Approximation of Function and Its Derivative by the Modificated Steklov Operator

A. A. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of modification of Steklov operator are constructed families of integral operator which allow us to get uniform derivative on a closed.

Key words: derivative, uniform approximations, Steklov operator.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Ivanov V. K. Ob integral'nykh uravneniiakh Fredgol'ma I roda [Fredholm integral equation of the first kind]. *Differents. uravneniia* [Differ. Equations], 1967, vol. III, no. 3, pp. 410–421 (in Russian).
2. Khromov A. P., Khromova G. V. Ob odnoi modifikatsii operatora Steklova [One modification of the Steklov operator]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia: Tez. dokl. 15-i Sarat. zimn. shkoly* [Modern problems of function theory and their applications: abstracts of the 15-th Saratov winter school], Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
3. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

УДК 517.51:571.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

Г. В. Хромова

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Для нахождения равномерных приближений к точному решению уравнения Абеля с приближенно заданной правой частью предложено простое по конструкции семейство интегральных операторов.

Ключевые слова: уравнение Абеля, оператор Стеклова, равномерные приближения, отрезок.

1. Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \beta < 1, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Пусть известно, что при данной $f(x)$ существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1), но сама функция $f(x)$ нам неизвестна — вместо нее известна $f_\delta(x)$ такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$. Поставим задачу: по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $u(x)$.

Возьмем разрывный оператор Стеклова из [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int\limits_x^{x+\alpha} u(t)\mathrm{dt}, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\mathrm{dt}, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2}$$

По методу, предложенному в [2], построим семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Теорема 1. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0, 1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2, 1], \end{cases} \tag{3}$$

$$R_{\alpha 1}(x,t)=\begin{cases}(x-t)^{-\beta}-(x-\alpha-t)^{-\beta}, & 0\le t<x-\alpha,\\ (x-t)^{-\beta}, & x-\alpha\le t<x,\\ 0, & x\le t\le 1,\end{cases} \qquad (4)$$

$$R_{\alpha 2}(x,t)=\begin{cases}(x+\alpha-t)^{-\beta}-(x-t)^{-\beta}, & 0\le t<x,\\ (x+\alpha-t)^{-\beta}, & x\le t<x+\alpha,\\ 0, & x+\alpha\le t\le 1.\end{cases} \qquad (5)$$

Доказательство основано на том, что в данном случае вид оператора $^{-1}$ известен:

$$A^{-1}f=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}f(t)\,dt. \qquad (6)$$

Тогда из (2) и (6) следуют (3)–(5).

Теорема 2. *Операторы $R_{\alpha_j}, j=1,2$, при $0<\beta<1/2$ являются линейными, ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0,1]$ в $C[1/2,1]$ при $j=1$ и в $C[0,1/2]$ при $j=2$. При этом справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}\le \|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}\le \sqrt{2}C_\beta\alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}\,, \qquad (7)$$

где $C_\beta=(\Gamma(1-\beta))^{-1}(1-2\beta)^{-1/2}$, $\|\cdot\|_{L_\infty}=\max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]},\|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}$.

Доказательство. Из неравенства Буняковского следует, что операторы $R_{\alpha j}$, $j=1,2$, определены на всем пространстве $L_2[0,1]$ и ограничены при каждом фиксированном α и $0<\beta<1/2$. Действительно, например для $j=1$ и $t\in[x-\alpha,x)$ имеем:

$$\left|\int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)^{-\beta}f(t)\,dt\right|\le\left(\int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)^{-2\beta}dt\right)^{1/2}\|f\|_{L_2}=(1-2\beta)^{-1/2}\alpha^{1-2\beta}\|f\|_{L_2}.$$

Аналогичные оценки получаются для других интервалов изменения t и также для $j=2$.

При этом значения интегральных операторов с ядрами $R_{\alpha j}(x,t)$, определенными в (4), (5), являются непрерывными функциями на соответствующих половинах отрезка $[0,1]$. Это следует из непрерывности функции $\int\limits_0^x(x-t)^{-\beta}f(t)dt$, которая устанавливается при выводе формулы (6).

