$ и $s_{\gamma+1}$. Так как ввиду (7) справедливы неравенства $s_\gamma+2\leqslant n-k+2\leqslant s_{\gamma+1}+1$, то возможны только следующие случаи:

1.а) $1\leqslant i<n-k+2\leqslant s_{\gamma+1}$;
1.б) $1\leqslant i<n-k+2=s_{\gamma+1}+1$;
1.в) $n-k+2\leqslant s_{\gamma+1},\quad n-k+2\leqslant i\leqslant n$;
1.г) $n-k+2=s_{\gamma+1}+1,\quad n-k+2\leqslant i\leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, случай 1.а). В этом случае главная часть D_{ij} — это слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k$ столбцов на алгебраические дополнения $(k-1)$-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых $k-1$ столбцах и в любых $k-1$ строках с номерами от $s_\gamma+1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(n-k-1))\chi_{s_{\gamma+1}}+(s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}}+\cdots+(s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1}=\sum_{\sigma=n-k+2}^{n}\chi_\sigma.$$

Сворачивая затем только главные члены опять в определитель, получим:

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+2}^{n}(\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{\sigma 0})}e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}[A_{ij}].$$

Аналогичная асимптотика получается и в случае 1.б).

Таким образом, в случаях 1.а) и 1.б) при $|\lambda|\gg 1$ будем иметь оценку сверху вида

$$|\Delta_{ij}(\lambda)|\leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k+1}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+2}^{n}\varkappa_{\sigma 1}}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\right|. \tag{20}$$

В случаях 1.в) и 1.г) аналогичным способом получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)|\leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma 0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\right|. \tag{21}$$

Пусть теперь $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Вынося множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma 0}}$ в (19) из строк с номерами от 1 до $i-1$ и от $i+1$ до n, а также вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$ из первых k столбцов, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_{\sigma 0} - \varkappa_{i0}} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=1}^{k} \omega_\nu} D_{ij}.$$

Разложим определитель D_{ij} в сумму по последним $n-k-1$ столбцам. Выделим главную часть. Вид главной части зависит от того, как соотносятся величины i, $n-k+1$ и s_γ. Так как ввиду (7) справедливы неравенства $s_\gamma \leqslant n-k < s_{\gamma+1}$, то возможны только следующие случаи:

2.а) $1 \leqslant i < n-k+1 \leqslant s_{\gamma+1}$; 2.б) $s_\gamma + 1 \leqslant n-k < s_{\gamma+1}, \quad n-k+1 \leqslant i \leqslant n$;
2.в) $s_\gamma = n-k, \quad n-k+1 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, случай 2.а). В этом случае главная часть D_{ij} — это слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k-1$ столбцов на алгебраические дополнения k-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых k столбцах и в любых k строках с номерами от $s_\gamma + 1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1} - (n-k))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2} - s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1} - s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=n-k+1}^{n} \chi_\sigma.$$

Сворачивая затем только главные члены опять в определитель, получим:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_{\sigma 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n} (\varkappa_{\sigma 1} - \varkappa_{\sigma 0})} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=1}^{k} \omega_\nu} [A_{ij}].$$

Таким образом, в случае 2.а) при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь оценку сверху вида

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k} \varkappa_{\sigma 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n} \varkappa_{\sigma 1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=1}^{k} \omega_\nu} \right|. \tag{22}$$

В случаях 2.б) и 2.в) аналогичным способом получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k-1} \varkappa_{\sigma 0} + \sum\limits_{\sigma=n-k}^{n} \varkappa_{\sigma 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=1}^{k} \omega_\nu} \right|. \tag{23}$$

Используя оценки (20), (22) в (18), получим при $1 \leqslant i \leqslant n-k$

$$\Delta_i(\lambda) = O\Bigg(|\lambda|^{n-1+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k} \varkappa_{\sigma 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n} \varkappa_{\sigma 1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=1}^{k} \omega_\nu} \right| \times$$
$$\times \left(|\lambda|^{-\chi_{n-k+1}} \sum_{j=1}^{k} \left| \int_0^1 h_n(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\, d\xi \right| + \sum_{j=k+1}^{n} \left| \int_0^1 h_n(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j \xi}[1]\, d\xi \right| \right) \Bigg). \tag{24}$$

