В заключение отметим, что в случае, когда выражение $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$ $(k = 1, 2)$ обращается в нуль в отдельных точках контура L, трехэлементные задачи вида (18) (а значит, и исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$) пока остаются не исследованными.

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос пед. ун-та, 1998. 345 с.
2. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. 1991. Т. 85. С. 187–246.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
6. *Перельман Н. Р.* Трехэлементная задача типа Карлемана для трианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : СмолГУ, 2007. Вып. 8. С. 171–180.
7. *Расулов К. М., Титов О. А.* О решении одной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос пед. ун-та, 2004. Вып. 5. С. 153–159.
8. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2008. № 2. С. 94–104.

УДК 512.554+512.643

ОБ ИДЕМПОТЕНТАХ АЛГЕБРЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет
E-mail: poplavskivb@mail.ru

Изучается строение идемпотентных матриц с элементами из произвольной булевой алгебры в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с конъюнктным и дизъюнктным частичным произведением. Показана связь разрешимости простейших матричных уравнений с некоторыми видами идемпотентных матриц, названных в статье вторичными идемпотентами. Также указывается связь произвольных идемпотентов со вторичными и изучаются их свойства.

Ключевые слова: булевы матрицы, матричные уравнения, идемпотенты.

On Idempotents of Algebra of Boolean Matrices

V. B. Poplavski

The structure of idempotent matrices in partial semigroups of matrices of arbitrary sizes with elements from arbitrary Boolean algebra with conjunctive and disjunctive partial multiplications is investigated. The connection of solvability of the simplest matrix equations with some kind of idempotent matrices which are called «secondary idempotents» is shown. Also we show the connection of arbitrary idempotent matrices with secondary idempotents and investigate their properties.

Key words: Boolean matrices, matrix equations, idempotents.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\langle \mathbf{B}_{m\times n}, \cup, \cap, ', O, I\rangle$ есть булева алгебра $m \times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, дополнения $'$ и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Матрицы O и I, образованные целиком из нулей (0) и единиц (1) соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры.

Определение 1. Матрицу $C = A \sqcap B \in \mathbf{B}_{m\times k}$ с элементами $C^i_j = \bigcup_{t=1}^n (A^i_t \cap B^t_j)$ назовём *конъюнктным произведением* матриц согласованных размеров $A = (A^i_j) \in \mathbf{B}_{m\times n}$ и $B = (B^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times k}$. *Дизъюнктное произведение* $A \sqcup B$ определяется дуальным образом: $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ или $(A \sqcup B)' = A' \sqcap B'$.

Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 1. *Если булевы матрицы A, B, C таких размеров, что операции умножения этих матриц определены, то имеют место следующие формулы:*

1. $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$; 2. $A \sqcap E = A$, $E \sqcap A = A$;
3. $A \sqcap O = O$, $O \sqcap A = O$; 4. $(A \sqcap B)^T = B^T \sqcap A^T$;
5. $A \sqcap (B \cup C) = (A \sqcap B) \cup (A \sqcap C)$, $(A \cup B) \sqcap C = (A \sqcap C) \cup (B \sqcap C)$;

6. $A \sqcap (B \cap C) \subseteq (A \sqcap B) \cap (A \sqcap C)$, $\quad (A \cap B) \sqcap C \subseteq (A \sqcap C) \cap (B \sqcap C)$.

Выполняются также дуальные правила:

1′. $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$; $\quad$ 2′. $A \sqcup E' = A$, $E' \sqcup A = A$;

3′. $A \sqcup I = I$, $I \sqcup A = I$; $\quad$ 4′. $(A \sqcup B)^T = B^T \sqcup A^T$;

5′. $A \sqcup (B \cap C) = (A \sqcup B) \cap (A \sqcup C)$, $\quad (A \cap B) \sqcup C = (A \sqcup C) \cap (B \sqcup C)$;

6′. $A \sqcup (B \cup C) \supseteq (A \sqcup B) \cup (A \sqcup C)$, $\quad (A \cup B) \sqcup C \supseteq (A \sqcup C) \cup (B \sqcup C)$.