Далее, очевидно, что

$$\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}=\max\left\{\|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]},\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}\right\}. \qquad (8)$$

При этом

$$\|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1]\to C1/2,1}=[\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1}\max_{1/2\le x\le 1}\left(\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt\right)^{1/2}, \qquad (9)$$

$$\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1]\to C0,1/2}=[\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1}\max_{0\le x\le 1/2}\left(\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)dt\right)^{1/2}. \qquad (10)$$

Рассмотрим сначала операторы $R_{\alpha 1}$. Подставив (4) в (9) и сделав замену переменных $x-t=\tau$, придем к выражению

$$\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt=\int\limits_\alpha^x[\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2d\tau+\int\limits_0^\alpha\tau^{-2\beta}d\tau.$$

Отсюда имеем:

$$\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt\ge(1-2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}. \qquad (11)$$

Далее, поскольку $\tau^{-\beta} \le (\tau-\alpha)^{-\beta}$, то $[\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2 \le (\tau-\alpha)^{-2\beta}-\tau^{-2\beta}$, а отсюда следует:

$$\int\limits_{\alpha}^{x}[\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2\,d\tau \le (1-2\beta)^{-1}[(x-\alpha)^{1-2\beta}-x^{1-2\beta}+\alpha^{1-2\beta}].$$

Поскольку $(x-\alpha)^{1-2\beta} \le x^{1-2\beta}$, то в итоге приходим к оценке

$$\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt \le 2(1-2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}. \tag{12}$$

Аналогично подставив (5) в (10) и сделав замену: $x+\alpha-t=\tau$, придем к оценкам (11), (12) для $\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)dt$.

Наконец, из (8)–(12) следует (7).

Следствие 1. *Операторы R_α являются регуляризующими [3, с. 44] для уравнения* (1).

Доказательство. Поскольку $R_\alpha A \equiv S_\alpha$, то требуемая для регуляризирующих операторов сходимость $\|R_\alpha Au-u\|_{L_\infty} \to 0$, где $u(x)$ — любая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0,1]$, выполняется. Остальные требования к таким операторам устанавливаются в теореме 2.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,u)=sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}:\|f_\delta-f\|_{L_2}\le\delta\right\}.$$

Следствие 2. *Для сходимости $\Delta(\delta,R_\alpha,u)\to 0$ при $\alpha\to 0,\delta\to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha=\alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta)\to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2\beta+1}{2}}\to 0$ при $\delta\to 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [4] с привлечением оценки (7).

2. Найдем конкретное согласование $\alpha=\alpha(\delta)$, обеспечивающее неулучшаемую по порядку оценку погрешности приближенных решений уравнения (1) в случае, когда $u(x)\in Lip_M 1$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,Lip_M 1)=sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}:u\in Lip_M 1,\|f_\delta-f\|_{L_2}\le 1\right\}.$$

Теорема 3. *Справедлива неулучшаемая по порядку δ оценка:*

$$\frac{1}{2}C_1(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \le \Delta(\delta,R_{\alpha(\delta)},Lip_M 1)\le C_2(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{13}$$

где

$$\alpha(\delta)=D(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{14}$$

$$D(\beta)=\left(2^{1/2}M^{-1}C_\beta(2\beta+1)\right)^{\frac{2}{3+2\beta}},\qquad C_1(\beta)=\frac{M}{2}D(\beta)+C_\beta(D(\beta))^{-\frac{2\beta+1}{2}},$$

$C_2(\beta)$ отличается от $C_1(\beta)$ множителем 2 во втором слагаемом.

Доказательство. Пользуемся методом, приведенным в [5], и известной из теории некорректно поставленных задач оценкой:

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha,\delta)\le\Delta(\delta,R_\alpha,Lip_M 1)\le\varphi(\alpha,\delta), \tag{15}$$

где

$$\varphi(\alpha,\delta)=\Delta_1(R_\alpha A,Lip_M 1)+\delta\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}, \tag{16}$$
$$\Delta_1(R_\alpha A,Lip_M 1)=\sup\left\{\|R_\alpha Au-u\|_{L_\infty}:u\in Lip_M 1\right\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta_1(R_\alpha A,Lip_M 1)\equiv\Delta_1(S_\alpha,Lip_M 1).$$

Далее, из условия Липшица следует оценка

$$\Delta_1(S_\alpha, Lip_M 1) \leq M\frac{\alpha}{2},$$

которая достигается на функции $f_0(x) = Mx$. Отсюда получаем равенство:

$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_M 1) = M\frac{\alpha}{2}. \qquad (17)$$

Из равенств (16), (17) и двусторонней оценки (7) получаем оценку:

$$\Phi_1(\alpha,\delta) \leq \varphi(\alpha,\delta) \leq \Phi_2(\alpha,\delta),$$

где $\Phi_1(\alpha,\delta) = M\frac{\alpha}{2} + C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}$, а $\Phi_2(\alpha,\delta)$ отличается от $\Phi_1(\alpha,\delta)$ множителем $\sqrt{2}$ во втором слагаемом.