Оценим интеграл $\int_0^1 h_n(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\, d\xi$ при $j = \overline{1,k}$. Положим $\lambda = re^{i\varphi}$ и пусть $\varphi \in [0, \pi/2 - \varepsilon]$ (в случае $\varphi \in [-\pi/2 + \varepsilon, 0]$ рассуждения проводятся аналогично). Используя неравенство Коши – Буняковского, получим при $j = \overline{1,k}$

$$\left| \int_0^1 h_n(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\, d\xi \right| \leqslant \int_0^1 |h_n(\xi,\lambda)| e^{r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\, d\xi \leqslant \left(\int_0^1 |h_n(\xi,\lambda)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int_0^1 e^{r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{1}{|\lambda|^{n-\sigma}} \|h_\sigma\|_{L_2[0,1]} \frac{1}{\sqrt{r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1}} \left(1 - e^{-r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{25}$$

Аналогично при $j = \overline{k+1,n}$

$$\left| \int_0^1 h_n(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j \xi}[1]\, d\xi \right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{26}$$

Таким образом, из (24)–(26) получим при $1 \leqslant i \leqslant n-k$ (при $k=0$ здесь полагается $\chi_{n-k+1}=0$)

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma 0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \qquad (27)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, из (18), (20), (21), (23) получим при $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ (при $k=n$ здесь полагается $\chi_{n-k}=0$)

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma 0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{i1}+[\chi_{n-k}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \qquad (28)$$

Так как в случае $1 \leqslant i \leqslant n-k$ при условии $\chi_{n-k+1} \geqslant 0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0}+$ $+[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_{i0}$, а при условии $\chi_{n-k+1}<0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_{i1}$, то при $1 \leqslant i \leqslant n-k$ в целом получим:

$$-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_i. \qquad (29)$$

Аналогично, при $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ получим неравенства

$$-\varkappa_{i1}+[\chi_{n-k}]_+ \leqslant -\varkappa_i. \qquad (30)$$

Таким образом, из (13), (17), (27)–(30) получим оценку (14) в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$ при условии $A \neq 0$.

Пусть теперь $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$. Если сделать замену $\hat\lambda=-\lambda$, обозначить $\hat k = n-k$, $\hat\gamma=\delta$, $\hat\omega_j=\omega_{k+j}$ при $j=\overline{1,\hat k}$, $\hat\omega_j=\omega_{j-\hat k}$ при $j=\overline{\hat k+1,n}$, $\hat a_{i,\hat k+1}=a_{11}$, ..., $\hat a_{in}=a_{1k}$; $\hat b_{i1}=b_{i,k+1}$, ..., $\hat b_{i,\hat k}=b_{in}$ и воспользоваться для параметров с крышками уже полученным неравенством (14) для $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$, а затем вернуться от параметров с крышками к прежним параметрам, то получим оценку (14) и в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda| \gg 1$ при условии $B \neq 0$.

Таким образом, лемма 1 полностью доказана. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ

Пусть $\bar h := (\bar h_1, \dots \bar h_n)^T \in L_2^n[0,1]$ и ортогональна всем производным n-цепочкам (10). Тогда в силу (11)–(13) все особенности мероморфных функций $\tilde\Theta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, устранимы и они являются целыми функциями. Согласно оценкам (14) и принципу Фрагмена – Линделефа функции $\tilde\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $n-2-\varkappa_i$ при $n-2-\varkappa_i \geqslant 0$, которые можно записать в виде

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{n-2-\varkappa_i}\left(\bar h, \zeta_{i0}\right)+\lambda^{n-3-\varkappa_i}\left(\bar h, \zeta_{i1}\right)+\dots+\left(\bar h, \zeta_{i,n-2-\varkappa_i}\right),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2[0,1]$ есть вполне определенные вектор-функции, а при $n-2-\varkappa_i<0$ справедливы тождества

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае $n-2-\varkappa_i \geqslant 0$ в дефектном подпространстве производных n-цепочек выберем подпространство H, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{i\nu}$, $\nu=\overline{0,n-2-\varkappa_i}$, $i=\overline{1,n}$. Очевидно,

$$\dim H \leqslant \sum_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+.$$

Пусть теперь $\bar h \in H$. Тогда $\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, и, следовательно, в силу (12)

$$\tilde\Delta_i(\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}\tilde\Phi_i(x,\lambda)h_j(x)\,dx \equiv 0, \qquad i=\overline{1,n}. \qquad (31)$$

Так как в силу утверждения 1 система функций $\tilde\Phi_1$, ..., $\tilde\Phi_n$ является системой линейно-независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, то из (31) следует тождество

$$\int_0^1 y(x,\lambda)\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}h_j(x)\,dx \equiv 0 \qquad (32)$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\ell_0^*(z,\lambda) = \sum_{j=n}^{n} h_j(x)\lambda^{j-1}, \qquad z(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0, \tag{33}$$

где $\ell_0^*(z,\lambda)$ есть сопряженное, по Лагранжу, д. в. к $\ell_0(y,\lambda)$.

