differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311—1342.
10. Gasymov M. G., Magerramov A. M. O kratnoi polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii odnogo klassa differentsial'nykh operatorov [On fold-completeness of a system of eigenfunctions and associated functions of a class of differential operators]. *Dokl. AN AzSSR*, 1974, vol. 30, no. 12, pp. 9–12 (in Russian).
11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov on Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).
12. Rykhlov V. S. Completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients. *Russ. Math.*, 2009, vol. 53, no. 6, pp. 33–43. DOI: 10.3103/S1066369X09060061.
13. Rykhlov V. S. On multiple completeness of the root functions for a class of the pencils of differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 24–34 (in Russian).
14. Rykhlov V. S., Parfilova O. V. On multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators with constant coefficients.*Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 45–58 (in Russian).
15. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators, the roots of the characteristic equation of which lie on a straight line [Kratnaia polnota kornevykh funktsii puchkov differentsial'nykh operatorov, korni kharakteristicheskogo uravneniia kotorykh lezhat na priamoi]. *Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Twenty-Third Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (CROMSH-2012)*. Simferopol, Tavricheskii nats. un-t im. V. V. Vernadskogo, 2013, vol. 23, pp. 134—142 (in Russian).

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. В. Светлов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, a.v.svetlov@gmail.com

Работа посвящена исследованию структуры спектра оператора Шредингера на весовом квазимодельном многообразии с концом, представимым искривленным произведением специального вида. Получен критерий дискретности спектра в терминах поведения коэффициентов метрики многообразия и потенциала исследуемого оператора. В заключении сделаны замечания о следствиях из данного результата и его возможном обобщении на более сложные квазимодельные многообразия.

Ключевые слова: дискретность спектра, оператор Шредингера, римановы многообразия, квазимодельные многообразия, искривленные произведения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что структура спектра оператора Лапласа – Бельтрами на римановом многообразии зависит от геометрии многообразия. Характер зависимости различных свойств спектра в различных условиях исследуется множеством авторов, начиная с последней четверти прошлого века (см., например, [1–5]). При этом свойства спектра оператора Шредингера, очевидно, зависят не только от геометрии многообразия, но и от поведения потенциала. Поэтому их исследование является более сложной задачей даже в случае $\mathbf{R}^n$. Результатов относительно структуры спектра оператора Шредингера на римановых многообразиях в несколько раз меньше, чем для лапласиана. В частности, можно отметить публикации [6–8]. Во всех этих работах накладываются разные условия на геометрию многообразия, но основным результатом в них являются утверждения о дискретности спектра оператора Шредингера при определенном поведении потенциала на бесконечности. В этом смысле процитированные исследования наиболее близки к представляемому в данной статье. Наиболее существенным отличием является класс изучаемых многообразий и методы работы с ним.

А именно мы рассматриваем полное риманово многообразие M, представимое в виде $B \cup D$, где B — компактное многообразие, а конец D изометричен произведению $\mathbf{I} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{I} = (r_0, d)$ — конечный или бесконечный интервал, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = q_0^2(r)dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — C^1–гладкие положительные на $\mathbf{I}$ функции, причем $q_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{r_0}^{d} q_0(r)dr = +\infty$$

для обеспечения полноты многообразия D. Считаем, что размерность $\dim \mathrm{S}_i = n_i$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А. Г. Лосевым, Е. А. Мазепой, С. А. Корольковым (см., например, [9–11]) и другими авторами.

Далее, будем полагать, что на M задана борелева мера μ, не обязательно совпадающая с римановым объемом. Считаем, что мера μ имеет плотность

$$\sigma(r, \theta_1, \dots, \theta_k) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_k(\theta_k).$$

Рассмотрим на многообразии (M, μ) оператор Шредингера

$$-L_\mu = -\mathrm{div}_\mu \nabla + c(r).$$

Для полуограниченности оператора $-L_\mu$ будем считать, что существует некоторая $K = \mathrm{const}$, такая что $c(r) \geq -K$. Кроме того, потребуем, чтобы функция $c(r)$ была абсолютно интегрируемой на любом (конечном) интервале из $\mathbf{I}$.

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности, т. е. его непрерывный спектр пуст.