В соответствии с [5] найдем $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi_2(\alpha,\delta) \to \inf\limits_{\alpha}$ и придем к формуле (14). Подставляя (14) в оценку (15), получаем оценку (13).

Сравнение регуляризации, проведенной здесь, с регуляризацией уравнения Абеля из [6] показывает, что в данном случае и семейство регуляризирующих операторов, и доказательства соответствующих теорем являются более простыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зимн. школы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.
2. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.
3. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
4. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
5. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.
6. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5–9.

Regularization of Abel Equation with the Use of Discontinuous Steklov Operator

G. V. Khromova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

For getting uniform approximations of the exact solution of Abel equation with an approximate right-hand part a simply constructed family of integral operators is suggested.

Key words: Abel equation, Steklov operator, uniform approximations, closed interval.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Khromov A. P., Khromova G. V. Ob odnoi modifikatsii operatora Steklova [One modification of the Steklov operator]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia: Tez. dokl. 15-i Sarat. zimn. shkoly* [Modern problems of function theory and their applications: abstracts of the 15-th Saratov winter school], Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
2. Khromova G. V. On a technique for constructing regularization methods for equations of the first kind. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, no. 7, pp. 955–960.
3. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p.(in Russian).
4. Ivanov V. K. Ob integral'nykh uravneniiakh Fredgol'ma I roda [Fredholm integral equation of the first kind]. *Differents. uravneniia* [Differ. Equations], 1967, vol. III, no. 3, pp. 410–421 (in Russian).

5. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

6. Khromova G. V. On the approximate solutions of the Abel's equation. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15*, 2001, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ И ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О. И. Шаталина

Специалист отдела расчетных операций, Локо-Банк, Саратов, OShatalina@srt.lockobank.ru

В работе приведено семейство интегральных операторов, с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывной функции, удовлетворяющей краевым условиям (при этом указанные приближения удовлетворяют тем же условиям), и решена задача типа Колмогорова – Никольского на некотором компактном классе. Кроме того, с помощью полученного семейства интегральных операторов решается известная задача из теории некорректно поставленных задач, так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

Ключевые слова: функционал Тихонова, семейство интегральных операторов, некорректно поставленная задача, задача типа Колмогорова – Никольского, равномерные приближения.

1. Пусть непрерывная функция $\overline{u}(x)$ удовлетворяет краевому условию:

$$\cup(\overline{u}) \equiv \beta_1\overline{u}(0) + \beta_2\overline{u}(1) = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \tag{1}$$

Получим равномерные приближения к $\bar{u}(x)$, используя модификацию функционала Тихонова, известного в теории некорректно поставленных задач [1], а именно рассмотрим функционал

$$M^\alpha[u,\overline{u}] = \|u-\overline{u}\|^2_{L_2} + \alpha\|u\|^2_{W_2^1}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, $\|u\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_0^1 (pu^2 + (qu')^2)\,dx\right)^{1/2}$, p, q — положительные константы. Это так называемый тихоновский функционал, но в данном случае он связывается не с интегральными уравнениями 1-го рода, как у А. Н. Тихонова, а с простейшим уравнением 1-го рода — уравнением с оператором вложения из пространства $C[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$. При этом будем считать допустимыми функциями функции, удовлетворяющие условию (1).

Обозначим через $u^\alpha(x)$ — функции, минимизирующие функционал (2) при каждом фиксированном значении α. Существование этих функций при каждом фиксированном α доказывается точно так же, как в классической постановке А. Н. Тихонова [2].

Лемма 1. *Минимизирующие функции $u^\alpha(x)$ при каждом фиксированном α являются решением краевой задачи:*

$$\begin{cases} -qy'' + (p+\frac{1}{\alpha})y = \frac{1}{\alpha}\overline{u}, \\ \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_1 y'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (2) и его приращение

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = M^\alpha[u^\alpha + \beta\eta, \bar{u}] - M^\alpha[u^\alpha, \bar{u}],$$

где $\eta(x) \in W_2^1[0,1]$ и удовлетворяет условию (1), $\beta > 0$ — произвольное вещественное число.

Сделав необходимые преобразования, учитывая свойства скалярного произведения, получаем:

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = 2\beta\left\{(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha, \eta)_{W_2^1}\right\} + \beta^2\left\{\|\eta\|^2_{L_2} + \alpha\|\eta\|^2_{W_2^1}\right\}.$$

Приравнивая линейную часть приращения функционала к нулю, получаем:

$$(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha, \eta)_{W_2^1} = 0. \tag{4}$$