Известно, что решение задачи (33) есть целая функция по λ, для которой имеет место следующее представление при $|\lambda| \gg 1$:

$$z(x,\lambda) = \int_0^x \sum_{j=1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi,$$

где

$$z_i(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} [\Omega_i] \, e^{-\lambda\omega_i x}, \qquad i = \overline{1,n},$$

есть решения уравнения $\ell_0^*(z,\lambda) = 0$.

В секторе $\lambda \in \Pi_0^+$ имеем:

$$z(x,\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi +$$

$$+ \int_0^x \sum_{j=1}^{k} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi - \int_x^1 \sum_{j=k+1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi.$$

Отсюда из (32) и (5) получим при $\lambda \in \Pi_0^+$ оценку $|z(x,\lambda)| \leqslant C$. Рассуждая аналогично, получим такую же оценку и при $\lambda \in \Pi_0^-$. Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $z(x,\lambda) \equiv C$. Отсюда в силу нулевых начальных условий задачи (33) следует, что $z(x,\lambda) \equiv 0$, а тогда из дифференциального уравнения (33) получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1,n}$, для п.в. $x \in [0,1]$.

Следовательно, система к. ф. рассматриваемого пучка n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превосходящим числа $\sum\limits_{i=1}^{n} [n-1-\varkappa_i]_+$.

В случае, когда $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, дефект системы к. ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок можно линеаризовать в пространстве $L_2^n[0,1]$ и справедливо утверждение [11, лемма 2.1, с. 49].

Теорема 1 полностью доказана. □

В заключение отметим, что постановка задачи, рассмотрение случая $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ в лемме 1 и в теореме 1 принадлежат В. С. Рыхлову. Случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ был рассмотрен О. В. Блинковой.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.

3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

4. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.

5. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

6. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сб. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.

7. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operatorbüschel // Math. Z. 1984. Vol. 188, № 1. P. 55–68.

8. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.

9. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. Семин. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

10. *Гасымов М. Г., Магеррамов А. М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН АзССР. 1974. Т. 30, № 12. С. 9–12.

11. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д. : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

12. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.

13. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 24–34.

14. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 45–58.

15. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на прямой // Спектральные и эволюционные задачи : Тр. XXIII Междунар. конф. «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (КРОМШ-2012). Симферополь : Таврический нац. ун-т им. В. В. Вернадского. 2013. Т. 23. С. 134–142.

On Multiple Completeness of the Root Functions of a Certain Class of Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

V. S. Rykhlov[1], O. V. Blinkova[2]

[1]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, RykhlovVS@yandex.ru
[2]Saratov State Academy of Law, 104, Chernyshevskogo str., Saratov, 410056, Russia, Oksana_Parfilova@mail.ru

We consider the class of pencils of ordinary differential operators of n-th order with constant coefficients. It is assumed that the roots of the characteristic equation of pencils from this class are simple, non-zero and lie on the same straight line passing through the origin. Sufficient conditions for n-fold completeness of the system of root functions of the pencils from this class in the space of summable with square functions on the main segment are formulated.

Key words: pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (*project no.* 1.1520.2014K).

References

1. Keldysh M. V. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russ. Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 4, pp. 15–41 (in Russian). DOI: 10.1070/RM1971v026n04ABEH003985.

2. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 526 p. (in Russian).

3. Keldysh M. V. O sobstvennykh znacheniiakh i sobstvennykh funktsiiakh nekotorykh klassov nesamosopriazhennykh uravnenii [On Eigenvalues and Eigenfunctions of Some Classes of Nonselfadjoint Equations]. *Dokl. AN SSSR*, 1951, vol. 77, no. 1, pp. 11–14. (in Russian).