Обозначим $s(r) = \tau(r)q_1^{n_1}(r)\dots q_k^{n_k}(r)$ и

$$F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Если $F(r) > -C \quad (C = \mathrm{const} > 0)$, то для дискретности спектра оператора Шредингера $-L_\mu$ на многообразии (M, μ) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to d} \int\limits_{r(\rho)}^{r(\rho+\omega)} q_0(t)F(t)dt = +\infty,$$

где функция $r(\rho)$ определяется из соотношения $\rho(r) = \int\limits_{r_0}^{r} q_0(t)dt$.

Отметим, что структура данного утверждения повторяет известный критерий дискретности спектра А. М. Молчанова и, по сути, теорема 1 является обобщением данного критерия на случай квазимодельных многообразий. Более того, идея доказательства этого утверждения состоит в построении оператора Штурма – Лиувилля, дискретность спектра которого эквивалентна дискретности спектра исследуемого оператора Шредингера, благодаря чему становится возможным применение критерия А. М. Молчанова для завершения доказательства.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Напомним сначала, что на гладком римановом многообразии X размерности n оператор Лапласа – Бельтрами имеет вид

$$-\Delta = -\mathrm{div}\,\nabla = -\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

где $\|g_{ij}\|$ — риманов метрический тензор на X, g^{ij} — компоненты $\|g_{ij}\|^{-1}$, а $G = \det\|g_{ij}\|$. Однако нас будет интересовать случай, когда на X задана некоторая борелева мера μ, не обязательно совпадающая с римановым объемом. Будем предполагать, что μ имеет плотность $\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — гладкая положительная функция. (Очевидно, что если μ — риманов объем на X, то $\sigma(x) \equiv 1$.) Пару

(X,μ) называют весовым многообразием. Так как дивергенция — это оператор, сопряженный к градиенту относительно меры многообразия, на весовом многообразии очевидным образом изменяется представление оператора Лапласа – Бельтрами (см., например, [12]):

$$-\Delta_\mu = -\mathrm{div}_\mu \nabla = -\frac{1}{\sigma(x)\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(x)\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Теперь рассмотрим риманово многообразие Z, изометричное произведению $X \times Y$ (где X — произвольное многообразие размерности n, а Y — компактное многообразие размерности m) с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \gamma^2(x) dy^2,$$

где $\gamma(x)$ — гладкая положительная функция, dx^2 и dy^2 — метрики на X и Y соответственно.

Пусть μ теперь — борелева мера на многообразии Z с плотностью $\sigma(z) = \tau(x)\eta(y)$, и $\sigma(z)$ — гладкая положительная функция. Непосредственным вычислением оператора Шредингера

$$-L_\mu = -\Delta_\mu + c(x)$$

на многообразии (Z,μ) может быть получено следующее утверждение (см. [13]).

Лемма. *Оператор Шредингера на многообразии (Z,μ) имеет вид*

$$-L_\mu = A_0 + \gamma^{-2}(-\Delta_\eta) + c(x) = B + \gamma^{-2}(-\Delta_\eta),$$

где A_0 и B — операторы Лапласа – Бельтрами и Шредингера на многообразии X с весовой функцией $\gamma^m(x)\tau(x)$ соответственно, а $-\Delta_\eta$ — лапласиан на многообразии Y с мерой плотности $\eta(y)$.

Далее, следуя [2, 14] и др., говоря о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора, мы имеем в виду спектр замыкания. Слова «спектр оператора» на самом деле относятся к спектру расширения по Фридрихсу этого оператора (см., например, [14]).

Сформулируем теперь критерий дискретности спектра оператора Шредингера на многообразии Z. При этом обозначим через ν меру с весовой функцией $\gamma^m(x)\tau(x)$ на многообразии X.

Теорема 2. *Оператор Шредингера на многообразии (Z,μ) имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда спектр оператора Шредингера на многообразии (X,ν) дискретен.*

Доказательство данной теоремы приведено в [13], однако отметим, что использованный метод предложил A. Baider в [2].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Вернемся теперь к многообразию M, описанному во введении. Напомним, что на нем задана борелева мера μ с плотностью

$$\sigma(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\ldots\eta_k(\theta_k).$$

Из принципа декомпозиции [15] следует, что спектр оператора Шредингера на многообразии дискретен тогда и только тогда, когда он дискретен вне любого компакта на этом многообразии. Дискретность спектра на многообразии $M = B \cup D$ равносильна дискретности спектра на многообразии D.