Справедливо также:

$$A \sqcap (B \sqcup C) \subseteq (A \sqcap B) \sqcup C, \qquad (A \sqcup B) \sqcap C \subseteq A \sqcup (B \sqcap C). \tag{1}$$

Здесь $E = (\delta_j^i)$ есть единичная матрица соответствующего размера (δ_j^i принимает значение 1, если $i = j$, и значение 0, если $i \neq j$); O и I определенные выше матрицы соответствующего размера; A^T означает транспонирование матрицы A.

Пусть символ $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ обозначает множество всех матриц конечных размеров, т. е. $\mathbf{M}(\mathbf{B}) = \bigcup\limits_{m,n \in \mathbf{N}} \mathbf{B}_{m\times n}$.

Конъюнктное и дизъюнктное произведения являются ассоциативными, поэтому пары $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ образуют частичные полугруппы относительно частичных, т. е. определенных не для всевозможных пар матриц, бинарных операций. При этом неравенство $A \subseteq B$ влечёт $A \sqcap C \subseteq B \sqcap C$, $C \sqcap A \subseteq C \sqcap B$ и $A \sqcup C \subseteq B \sqcup C$, $C \sqcup A \subseteq C \sqcup B$, что следует из свойств 5 или 6, а также 5′ или 6′ предложения 1 соответственно. Дополнение булевых матриц, рассматриваемое как отображение $' : \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, в силу равенства $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ является изоморфизмом частичных полугрупп.

Структура частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ в терминах идеалов изучалась в [1]. Здесь мы изучаем свойства алгебры $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap, \sqcup \rangle$, в которой равенства $A \sqcap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup C$ или $A \sqcup (B \sqcap C) = (A \sqcup B) \sqcap C$ в общем случае не выполняются (свойство (1)).

В связи с большим количеством приложений идемпотентные матрицы с элементами из решеток являются темой и объектом изучения многочисленных публикаций, среди которых мы приводим лишь малую часть. Так, обзор достижений в этом направлении и описание матричных идемпотентов над бинарной булевой алгеброй можно найти в [2]. Решеточное строение множества идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками исследуется в [3].

В следующем параграфе исследуются признаки совместности простейших матричных уравнений. Показано, в частности, что для любой булевой матрицы A произвольного размера выполняются равенства

$$A = (A \sqcap A'^T) \sqcup A = A \sqcap (A'^T \sqcup A) = (A \sqcup A'^T) \sqcap A = A \sqcup (A'^T \sqcap A).$$

Здесь и далее полагаем, что $A'^T = (A^T)' = (A')^T$.

В параграфе 3 изучаются свойства произведений $A \sqcap A'^T$, $A'^T \sqcap A$, $A^T \sqcap A'$, $A' \sqcap A^T$, $A \sqcup A'^T$, $A'^T \sqcup A$, $A^T \sqcup A'$, $A' \sqcup A^T$. Показано, что все они являются идемпотентами особого типа, названного вторичным, в соответствующих частичных полугруппах $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Далее мы показываем, что порождаемость двумя матрицами одного и того же главного правого (левого) идеала частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (или $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$) булевых матриц всевозможных размеров влечёт совпадение соответствующих им вторичных идемпотентов (теорема 3.2). Указывается также связь разрешимости простейших матричных уравнений со вторичными идемпотентами. Исследуется проблема делимости вторичных идемпотентов. В частности показано, что из левой делимости вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ следует их правая делимость.

В последнем параграфе устанавливается связь произвольных идемпотентов со вторичными, изучаются и их свойства. Показано, во-первых, что транзитивно-рефлексивное замыкание любого идемпотента частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (которое, очевидно, совпадает с его рефлексивным замыканием) есть вторичный идемпотент. Во-вторых, для всякого транзитивно-рефлексивного замыкания $\overline{A}$ произвольной квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ найдется матрица X (не обязательно квадратная), что $X \sqcup X'^T = \overline{A}$.

1. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Следующее предложение является модифицированной формой результата, принадлежащего Люцу [4, 5], для случая булевых матриц произвольных согласованных размеров над произвольной булевой алгеброй. Более того, оно обобщает на булевы матрицы известные эквивалентности: $a \cap x \subseteq b \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x \subseteq a' \cup b$ и $a \cup x \supseteq b \leftrightarrow x \supseteq a' \cap b$, которые справедливы для элементов a, b и x произвольной булевой алгебры.

Теорема 1.1. *Для любых булевых матриц A, B и X согласованных размеров выполняется следующие эквивалентности:*

$$\begin{aligned} A \sqcap X \subseteq B \quad &\longleftrightarrow \quad X \subseteq A'^T \sqcup B; \\ X \sqcap A \subseteq B \quad &\longleftrightarrow \quad X \subseteq B \sqcup A'^T; \\ A \sqcup X \supseteq B \quad &\longleftrightarrow \quad X \supseteq A'^T \sqcap B; \\ X \sqcup A \supseteq B \quad &\longleftrightarrow \quad X \supseteq B \sqcap A'^T. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить первую эквивалентность неравенств, так как остальные доказываются аналогичным образом. Сделаем это поэлементно:

$$\begin{gathered} A \sqcap X \subseteq B \quad \longleftrightarrow \quad (\forall\ i,j) \bigcup_k \{A_k^i \cap X_j^k\} \subseteq B_j^i \quad \longleftrightarrow \quad (\forall\ i,j,k) A_k^i \cap X_j^k \subseteq B_j^i \quad \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \quad (\forall\ i,j,k) X_j^k \subseteq (A_k^i)' \cup B_j^i \longleftrightarrow \quad (\forall\ i,j,k) X_j^k \subseteq ((A^T)_i^k)' \cup B_j^i \quad \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \quad (\forall\ k,j) X_j^k \subseteq \bigcap_i \{((A^T)_i^k)' \cup B_j^i\} \quad \longleftrightarrow \quad X \subseteq (A^T)' \sqcup B. \end{gathered}$$ □

Теорема 1.2. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B и переменной X выполняются следующие критерии совместности уравнений:*

$$\begin{aligned} (\exists\ X) \quad A \sqcap X = B \quad &\longleftrightarrow \quad (A \sqcap A'^T) \sqcup B = A \sqcap (A'^T \sqcup B) = B; \\ (\exists\ X) \quad X \sqcap A = B \quad &\longleftrightarrow \quad B \sqcup (A'^T \sqcap A) = (B \sqcup A'^T) \sqcap A = B; \\ (\exists\ X) \quad A \sqcup X = B \quad &\longleftrightarrow \quad (A \sqcup A'^T) \sqcap B = A \sqcup (A'^T \sqcap B) = B; \\ (\exists\ X) \quad X \sqcup A = B \quad &\longleftrightarrow \quad B \sqcap (A'^T \sqcup A) = (B \sqcap A'^T) \sqcup A = B. \end{aligned}$$

Доказательство. Проверим первую эквивалентность. Пусть существует решение X уравнения $A \sqcap X = B$. Тогда $A \sqcap X \subseteq B$, что эквивалентно $X \subseteq A'^T \sqcup B$. Умножая последнее неравенство слева на матрицу A и применяя (1), получаем $B = A \sqcap X \subseteq A \sqcap (A'^T \sqcup B) \subseteq (A \sqcap A'^T) \sqcup B$. Заметим, что $A \sqcap A'^T \subseteq E'$, так как каждый элемент главной диагонали квадратной матрицы $A \sqcap A'^T$ есть 0. Окончательно получаем:

$$B = A \sqcap X \subseteq A \sqcap (A'^T \sqcup B) \subseteq (A \sqcap A'^T) \sqcup B \subseteq E' \sqcup B = B.$$

Таким образом, $A \sqcap (A'^T \sqcup B) = (A \sqcap A'^T) \sqcup B = B$.