4. Khromov A. P. *Konechnomernye vozmushcheniia vol'terrovykh operatorov*. Diss. d-ra fiz.-mat. nauk [Khromov A. P. *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators* : Dr. phys. and mat. sci. diss]. Novosibirsk, 1973. 242 p. (in Russian).

5. Shkalikov A. A. On completenes of eigenfunctions and associated function of an ordinary differential operator with separated irregular boundary conditions. *Funct. Anal. Appl.*, 1976, vol. 10, no. 4, pp. 305–316 (in Russian). DOI: 10.1007/BF01076030.

6. Khromov A. P. On generating functions of Volterra operators. *Math. USSR-Sb.*, 1977, vol. 31, no. 3, pp. 409–423. DOI: 10.1070/SM1977v031n03ABEH002311.

7. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operatorbüschel. *Math. Z.*. 1984, vol. 188, no. 1, pp. 55–68.

8. Tikhomirov S. A. *Konechnomernye vozmushcheniia integral'nykh vol'terrovykh operatorov v prostranstve vektor-funktsii* : Diss. kand. fiz.-math. nauk [Tikhomirov S. A. *Finite-dimensional perturbations of Volterra integral operators in the space of vector-functions* : Cand. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 1987. 126 p.(in Russian).

9. Shkalikov A. A.. Boundary value problems for ordinary

differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311—1342.

10. Gasymov M. G., Magerramov A. M. O kratnoi polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii odnogo klassa differentsial'nykh operatorov [On fold-completeness of a system of eigenfunctions and associated functions of a class of differential operators]. *Dokl. AN AzSSR*, 1974, vol. 30, no. 12, pp. 9–12 (in Russian).

11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov on Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).

12. Rykhlov V. S. Completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients. *Russ. Math.*, 2009, vol. 53, no. 6, pp. 33–43. DOI: 10.3103/S1066369X09060061.

13. Rykhlov V. S. On multiple completeness of the root functions for a class of the pencils of differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 24–34 (in Russian).

14. Rykhlov V. S., Parfilova O. V. On multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators with constant coefficients.*Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 45–58 (in Russian).

15. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators, the roots of the characteristic equation of which lie on a straight line [Kratnaia polnota kornevykh funktsii puchkov differentsial'nykh operatorov, korni kharakteristicheskogo uravneniia kotorykh lezhat na priamoi]. *Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Twenty-Third Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (CROMSH-2012)*. Simferopol, Tavricheskii nats. un-t im. V. V. Vernadskogo, 2013, vol. 23, pp. 134—142 (in Russian).

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. В. Светлов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, a.v.svetlov@gmail.com

Работа посвящена исследованию структуры спектра оператора Шредингера на весовом квазимодельном многообразии с концом, представимым искривленным произведением специального вида. Получен критерий дискретности спектра в терминах поведения коэффициентов метрики многообразия и потенциала исследуемого оператора. В заключении сделаны замечания о следствиях из данного результата и его возможном обобщении на более сложные квазимодельные многообразия.

Ключевые слова: дискретность спектра, оператор Шредингера, римановы многообразия, квазимодельные многообразия, искривленные произведения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что структура спектра оператора Лапласа – Бельтрами на римановом многообразии зависит от геометрии многообразия. Характер зависимости различных свойств спектра в различных условиях исследуется множеством авторов, начиная с последней четверти прошлого века (см., например, [1–5]). При этом свойства спектра оператора Шредингера, очевидно, зависят не только от геометрии многообразия, но и от поведения потенциала. Поэтому их исследование является более сложной задачей даже в случае $\mathbf{R}^n$. Результатов относительно структуры спектра оператора Шредингера на римановых многообразиях в несколько раз меньше, чем для лапласиана. В частности, можно отметить публикации [6–8]. Во всех этих работах накладываются разные условия на геометрию многообразия, но основным результатом в них являются утверждения о дискретности спектра оператора Шредингера при определенном поведении потенциала на бесконечности. В этом смысле процитированные исследования наиболее близки к представляемому в данной статье. Наиболее существенным отличием является класс изучаемых многообразий и методы работы с ним.

А именно мы рассматриваем полное риманово многообразие M, представимое в виде $B \cup D$, где B — компактное многообразие, а конец D изометричен произведению $\mathbf{I} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{I} = (r_0, d)$ — конечный или бесконечный интервал, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = q_0^2(r)dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

© Светлов А. В., 2014