Библиографический список

1. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева — Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
2. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна // Весці НАН Беларусі. 2010. № 3. С. 5–9.
3. *Ровба Е. А.* Об одной ортогональной системе рациональных функций и квадратурах типа Гаусса // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 1998. № 3. С. 31–35.
4. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. 176 с.

About the Norms of Interpolation Processes with Fixed Nodes

K. A. Smotritski, Y. V. Dirvuk

Yanka Kupala State University of Grodno, 22, Ozheshko str., 230023, Grodno, Belarus, k_smotritski@mail.ru, dirvuk@gmail.com

The object of study is interpolating rational Lagrange functions. The aim of the research — the study of approximation properties of these functions in the space of square integrated functions. In the introduction the relevance of the research is indicated, references to some works related to this article are given. We also describe the construction of the apparatus of approximation — interpolating rational Lagrange functions. In the main part the norm of the interpolating rational function in the space of the square integrated functions is calculated. This enabled us to estimate the error of the approximation of an arbitrary function by interpolating rational Lagrange functions in the space of square integrated functions in terms of best uniform rational approximation of this function. The results can be used for further investigation of the properties of interpolating rational functions and their approximations in various functional spaces.

Key words: interpolating rational Lagrange function, the norm of the interpolating process, approximation in the space of square integrated functions..

References

1. Rovba E. A., Smotritski K. A. Rational interpolation at the zeros of sine-fractions Chebyshev – Markov. *Doklady NAN Belarusi*, 2008, vol. 52, no. 5, pp. 11–15 (in Russian).
2. Rovba E. A., Smotritski K. A. Convergence in the mean of rational interpolating processes in the zeroes of Bernstein fractures. *Vesti NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, 2005, no. 1, pp. 6–10 (in Russian).
3. Rovba E. A. Orthogonal system of rational functions and quadratures of Gauss-type. *Mathematica Balkanica*, 1999, vol. 13, no. 1–2, pp. 187–198.
4. Rusak V. N. *Racional'nye funkcii kak apparat priblizhenija* [Rational functions as approximating tool]. Minsk, 1979, 176 p. (in Russian).

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

А. А. Хромов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе модификации оператора Стеклова построены семейства интегральных операторов, позволяющие получать равномерные приближения к функции и ее производной на отрезке.

Ключевые слова: производная, равномерные приближения, оператор Стеклова..

1. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Из операторов

$$S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt, \qquad S_{\alpha 2} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt$$

построим операторы:

$$S_\alpha^{(2)}f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0,1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2,1] \end{cases} \qquad \text{и} \qquad DS_\alpha^{(2)}f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0,1/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где D — оператор дифференцирования по x. Из-за разрывности функций $S_\alpha^{(2)}f$ и $DS_\alpha^{(2)}f$ в точке $x = 1/2$ будем использовать метрику пространства $L_\infty[0,1]$, норма в котором в нашем случае будет определяться по формуле

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Лемма 1. *Операторы $S_{\alpha 1}^2$ и $S_{\alpha 2}^2$ имеют вид*

$$S_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(2\alpha - (x-t))f(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)f(t)\,dt\right],$$

$$S_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x}^{x+\alpha}(t-x))f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha - (t-x))f(t))\,dt\right], \qquad \alpha \le 1/4.$$

Доказательство получается, если к повторным интегралам в выражениях для операторов $S_{\alpha 1}^2$ и $S_{\alpha 2}^2$ применить формулу интегрирования по частям.

Чтобы аргументы функций $S_{\alpha j}^2 f$, $j = 1,2$, не вышли за границы отрезка $[0,1/2]$ при $j = 2$ и $[1/2,1]$ при $j = 1$ должны выполняться условия: $\frac{1}{2} + 2\alpha \leqslant 1$ и $\frac{1}{2} - 2\alpha \geqslant 0$.

Отсюда следует ограничение $\alpha \leqslant 1/4$, которое не ограничивает общности приведенных здесь доказательств.