С другой стороны, очевидно, из равенства $A \sqcap (A'^T \sqcup B) = B$ следует разрешимость уравнения $A \sqcap X = B$.

Остальные эквивалентности доказываются по аналогии. □

Теорема 1.3. *Для любой булевой матрицы A произвольного размера выполняются равенства:*

$$A = (A \sqcap A'^T) \sqcup A = A \sqcap (A'^T \sqcup A) = (A \sqcup A'^T) \sqcap A = A \sqcup (A'^T \sqcap A).$$

Доказательство. Указанные равенства следуют из теоремы 1.2 и того, что уравнения $A \sqcap X = A$ и $A \sqcup X = A$ всегда имеют решения $X = E$ и $X = E'$ соответственно. □

2. ВТОРИЧНЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ

Теорема 2.1. *Квадратные матрицы $A \sqcup A'^T$, $A'^T \sqcup A$, $A^T \sqcup A'$, $A' \sqcup A^T$ являются идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, а матрицы $A \sqcap A'^T$, $A'^T \sqcap A$, $A^T \sqcap A'$, $A' \sqcap A^T$ — идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение только для первой матрицы $A \sqcup A'^T$. С одной стороны, применяя (1) и теорему 1.3, получаем

$$(A \sqcup A'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) \subseteq A \sqcup (A'^T \sqcap (A \sqcup A'^T)) = A \sqcup A'^T.$$

С другой стороны,

$$(A \sqcup A'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) \supseteq (A \sqcup A'^T) \sqcap E = A \sqcup A'^T,$$

так как $E \subseteq A \sqcup A'^T$. □

Пусть $A^{\mathcal{R}} = A \sqcup A'^T$ и $A^{\mathcal{L}} = A'^T \sqcup A$ обозначают идемпотенты в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, порождённые матрицей A. Так как $(A^{\mathcal{R}})'^T = (A \sqcup A'^T)'^T = A \sqcap A'^T$ и $(A^{\mathcal{L}})'^T = (A'^T \sqcup A)'^T = A'^T \sqcap A$, то $(A^{\mathcal{R}})'^T$ и $(A^{\mathcal{L}})'^T$ обозначают идемпотенты, порождённые матрицей A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.

Теорема 2.2. *Справедливы следующие равенства:*

$$A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} \quad \text{и} \quad A^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}}.$$

Доказательство. Имеем

$$(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A \sqcup A'^T) \sqcup (A \sqcup A'^T)'^T = (A \sqcup A'^T) \sqcup (A \sqcap A'^T) = A \sqcup (A'^T \sqcup (A \sqcap A'^T)) = A \sqcup A'^T = A^{\mathcal{R}}.$$

Аналогично,

$$(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = (A \sqcup A'^T)'^T \sqcup (A \sqcup A'^T) = (A \sqcap A'^T) \sqcup (A \sqcup A'^T) = ((A \sqcap A'^T) \sqcup A) \sqcup A'^T = A \sqcup A'^T = A^{\mathcal{R}}.$$

Равенство $A^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}}$ следует из того, что $A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}}$, и равенств $(A'^T)^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{R}}$, $(A'^T)^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$. □

Теорема 2.3. *Для всякой идемпотентной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ булевой матрицы A выполняется одно из следующих двух условий: 1) $A \subsetneqq A^{\mathcal{R}}$ и $A \subsetneqq A^{\mathcal{L}}$; 2) $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Пусть $A = A \sqcap A$, тогда из (1) и неравенства $A \sqcup A'^T \supseteq E$ следует

$$A^{\mathcal{R}} = A \sqcup A'^T = (A \sqcap A) \sqcup A'^T \supseteq A \sqcap (A \sqcup A'^T) \supseteq A \sqcap E = A.$$

Аналогично можно доказать неравенство $A \subseteq A'^T \sqcup A = A^{\mathcal{L}}$.