Произведем на многообразии D замену переменной, положив $\rho = \int\limits_{r_0}^{r} q_0(t)dt$. Тогда эта переменная ρ изменяется на $\mathbf{R}_+$, в силу полноты многообразия D, а многообразия S_i остаются неизменными. Кроме того, положим $c(r(\rho)) = \tilde{c}(\rho)$, $\tau(r(\rho)) = \tilde{\tau}(\rho)$, $q_i(r(\rho)) = \tilde{q}_i(\rho)$, $i = 1,\ldots,k$.

Рассмотрим многообразия $X = \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_{k-1}$ и $Y = \mathrm{S}_k$, и пусть $Z = X \times Y$ с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \tilde{q}_k^2(\rho) dy^2$$

и борелевой мерой $\tau_1(x)\eta_k(\theta_k)$, где

$$\tau_1(x) = \tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\ldots\eta_{k-1}(\theta_{k-1});$$

т. е. Z совпадает с многообразием, полученным из D заменой переменной. По теореме 2 оператор Шредингера на многообразии Z имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора Шредингера на многообразии X с весовой функцией

$$\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_1(x) = \tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-1}(\theta_{k-1}).$$

Далее, пусть многообразие $X_1 = \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_{k-2}$, а многообразие $Y_1 = \mathrm{S}_{k-1}$, и рассмотрим многообразие $Z_1 = X_1 \times Y_1$ с метрикой

$$dz_1^2 = dx_1^2 + \tilde{q}_{k-1}^2(\rho)dy_1^2$$

и весовой функцией $\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_2(x_1)\eta_{k-1}(\theta_{k-1})$, где $\tau_2(x_1) = \tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-2}(\theta_{k-2})$; т. е. оператор Шредингера на многообразии Z_1 совпадает с оператором, дискретность спектра которого мы исследуем. Снова применяя теорему 2, получаем, что оператор Шредингера на многообразии X с указанным весом имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора Шредингера на многообразии X_1 с весовой функцией

$$\tilde{q}_{k-1}^{n_{k-1}}(\rho)\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_2(x_1) = \tilde{q}_{k-1}^{n_{k-1}}(\rho)\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-2}(\theta_{k-2}).$$

Повторяя этот процесс еще $k-2$ раза, в итоге получим, что дискретность спектра оператора Шредингера на многообразии D эквивалентна дискретности спектра оператора Штурма – Лиувилля на $\mathbf{R}_+$ с весом $\tilde{\tau}(\rho)\tilde{q}_1^{n_1}(\rho)\dots\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)$.

Введем обозначение $\tilde{s}(\rho) = \tilde{\tau}(\rho)\tilde{q}_1^{n_1}(\rho)\dots\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)$, тогда полученный оператор можно записать в виде

$$B = \tilde{s}^{-1}(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\tilde{s}(\rho)\frac{d}{d\rho}\right) + \tilde{c}(\rho).$$

После преобразования получаем:

$$Bu = -u''(\rho) - \frac{\tilde{s}'(\rho)}{\tilde{s}(\rho)}u'(\rho) + \tilde{c}(\rho)u(\rho).$$

Сделаем замену переменных $\zeta(\rho) = \tilde{s}^{\frac{1}{2}}(\rho)u(\rho)$, т. е. $u = \tilde{s}^{-\frac{1}{2}}(\rho)\zeta(\rho)$. Тогда

$$u' = \zeta'\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta,$$

$$u'' = \zeta''\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta' - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta' + \frac{3}{4}\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2\zeta - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}''\zeta.$$

Подставляя в выражение для оператора B, получаем

$$Bu = -\zeta''\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} + \zeta'\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}' - \frac{3}{4}\zeta\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2 + \frac{1}{2}\zeta\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'' - \zeta'\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}' + \frac{1}{2}\zeta\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2 + \zeta\tilde{c}\tilde{s}^{-\frac{1}{2}},$$

$$B_0\zeta = \tilde{s}^{\frac{1}{2}}Bu = -\zeta'' - \zeta\left(\frac{\tilde{s}'^2}{4\tilde{s}^2} - \frac{\tilde{s}''}{2\tilde{s}} - \tilde{c}\right).$$

