УДК 513.51

О НОРМАХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

К. А. Смотрицкий[1], **Е. В. Дирвук**[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики, Гродненский государсвенный университет им. Янки Купалы, Беларусь, k_smotritski@mail.ru

[2]Аспирант кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики, Гродненский государсвенный университет им. Янки Купалы, Беларусь, dirvuk@gmail.com

Объектом исследования данной работы являются интерполяционные рациональные функции Лагранжа. Цель исследования — изучение аппроксимационных свойств указанных функций в пространстве квадратично-суммируемых функций. Во введении указана актуальность темы исследования, приведены ссылки на некоторые работы, связанные с данной статьей. Описано построение аппарата приближения — интерполяционных рациональных функций Лагранжа. В основной части работы вычислена норма интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций. Это позволило оценить погрешность приближения произвольной функции посредством интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств интерполяционных рациональных функций и приближений ими в различных функциональных пространствах.

Ключевые слова: интерполяционная рациональная функция Лагранжа, норма интерполяционного оператора, приближение в пространстве квадратично-суммируемых функций.

ВВЕДЕНИЕ

Использование интерполяционных функций в качестве аппарата приближения является одним из классических методов теории рациональной аппроксимации, как со свободными, так и с фиксированными полюсами. При этом, как следует из неравенства Лебега, исследование существенным образом опирается на норму соответствующего оператора. Следует отметить, что задача о вычислении нормы интерполяционных рациональных операторов, действующих из $C[-1,1]$ в $C[-1,1]$, в случае фиксированных полюсов до настоящего времени не решена. В связи с этим возникает вопрос об аппроксимации в других пространствах.

Ранее авторами были решены задачи о сходимости в среднем соответствующих процессов в случае интерполяции на отрезке с узлами в нулях косинус и синус-дробей Чебышева – Маркова (см., например, [1]) и в случае интерполяции на всей вещественной оси с узлами в нулях косинус и синус-дробей Бернштейна (см. [2]). В настоящей работе исследуются свойства интерполяционных рациональных процессов на отрезке $[-1,1]$ с узлами в нулях специальных функций, обобщающих многочлены Якоби с весом $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — последовательность комплексных чисел таких, что $a_n = 0$, $|a_k| < 1$, $k = 1,\dots,n$, причем если $\operatorname{Im} a_k \neq 0$, то эта последовательность содержит и число $\overline{a_k}$.

Рациональная функция $Q_n(x)$ определена следующим образом (см. [3]):

$$Q_n(x) = \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{\sqrt{1-x}}\,,$$

где

$$\mu_{n+1/2}(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + \sum_{k=1}^{n} \arccos\frac{x+a_k}{1+a_k x}\,, \qquad \lambda_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}\,.$$

Рациональная функция $Q_n(x)$ имеет n простых вещественных нулей на интервале $(-1,1)$. Занумеруем их для удобства в следующем порядке:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < 1, \qquad N_n(x_k) = 0, \qquad \mu_n(x_k) = k\pi, \qquad k = 1,\dots,n.$$

Для произвольной функции $f \in C[-1,1]$ составим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$L_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) Q_n(x) \sqrt{1+x_k}}{\lambda_{n+1/2}(x)(x - x_k)} \,. \tag{1}$$

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Для рассматриваемой интерполяционной функции Лагранжа (1) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной функции $f \in C[-1;1]$ имеет место соотношение*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{L_n^2(x; f)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)} \,. \tag{2}$$

Доказательство. Используя равенство (1), получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{|L_n(x; f)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) Q_n(x) \sqrt{1+x_k}}{\lambda_{n+1/2}(x)(x-x_k)} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)(1+x_k)}{\lambda^2_{n+1/2}(x_k)} I_k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) f(x_l) \sqrt{1+x_k}\sqrt{1+x_l}}{\lambda_{n+1/2}(x_k)\lambda_{n+1/2}(x_l)} I_{kl} \,, \tag{3}$$

где

$$I_k = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{(1-x)(x-x_k)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \,, \qquad I_{kl} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{(1-x)(x-x_k)(x-x_l)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \,.$$