Предположим теперь, что $A = A^{\mathcal{R}}$. Тогда, применяя теорему 2.2, получаем $A = A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{L}}$. □

Определение 2.1. Назовем идемпотент A частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ *первичным*, если выполняется условие $A \neq A^{\mathcal{R}}$, и *вторичным*, если $A = A^{\mathcal{R}}$, т. е. $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Аналогичные условия определяют вторичные идемпотенты частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$: $A = A \sqcap A'^T = A'^T \sqcap A$ или $A = (A^{\mathcal{R}})'^T = (A^{\mathcal{L}})'^T$.

Пример 2.1. Так как $O'^T \sqcup O = I$ и $E = E'^T \sqcup E = E \sqcup E'^T$, $I = I'^T \sqcup I = I \sqcup I'^T$, то матрица O является первичным идемпотентом, а матрицы E и I — вторичными идемпотентами в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Матрица $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является первичным идемпотентом в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, так как

$$D \sqcap D = D \quad \text{и} \quad D \sqcup D'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq D'^T \sqcup D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ также даёт пример первичного идемпотента, но для неё выполняется $C \sqcup C'^T = C'^T \sqcup C \neq C$.

Теорема 2.4. *Множество вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и множество вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ не пересекаются.*

Доказательство. Заметим, что неравенства $E \subseteq A \sqcup A'^T = A^{\mathcal{R}}$ и $(B^{\mathcal{R}})'^T = B \sqcap B'^T \subseteq E'$ справедливы для любых матриц A и B соответствующих размеров. Тогда предположение, что для некоторых матриц A и B выполняется равенство $A^{\mathcal{R}} = (B^{\mathcal{R}})'^T$, приводит к противоречию. □

3. РАЗРЕШИМОСТЬ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВТОРИЧНЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ

Теорема 3.1. *Пусть булевы матрицы A и B подходящих размеров. Тогда*

$$\begin{array}{llll}
(\exists\ X) & A \sqcup X = B & \longrightarrow\ A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} & \longrightarrow\ A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}};\\
(\exists\ X) & A \sqcap X = B & \longrightarrow\ B^{\mathcal{R}} \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} & \longrightarrow\ A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}};\\
(\exists\ X) & X \sqcup A = B & \longrightarrow\ A^{\mathcal{L}} \sqcap B^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{L}} & \longrightarrow\ A^{\mathcal{L}} \subseteq B^{\mathcal{L}};\\
(\exists\ X) & X \sqcap A = B & \longrightarrow\ B^{\mathcal{L}} \sqcap A^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{L}} & \longrightarrow\ A^{\mathcal{L}} \subseteq B^{\mathcal{L}}.
\end{array}$$

Доказательство. Из теоремы 1.2 и совместности уравнения $A \sqcup X = B$ имеем $(A \sqcup A'^T) \sqcap B = B$. Используя соотношения (1), получим

$$B \sqcup B'^T = E \sqcap (B \sqcup B'^T) \subseteq (A \sqcup A'^T) \sqcap (B \sqcup B'^T) \subseteq ((A \sqcup A'^T) \sqcap B) \sqcup B'^T = B \sqcup B'^T.$$

Следовательно, $(A \sqcup A'^T) \sqcap (B \sqcup B'^T) = B \sqcup B'^T$, т. е. $A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$.

Равенство $A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$ влечёт $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$. Действительно, так как $E \subseteq B^{\mathcal{R}}$, то $A^{\mathcal{R}} \sqcap E \subseteq A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}}$. Это означает, что $A^{\mathcal{R}} \subseteq A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}}$ для любых вторичных идемпотентов $A^{\mathcal{R}}$ и $B^{\mathcal{R}}$, а значит, $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$.

Из совместности уравнения $A \sqcap X = B$ имеем $(A \sqcap A'^T) \sqcup B = B$ или эквивалентное равенство $B'^T \sqcap (A \sqcup A'^T) = B'^T$. Тогда

$$B \sqcup B'^T = (B \sqcup B'^T) \sqcap E \subseteq (B \sqcup B'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) \subseteq B \sqcup (B'^T \sqcap (A \sqcup A'^T)) = B \sqcup B'^T.$$

Получили $(B \sqcup B'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) = B \sqcup B'^T$, т. е. $B^{\mathcal{R}} \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$, что тоже влечет неравенство $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$.