Лемма 2. *Операторы $DS_{\alpha 1}^2$ и $DS_{\alpha 2}^2$ имеют вид*

$$DS_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha} f(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt\right], \qquad DS_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t)\,dt\right].$$

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется сходимость:*

$$\|S_\alpha^{(2)}f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1}$$

Доказательство получается, если использовать равенство $S_{\alpha j}^2 1 = 1$, $j = 1,2$, из которого получается оценка: $|S_{\alpha j}^2 f - f| \leqslant \omega(2\alpha)$, $j = 1,2$, где $\omega(2\alpha)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 2. *Для $f(x) \in C^1[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|DS_\alpha^{(2)}f - f'\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. При дифференцировании функций в формулах леммы 1 заменим дифференцирование по x на дифференцирование по t, после чего возьмем соответствующие интегралы по частям, «перебросив» производную на функцию $f(x)$. Поскольку подстановки при этих вычислениях обратятся в ноль, мы придем к равенствам:

$$DS_{\alpha j}^2 f = S_{\alpha j}^2 f', \qquad j = 1,2. \tag{3}$$

Тогда из теоремы 1 будет следовать утверждение теоремы 2.

2. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике. Найдем приближения к $f(x)$ и $f'(x)$ с помощью построенных выше операторов.

Введем в рассмотрение величины:

$$\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|S_\alpha^{(2)}f - f\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\},$$

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)}f - f'\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}.$$

Лемма 3. *Для сходимости $\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы: а) выполнялось условие* (1)*; б) выполнялось согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям: $\alpha(\delta) \to 0$ и $\|S_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Для сходимости $\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения условия* (2) *и приведенного выше условия б) с заменой $S_\alpha^{(2)}$ на $DS_\alpha^{(2)}$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 из [1].

Лемма 4. *Справедливы равенства:*

$$\|S_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha^{-1/2}\,, \tag{4}$$

$$\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty} = \sqrt{2}\alpha^{-3/2}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем:

$$\|S_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty} = \max\Big\{\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1]},\ \|S_{\alpha 1}^2\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}\Big\}.$$

Для норм операторов $DS_\alpha^{(2)}$ справедлива эта же формула с заменой $S_\alpha^{(2)}$ на $DS_\alpha^{(2)}$.

Операторы $S_{\alpha j}^2$, $DS_{\alpha j}^2$, $j = 1, 2$ — интегральные, действующие из $L_2[0,1]$ в $C[0,1/2]$ при $j = 2$ и в $C[1/2,1]$ при $j = 1$.

Рассмотрим оператор $S_{\alpha 2}^2$. Пользуемся формулой

$$\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \max_{0\leqslant x\leqslant 1/2}\left(\int_0^1 (K_{\alpha 2}(x,t))^2\,dt\right)^{1/2},$$

где $K_{\alpha 2}(x,t)$ по лемме 1 имеет вид

$$K_{\alpha 2}(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\begin{cases} t-x, & x \leqslant t \leqslant x+\alpha,\\ 2\alpha-(t-x), & x+\alpha\leqslant t\leqslant x+2\alpha.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha^{-1/2}.$$

Такая же формула получается и для нормы оператора $S_{\alpha 1}^2$. Отсюда следует (4). Аналогично доказывается и формула (5).

Из теорем 1,2 и лемм 3,4 вытекает

Теорема 3. *Для сходимости $\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выбрать $\alpha = \alpha(\delta)$ так, чтобы $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-1/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Для сходимости $\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выбрать $\alpha = \alpha(\delta)$ так, чтобы $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.

3. Если о функции $f(x)$ известна дополнительная информация, то можно указать конкретные формулы для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получить оценки погрешности построенных приближений. В [2] такой результат приведен для операторов S_α и $f(x) \in Lip_1 1$. Здесь приведен аналогичный результат для приближений к $f'(x)$.

Пусть $f(x) \in M = \{f(x) \in C^1[0,1] : f'(x) \in Lip_k 1\}$.

Рассмотрим величины:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f_\delta - f'\|_{L_\infty} : f \in M, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}, \tag{6}$$

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} : f \in M\}. \tag{7}$$

Очевидно, первая из них характеризует оценки погрешности приближений к $f'(x)$ после применения операторов $DS_\alpha^{(2)}$ к $f_\delta(x)$, а вторая – скорость аппроксимации производной функциями $DS_\alpha^{(2)} f$ на классе M.