Вычислим интегралы $I_k, k = 1, \ldots, n$. Сделаем замену $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Известно, что

$$\sin \mu_n \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = (-1)^n \sin \Phi_n(y),$$

— синус-дробь Бернштейна с нулями в точках $\pm y_k$, $y_k = \sqrt{(1-x_k)/(1+x_k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Отсюда получим, что интегралы $I_k, k = 1, \ldots, n$ равны

$$I_k = \frac{(1+y_k^2)^2}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+y^2)^2 \sin^2 \Phi_n(y) dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2} \,.$$

Как и в [4, с. 48] введем синус-дробь Бернштейна, полагая

$$\sin \Phi_n(y) = \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{y-i}{y+i}} \prod_{k=1}^{n} \frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}} - \sqrt{\frac{y+i}{y-i}} \prod_{k=1}^{n} \frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k} \right),$$

где точки z_k являются корнями уравнения $y^2 + (1+a_k)/(1-a_k) = 0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. При этом ограничения, налагаемые на параметры $a_k, k = 1, \ldots, n$, влекут выполнение следующих условий: 1) $z_1 = i$, 2) паре комплексно сопряженных параметров из множества $\{a_k\}_{k=1}^n$ соответствует пара симметричных относительно мнимой оси параметров из множества $\{z_k\}_{k=1}^n$.

Из представления $\sin \Phi_n(y)$ несложно получить

$$\sin^2 \Phi_n(y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{y-i}{y+i} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}} \right)^2 - 2 + \frac{y+i}{y-i} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k} \right)^2 \right).$$

Теперь интеграл I_k представим в виде суммы

$$I_k = -\frac{1}{4}(I_{k1} - 2I_{k2} + I_{k3}),$$

где

$$I_{k1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-i}{y+i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,,\qquad I_{k2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,,$$

$$I_{k3}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y+i}{y-i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Далее интеграл I_{k1} запишем в следующем виде:

$$I_{k1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2yi}{1+y^2}-\frac{2}{1+y^2}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Разобьем интеграл на сумму интегралов. Далее продемонстрируем вычисление одного из интегралов

$$J(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Для нахождения этого интеграла воспользуемся методом вывода параметра в комплексную область, предложенным в [4, с. 92]. Отметим, что этот метод использовался в [1–3] для вычисления соответствующих интегралов. Рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$J(z,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-i}{y+i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2\sin^2\Phi_n(y)dy}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}\,,$$

а затем интеграл $J(y)$ найдем с помощью предельного перехода:

$$J(y)=\lim_{\substack{z\to y_k,\,w\to 0\\ \operatorname{Im} z>0}}J(z,w).$$

Подынтегральная функция $J(z,w)$ в верхней полуплоскости имеет две особые точки $y=w$ и $y=z$, таким образом, получим:

$$J(z,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}=$$

$$=2\pi i\left(\underset{y=z}{res}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}+\underset{y=w}{res}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{y\to z}\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y+z)^2}+\lim_{y\to w}\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y^2-z^2)^2}\right).$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{(y-z_k)(y-\overline{z_k})}\,,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y+z)^2}\right)=\frac{2(y^2+1)(2y-w+z+wy^2-y^2z+2wyz)}{(w-z)^3(y+z)^3}\,,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{(1+y^2)^2}{(y^2-z^2)^2}\right)=\frac{4y(y^2+1)(z^2+1)}{(y^2-z^2)^3}\,,$$

и возвращаясь к вычислению интеграла $J(y)$, получим:

$$J(y)=4\pi i\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{(y_k-z_k)(y_k-\overline{z_k})}\frac{(1+y_k^2)^2}{4y_k^4}+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}\right)^2\frac{(z^2+1)(z^2-3)}{z^5}+$$

$$+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{z_j}{\overline{z_j}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{z_k\overline{z_k}}\frac{1}{y_k^4}\,.$$

Аналогичным образом вычисляются оставшиеся интегралы из суммы интегралов I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}.