Остальные импликации теоремы проверяются по аналогии. □

Разбиения частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, определяемые множествами главных правых и главных левых идеалов, позволяют определить эквивалентности на $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, которые, как и в теории полугрупп, будем называть $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-отношения Грина на частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ соответственно (см. [1, 6]). Аналогичное замечание можно сделать и для частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.

Следующая теорема объясняет наш выбор используемых обозначений вторичных идемпотентов $\mathcal{R}$-типа: $A^{\mathcal{R}}$ и $(A^{\mathcal{R}})'^T$, или $\mathcal{L}$-типа: $A^{\mathcal{L}}$ и $(A^{\mathcal{L}})'^T$ для частичных полугрупп $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ соответственно.

Теорема 3.2. *Порождаемость матрицами одного и того же одностороннего (правого или левого) главного идеала частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (или $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$) влечёт совпадение вторичных идемпотентов, соответствующих этим матрицам.*

Доказательство. Если A и B порождают один и тот же (допустим, правый) идеал в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, то $(\exists\ X) A \sqcap X = B$ и $(\exists\ Y) B \sqcap Y = A$. Тогда из теоремы 3.1 получаем $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$ и $A^{\mathcal{R}} \supseteq B^{\mathcal{R}}$, т. е. $A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$. □

Теорема 3.3. *Односторонний идеал, порождённый вторичным идемпотентом, не может порождаться другим вторичным идемпотентом.*

Доказательство По теореме 2.2 выполняются равенства $(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{R}}$ и $(A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$. Тогда утверждение непосредственно следует из теоремы 3.2. □

Пример 3.1. Легко проверяется, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ порождают один и тот же правый идеал частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Можно также показать, что $A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} = A'^T$.

В случае, когда матрица A в теореме 3.1 является вторичным идемпотентом, некоторые импликации этой теоремы становятся эквивалентностями. А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B и переменной X выполняются следующие критерии совместности уравнений:*

$$(\exists\ X)\quad A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B \quad\longleftrightarrow\quad (A^{\mathcal{R}})'^T \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \quad\longleftrightarrow\quad A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B; \tag{2}$$

$$(\exists\ X)\quad X \sqcap A^{\mathcal{R}} = B \quad\longleftrightarrow\quad B \sqcup (A^{\mathcal{R}})'^T = B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B \quad\longleftrightarrow\quad B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B; \tag{3}$$

$$(\exists\, X) \quad A^{\mathcal{R}} \sqcup X = B \quad \longleftrightarrow \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap B = A^{\mathcal{R}} \sqcup ((A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcap B) = B \longrightarrow \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B; \tag{4}$$

$$(\exists\, X) \quad X \sqcup A^{\mathcal{R}} = B \quad \longleftrightarrow \quad B \sqcap A^{\mathcal{R}} = (B \sqcap (A^{\mathcal{R}})'^{T}) \sqcup A^{\mathcal{R}} = B \longrightarrow \quad B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B. \tag{5}$$

Доказательство. Используя теорему 1.2, получаем:

$$(\exists\, X)A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B \quad \longleftrightarrow \quad (A^{\mathcal{R}} \sqcap (A^{\mathcal{R}})'^{T}) \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B) = B \quad \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \quad (A^{\mathcal{R}} \sqcup (A^{\mathcal{R}})'^{T})'^{T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B) = B \quad \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \quad ((A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B) = B \quad \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \quad (A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \quad \longrightarrow \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \longrightarrow (\exists\, X)A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B.$$

Таким образом, $(\exists\, X)A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B \quad \longleftrightarrow \quad (A^{\mathcal{R}})'^{T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \quad \longleftrightarrow \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B.$