Лемма 5. *Справедливо равенство $\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = K\alpha$.*

Доказательство. Пользуемся равенством (3), из которого вытекает, что

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|S_\alpha^{(2)}\varphi - \varphi\|_{L_\infty} : \varphi \in Lip_k 1\}.$$

Далее, из леммы 1, равенства $S_\alpha^{(2)}1 \equiv 1$ и оценки $|\varphi(t) - \varphi(x)| \leqslant K|t - x|$ получаем оценку сверху:

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant K\alpha.$$

Из (7) следует, что

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \geqslant \|S_\alpha^{(2)}\varphi_0 - \varphi_0\|_{L_\infty},$$

где $\varphi_0(x) = Kx$. Очевидно, ей соответствует функция $f_0(x) = Kx^2/2$.

Из равенства $\|S_\alpha^{(2)}\varphi_0 - \varphi_0\|_{L_\infty} = K\alpha$ следует оценка $\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \geqslant K\alpha$, а отсюда — утверждение леммы.

Теорема 4. *Справедлива двусторонняя оценка, не улучшаемая по порядку δ:*

$$C_1 K^{3/5}\delta^{2/5} \leqslant \Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \leqslant C_2 K^{3/5}\delta^{2/5}, \tag{8}$$

где

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{3}{K\sqrt{2}}\right)^{2/5}\delta^{2/5}, \tag{9}$$

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/5} 3^{1/5}, \qquad C_2 = C_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} 2^{1/5}.$$

Доказательство. Из очевидной оценки:

$$\|DS_\alpha^{(2)} f_\delta - f'\|_{L_\infty} \leqslant \|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} + \delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}$$

вытекает оценка:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant \Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) + \delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}. \tag{10}$$

Из лемм 4 и 5 и оценки (10) следует оценка:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant K\alpha + \sqrt{2}\alpha^{-3/2}\delta. \tag{11}$$

Обозначим через $\Phi(\alpha, \delta)$ правую часть (11) и найдем по аналогии с [3] согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi(\alpha, \delta) \to \inf\limits_{\alpha}$. Тогда получим (9).

Отсюда, подставляя (9) в (11), получаем в (8) оценку сверху.

Далее, из (6) мы имеем: поскольку $\Delta_1 = \Delta_{/\delta=0} \leqslant \Delta$, а $\delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant \Delta_{/f=0} \leqslant \Delta$, то справедлива оценка:

$$\Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \geqslant \max\{\Delta_1(DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M), \delta\|DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}\}.$$

Легко установить, что

$$\Delta_1(DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \geqslant \delta\|DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}.$$

Отсюда и из формулы (5) получаем в (8) оценку снизу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

3. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

Approximation of Function and Its Derivative by the Modificated Steklov Operator

A. A. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of modification of Steklov operator are constructed families of integral operator which allow us to get uniform derivative on a closed.

Key words: derivative, uniform approximations, Steklov operator.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Ivanov V. K. Ob integral'nykh uravneniiakh Fredgol'ma I roda [Fredholm integral equation of the first kind]. *Differents. uravneniia* [Differ. Equations], 1967, vol. III, no. 3, pp. 410–421 (in Russian).
2. Khromov A. P., Khromova G. V. Ob odnoi modifikatsii operatora Steklova [One modification of the Steklov operator]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia: Tez. dokl. 15-i Sarat. zimn. shkoly* [Modern problems of function theory and their applications: abstracts of the 15-th Saratov winter school], Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
3. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

УДК 517.51:571.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

Г. В. Хромова

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Для нахождения равномерных приближений к точному решению уравнения Абеля с приближенно заданной правой частью предложено простое по конструкции семейство интегральных операторов.

Ключевые слова: уравнение Абеля, оператор Стеклова, равномерные приближения, отрезок.

1. Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \beta < 1, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Пусть известно, что при данной $f(x)$ существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1), но сама функция $f(x)$ нам неизвестна — вместо нее известна $f_\delta(x)$ такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$. Поставим задачу: по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $u(x)$.

Возьмем разрывный оператор Стеклова из [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int\limits_x^{x+\alpha} u(t)\mathrm{d}t, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\mathrm{d}t, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2}$$

По методу, предложенному в [2], построим семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Теорема 1. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0, 1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2, 1], \end{cases} \tag{3}$$