Учитывая

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}=(-1)^n,$$

будем иметь:

$$I_k=-\frac{(1+y_k^2)^2}{8}\left(-\frac{2\pi}{1+y_k^2}+2\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j-\overline{z_j}}{(y_k-z_j)(y_k-\overline{z_j})}\right).$$

Преобразуем сумму, стоящую в правой части с учетом симметричности чисел $\{z_k\}_{k=1}^n$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j-\overline{z_j}}{(y_k-z_j)(y_k-\overline{z_j})}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{y_k-z_j}+\frac{1}{y_k-\overline{z_j}}\right)=\frac{-2\lambda(x_k)}{i(1+y_k^2)}\,.$$

Получим:

$$I_k=\frac{\pi(1+y_k^2)}{2}\left(-\frac{1}{2}-i(1+y_k^2)\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j}{y_k^2-z_j^2}\right)=\frac{\pi\lambda(x_k)(1+y_k^2)}{2}=\frac{\pi\lambda(x_k)}{1+x_k}\,. \qquad (4)$$

Теперь займемся интегралами I_{kl}. Проделав аналогичные вычисления получим:

$$I_{kl}=0. \qquad (5)$$

Подставим полученные результаты для интегралов (4) и (5) в (3). Окончательно получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{L_n^2(x;f)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi\sum_{k=0}^{n}\frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}\,.$$

Теорема 1 доказана.

С учетом неотрицательных значений, принимаемых вещественнозначной функцией $\lambda_{n+1/2}(x)$ при заданном выборе параметров $\{a_k\}_{k=1}^n$ и точности интерполяционной функции Лагранжа для константы, коэффициенты полученных формул будут иметь следующие свойства.

Замечание. Коэффициенты $A_k=\pi/\lambda_{n+1/2}(x_k)$, $k=1,\dots,n$, соотношения (2) удовлетворяют условиям

$$A_k>0,\qquad k=0,\dots,n,$$
$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\pi. \qquad (6)$$

Обозначим через $L_2(\rho)=L_2(\rho;[-1;1])$ пространство квадратично-суммируемых, по Лебегу, с весом $\rho=\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_2(\rho)}=\left(\int_{-1}^{1}\frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)^{1/2}.$$

Теперь вычислим норму рациональной функции Лагранжа $L_n(x;f)$ в пространстве $L_2(\rho)$.

Лемма 1. *Для нормы оператора $L_n:\ \to L_2(\rho)$ справедливо равенство*

$$\|L_n\|_{C\to L_2(\rho)}=\sqrt{\pi}\,.$$

Доказательство. Для любой функции $f \in C[-1;1]$ с помощью теоремы 1 и равенства (6) находим:

$$\|L_n(x;f)\|_{C\to L_2(\rho)} \leqslant \sqrt{\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}} \leqslant \|f\|_C \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}} = \sqrt{\pi}\|f\|_C \,.$$

С другой стороны, для $f(x) \equiv 1$ имеем

$$\|L_n(x;f)\|_{C\to L_2(\rho)} = \sup_{f\in C, \|f\|\leqslant 1} \|L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \|L_n(x;1)\|_{L_2(\rho)} = \|1\|_{L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}\,.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим вопрос приближения произвольной непрерывной на отрезке $[-1;1]$ функции.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C[-1;1]$ погрешность приближения ее интерполяционной функцией $L_n(x;f)$ может быть оценена с помощью неравенства*

$$\|f(x) - L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\sqrt{\pi} R_n(f,a),$$

где $R_n(f,a)$ — наилучшее равномерное приближение функции f посредством рациональных функций из $\mathscr{R}_n$ вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=2}^{n}(1+a_k x)}\,,$$

где $p_n(x)$ — многочлен степени не выше n.