Аналогично проверяются остальные эквивалентности и импликации. □

Замечание. В формулах теоремы 3.4 можно заменить матрицу $A^{\mathcal{R}}$ на $A^{\mathcal{L}}$, так как $(A'^{T})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Следствие 3.5. *Для любого вторичного идемпотента $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и матрицы B согласованного размера выполняются импликации:*

$$(\exists\, X) \quad A \sqcup X = B \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad A \sqcap X = B,$$
$$(\exists\, X) \quad X \sqcup A = B \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad X \sqcap A = B.$$

Доказательство. Так как $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$, то утверждения следуют из (4) и (5). □

Следствие 3.6. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B выполняются импликации:*

$$(\exists\, X) \quad A \sqcup X = B^{\mathcal{R}} \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B^{\mathcal{R}}, \tag{6}$$
$$(\exists\, X) \quad A \sqcap X = B^{\mathcal{R}} \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad X \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}, \tag{7}$$
$$(\exists\, X) \quad X \sqcup A = B^{\mathcal{R}} \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad A^{\mathcal{L}} \sqcap X = B^{\mathcal{R}}, \tag{8}$$
$$(\exists\, X) \quad X \sqcap A = B^{\mathcal{R}} \quad \longrightarrow \quad (\exists\, X) \quad X \sqcap A^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{R}}.$$

Выполняются также импликации, которые получаются из предыдущих заменой в них матрицы $B^{\mathcal{R}}$ на матрицу $B^{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Указанные импликации получаются из теоремы 3.1 и формул теоремы 2.2 заменой B на $B^{\mathcal{R}}$ (или B на $B^{\mathcal{L}}$). □

Определение 3.1. Будем говорить, что *матрица B $\sqcap$-делится на A слева* в частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если уравнение $A \sqcap X = B$ имеет решение, и *справа*, если имеет решение уравнение $X \sqcap A = B$.

Правая и левая $\sqcup$-делимость в частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ определяются аналогично.

Теорема 3.7. *Для вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ выполняются следующие утверждения:*

a) правая (или левая) $\sqcup$-делимость этих идемпотентов влечёт их правую и левую $\sqcap$-делимость;

b) левая $\sqcap$-делимость этих идемпотентов влечёт их правую $\sqcap$-делимость.

Доказательство. Импликации (6) и (8) и равенства $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и $B = B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{L}}$ дают то, что правая или левая $\sqcup$-делимость идемпотентов A и B влечёт их левую $\sqcap$-делимость.

То, что левая $\sqcap$-делимость вторичных идемпотентов A и B влечёт их правую $\sqcap$-делимость, из (7) следует . □

Определение 3.2. Определим $B \leq A$ для идемпотентов B и A частичной полугруппы всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если $B \sqcap A = A \sqcap B = B$.

Легко проверяется, что это бинарное отношение является частичным порядком [6, § 1.8] и называется естественным частичным порядком на множестве идемпотентов.

Теорема 3.8. *Для вторичных идемпотентов $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и $B = B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{L}}$ выполняется $B \leq A$ тогда и только тогда, когда $A \sqcap B = B$.*

Доказательство. Из b) следствия 3.7 и формул (2) и (3) получаем, что из $A \sqcap B = B$ следует $B \sqcap A = B$. □

4. СВОЙСТВА МАТРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ И ТРАНЗИТИВНО-РЕФЛЕКСИВНЫХ ЗАМЫКАНИЙ

Утверждение следующей теоремы для случая брауэровых решеток было получено в [3, лемма 2.3].

Теорема 4.1. *Пусть A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Матрица A есть вторичный идемпотент тогда и только тогда, когда $E \subseteq A$.*

Доказательство. Из $E \subseteq A$ следует $E'^T \supseteq A'^T$. Тогда $A = A \sqcup E'^T \supseteq A \sqcup A'^T$. Так как для любого идемпотента выполняется $A \subseteq A \sqcup A'^T$ (см. теорему 2.3), получаем $A = A \sqcup A'^T$. Следовательно, $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Заметим, что если A есть вторичный идемпотент, то $A = A \sqcup A'^T = A'^T \sqcup A \supseteq E$. □