Далее обозначим

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{c}(\rho) + \frac{\tilde{s}''}{2\tilde{s}} - \frac{\tilde{s}'^2}{4\tilde{s}^2} = \tilde{c}(\rho) + \left(\frac{\tilde{s}'(\rho)}{2\tilde{s}(\rho)}\right)' + \left(\frac{\tilde{s}'(\rho)}{2\tilde{s}(\rho)}\right)^2,$$

и, таким образом, получаем оператор

$$B_0 = -\frac{d^2}{d\rho^2} + \tilde{F}(\rho).$$

Поскольку функция $\tilde{F}(\rho)$ локально интегрируема (в силу условий, наложенных на $\tilde{c}(\rho)$ и $\tilde{s}(\rho)$), то к последнему оператору применим критерий дискретности спектра А. М. Молчанова [16]. Получаем, что если функция $\tilde{F}(\rho)$ ограничена снизу, то спектр этого оператора, а, следовательно, и спектр исследуемого оператора Шредингера $-L_\mu$ на многообразии M, дискретен тогда и только тогда, когда среднее значение функции $\tilde{F}(\rho)$ на бесконечности стремится к бесконечности, т. е.

$$\forall\ \omega > 0 \quad \lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{\rho}^{\rho+\omega}\tilde{F}(p)dp = +\infty.$$

Вернемся к исходной переменной r, сделав замену $p = \int\limits_{r_0}^{t} q_0(t)dt$. С учетом введенного перед теоремой обозначения $F(r)$ переписываем последнее условие в виде

$$\lim_{r\to d} \int\limits_{r(\rho)}^{r(\rho+\omega)} q_0(t)F(t)dt = +\infty,$$

что и доказывает данную теорему.

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим, что теорема, представленная в докладе [17], является простым следствием из доказанной теоремы 1 для случая многообразия M, борелева мера на котором совпадает с римановым объемом, т. е. $\sigma(r,\theta) = \tau(r) \equiv 1$.

Далее, нетрудно видеть, что в случае обычного весового искривленного произведения порядка k, т. е. $d = +\infty$, $q_0(r) = 1$, из теоремы 1 следует основной результат [8], а в случае невесового искривленного произведения — основной результат [4].

Кроме того, аналогично может быть рассмотрено квазимодельное многообразие M более общего вида, т. е. многообразие, представимое в виде объединения $B \cup D_1 \cup \dots \cup D_p$, где B — некоторый компакт, а концы D_i — простые искривленные произведения, аналогичные описанному выше многообразию D. Тогда из доказательства теоремы 1 нетрудно получить критерий дискретности спектра оператора Шредингера на квазимодельном многообразии — достаточно лишь потребовать выполнения условий этой теоремы на каждом конце D_i.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-97038-р_поволжье_а).

Библиографический список

1. *Pinsky M.* The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I // J. Diff. Geom. 1978. Vol. 13. P. 87–91.
2. *Baider A.* Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra // J. Diff. Geom. 1979. Vol. 14. P. 41–57.
3. *Brooks R.* A relation between growth and the spectrum of the Laplacian // Math. Z. 1981. Vol. 178. P. 501–508. DOI: 10.1007/BF01174771
4. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа – Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.
5. *Harmer M.* Discreteness of the spectrum of the Laplacian and stochastic incompleteness // J. Geom. Anal. 2009. Vol. 19(2). P. 358–372. DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6
6. *Kondratev V., Shubin M.* Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry // Operator theory : Advances and Applications. 1999. Vol. 110. P. 185–226. DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12
7. *Shen Z.* The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131, № 11. P. 3447–3456. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5
8. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // Intern. J. Pure Appl. Math. 2013. Vol. 89, № 3. P. 393–400. DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10
9. *Losev A. G.* On some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds // Siberian Math. J. 1998. Vol. 39, № 1. P. 74–80. DOI: 10.1007/BF02732362.
10. *Losev A. G., Mazepa E. A.* Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products // St. Petersburg Math. J. 2001. Vol. 13, № 1. P. 57–73.
11. *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Mathematische Zeitschrift. 2012. Vol. 272(1–2). P. 459–472. DOI: 10.1007/s00209-011-0943-2.
12. *Grigor'yan A. A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36. P. 135–249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4.
13. *Светлов А. В.* Спектр оператора Шреденгера на скрещенных произведениях // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. 2002. Вып. 7. С. 12–19.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики : в 4 т. Т. 1. Функциональный анализ. М. : Мир, 1977. 360с.
15. *Schechter M.* Spectra of partial differential operators. Amsterdam : North-Holland, 1971. 295 p.
16. *Молчанов А. М.* Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. № 2. С. 169–199.
17. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Шредингера на многообразиях специального вида // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 245–247.