Доказательство. Пусть $r_n^* \in \mathscr{R}_n$ — рациональная функция наилучшего равномерного приближения. В силу того что $L_n(x;r_n^*) \equiv r_n^*(x)$ и леммы 1, получим:

$$\begin{gathered}\|f(x) - L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \|f(x) - r_n^*(x)\|_{L_2(\rho)} + \|L_n(x; f - r_n^*)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \\ \leqslant \|f - r_n^*\|_{C[-1;1]} \cdot \|1\|_{L_2(\rho)} + \|L_n\|_{C\to L_2(\rho)} \cdot \|f - r_n^*\|_{C[-1;1]} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\pi} R_n(f,a) + R_n(f,a)\sqrt{\pi}.\end{gathered}$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что аналогичный результат получен при построении интерполяционной рациональной функции Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1, \dots, n$ и одной заранее фиксированной точке $x_0 = 1$. В частности, для произвольной функции $f \in C[-1,1]$ интерполяционная рациональная функция Лагранжа с вышеуказанными узлами имеет следующий вид:

$$L_n(x;f) = {\sum_{k=0}^{n}}' \frac{(-1)^{k+1} f(x_k)(1-x) Q_n(x)\sqrt{1+x_k}}{\sqrt{2}\lambda_{n+1/2}(x_k)(x-x_k)}\,, \tag{7}$$

где штрих после знака суммы означает, что первое слагаемое необходимо разделить на 2.

При этом для рассматриваемой интерполяционной рациональной функции Лагранжа (7) норма в пространстве квадратично-суммируемых функций описана в следующей теореме.

Теорема 3. *Для произвольной функции $f \in C[-1;1]$ имеет место соотношение*

$$\int_{-1}^{1} \frac{L_n^2(x;f)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi {\sum_{k=0}^{n}}' \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}\,,$$

где штрих после знака суммы означает, что первое слагаемое необходимо разделить на 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе вычислена норма интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций. На основании этого результата получена норма соответствующего интерполяционного оператора, действующего из пространства непрерывных функций в пространство функций, интегрируемых в квадрате и оценена погрешность приближения произвольной функции посредством интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции.

Библиографический список

1. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева — Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
2. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна // Весцi НАН Беларусi. 2010. № 3. С. 5–9.
3. *Ровба Е. А.* Об одной ортогональной системе рациональных функций и квадратурах типа Гаусса // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-матем. навук. 1998. № 3. С. 31–35.
4. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. 176 с.

About the Norms of Interpolation Processes with Fixed Nodes

K. A. Smotritski, Y. V. Dirvuk

Yanka Kupala State University of Grodno, 22, Ozheshko str., 230023, Grodno, Belarus, k_smotritski@mail.ru, dirvuk@gmail.com

The object of study is interpolating rational Lagrange functions. The aim of the research — the study of approximation properties of these functions in the space of square integrated functions. In the introduction the relevance of the research is indicated, references to some works related to this article are given. We also describe the construction of the apparatus of approximation — interpolating rational Lagrange functions. In the main part the norm of the interpolating rational function in the space of the square integrated functions is calculated. This enabled us to estimate the error of the approximation of an arbitrary function by interpolating rational Lagrange functions in the space of square integrated functions in terms of best uniform rational approximation of this function. The results can be used for further investigation of the properties of interpolating rational functions and their approximations in various functional spaces.

Key words: interpolating rational Lagrange function, the norm of the interpolating process, approximation in the space of square integrated functions..

References

1. Rovba E. A., Smotritski K. A. Rational interpolation at the zeros of sine-fractions Chebyshev – Markov. *Doklady NAN Belarusi*, 2008, vol. 52, no. 5, pp. 11–15 (in Russian).
2. Rovba E. A., Smotritski K. A. Convergence in the mean of rational interpolating processes in the zeroes of Bernstein fractures. *Vesti NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, 2005, no. 1, pp. 6–10 (in Russian).
3. Rovba E. A. Orthogonal system of rational functions and quadratures of Gauss-type. *Mathematica Balkanica*, 1999, vol. 13, no. 1–2, pp. 187–198.
4. Rusak V. N. *Racional'nye funkcii kak apparat priblizhenija* [Rational functions as approximating tool]. Minsk, 1979, 176 p. (in Russian).

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

А. А. Хромов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе модификации оператора Стеклова построены семейства интегральных операторов, позволяющие получать равномерные приближения к функции и ее производной на отрезке.

Ключевые слова: производная, равномерные приближения, оператор Стеклова..

1. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Из операторов

$$S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt, \qquad S_{\alpha 2} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt$$