On Spectrum of Schrödinger Operator on Manifold of a Special Type

A. V. Svetlov

Volgograd State University, 100, pr. Universitetsky, Volgograd, 400062, Russia, a.v.svetlov@gmail.com

The main subject of the paper is spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifold with an end, which is warped product of a special type. We prove the criterion of discreteness for the spectrum of the operator in terms of metric coefficients and potential of the operator. As the conclusion we made some remarks on the corollaries of the proved theorem and on its extension to more complex quasimodel manifolds.

Key words: spectrum discreteness, Schrödinger operator, Riemannian manifolds, quasimodel manifolds, warped products.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-97038-р_поволжье_а).

References

1. Pinsky M. The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I. *J. Diff. Geom.*, 1978, vol. 13, pp. 87–91.

2. Baider A. Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra. *J. Diff. Geom.*, 1979, vol. 14, pp. 41–57.

3. Brooks R. A relation between growth and the spectrum of the Laplacian. *Math. Z.*, 1981, vol. 178, pp. 501–508. DOI: 10.1007/BF01174771.

4. Svetlov A. V. A discreteness criterion for the spectrum of the Laplace–Beltrami operator on quasimodel manifolds. *Siberian Math. J.*, 2002, vol. 43(6), pp. 1103–1111. DOI: 10.1023/A:1021129703899.

5. Harmer M. Discreteness of the spectrum of the Laplacian and stochastic incompleteness. *J. Geom. Anal.*, 2009, vol. 19(2), pp. 358–372. DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6.

6. Kondratev V., Shubin M. Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry. *Operator theory : Advances and Applications*, 1999, vol. 110, pp. 185–226. DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12.

7. Shen Z. The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 11, pp. 3447–3456. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5.

8. Svetlov A. V. Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds. *Intern. J. Pure and Appl. Math.*, 2013, vol. 89, no. 3, pp. 393–400. DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10.

9. Losev A. G. On some Liouville theorems on non-compact Riemannian manifolds. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 74–80. DOI: 10.1007/BF02732362.

10. Losev A. G., Mazepa E. A. Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products. *St. Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 13, no. 1, pp. 57–73.

11. Korolkov S. A., Losev A. G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends. *Mathematische Zeitschrift*, 2012, vol. 272(1–2), pp. 459–472. DOI: 10.1007/s00209-011-0943-2.

12. Grigor'yan A. A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135–249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4

13. Svetlov A. V. Spektr operatora Shredengera na skreshchennykh proizvedeniiakh [The spectrum of the Schrodinger operator on the warped products]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika*, 2002, iss. 7, pp. 12–19 (in Russian).

14. Reed M. C., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis*. Vol. 1. London, Academic Press, 1980, 325 p.

15. Schechter M. *Spectra of partial differential operators*. Amsterdam, North-Holland, 1971, 310p.

16. Molchanov A. M. Ob usloviiakh diskretnosti spektra samosopriazhennykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poriadka [On conditions for discreteness of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order], *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1953, no. 2, pp. 169–199 (in Russian).

17. Svetlov A. V. Kriterii diskretnosti spektra operatora Shredingera na mnogoobraziiakh spetsial'nogo vida [Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on manifolds of a special kind]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : Materialy 17-i mezhdunar. Saratovskoi zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and its applications : texts of 17th Intern. Saratov Winter School], Saratov, 2014. p. 245–247 (in Russian).