Теорема 4.2. *Пусть A — произвольный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и E — единичная матрица того же размера, тогда $E \cup A$ является вторичным идемпотентом.*

Доказательство. Учитывая теорему 4.1, достаточно показать, что объединение любого идемпотента с единичной матрицей того же размера есть идемпотент. Действительно, так как $A = A \sqcap A = A^2$, то из $(E \cup A)^2 = (E \cup A) \sqcap (E \cup A) = E \cup A \cup A^2$ получаем $(E \cup A)^2 = E \cup A$. □

Пример 4.1. Матрица D из примера 2.1 и матрица $D \cup E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются первичным и вторичным идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ соответственно. Однако вторичные идемпотенты $D \cup E$, $D^{\mathcal{R}}$ и $D^{\mathcal{L}}$ являются различными.

Для первичного идемпотента C из примера 2.1 выполняются равенства $C \cup E = C^{\mathcal{R}} = C^{\mathcal{L}}$.

Теорема 4.3. *Пусть для некоторых матриц A, B выполняется $B \sqcap A = A$. Тогда из неравенства $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Соответственно из $A \sqcap B = A$ и $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.*

В частности, из $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ или $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — вторичный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, т. е. $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Умножая справа неравенство $B \subseteq A \subseteq A \sqcup A'^T$ на A, получаем $B \sqcap A \subseteq A \sqcap A \subseteq (A \sqcup A'^T) \sqcap A$. Применяя формулы из теоремы 1.3, получаем $A \subseteq A \sqcap A \subseteq A$, т. е. $A = A \sqcap A$.

Аналогично проверяется то, что из $A \sqcap B = A$ и $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Тогда по теореме 4.2 получаем, что неравенства $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ влекут то, что A — идемпотент, причем вторичный. □

Теорема 4.4. *Для любой квадратной матрицы X верны эквивалентности:*

$$(X \cup E) \subseteq (X \cup E)^{\mathcal{R}} \longleftrightarrow (X \cup E) \subseteq (X \cup E)^{\mathcal{L}} \longleftrightarrow (X \cup E) = (X \cup E)^{\mathcal{R}} \longleftrightarrow (X \cup E) = (X \cup E)^{\mathcal{L}}.$$

Причём идемпотентные в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ матрицы (такого же размера, как и указанная матрица E) являются решениями этих эквивалентных неравенств и уравнений.

Доказательство. Очевидно, из теорем 2.3, 4.1 и 4.3 следуют эквивалентности:

$$E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}} \longleftrightarrow E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}} \longleftrightarrow A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}} \longleftrightarrow A = A^{\mathcal{R}} \longleftrightarrow A = A^{\mathcal{L}}.$$

Учитывая это замечание, получаем утверждение теоремы 4.4. □

Однако не всякое решение X неравенств или уравнений, указанных в теореме 4.4, является идемпотентом. Матрица $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ не является идемпотентной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, но $X \cup E$ есть вторичный идемпотент (см. пример 4.1) и, следовательно, удовлетворяет указанным выше соотношениям.

Определение 4.1. *Рефлексивным замыканием* квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ называют матрицу $E \cup A$. *Транзитивно-рефлексивным замыканием* квадратной матрицы A в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ называют матрицу $\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k = E \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$, где A^k обозначает конъюнктное произведение $A \sqcap \ldots \sqcap A$, содержащее k сомножителей.

Для идемпотентных матриц понятия «рефлексивное замыкание» и «транзитивно-рефлексивное замыкание», очевидно, совпадают. Очевидно также, что транзитивно-рефлексивное замыкание любого идемпотента есть вторичный идемпотент. Более того, транзитивно-рефлексивное замыкание всякой квадратной матрицы является идемпотентом, причем, учитывая теорему 4.1, вторичным. Наоборот, всякий вторичный идемпотент совпадает со своим транзитивно-рефлексивным замыканием. Таким образом, указанные в теореме 3.7 свойства делимости для вторичных идемпотентов становятся свойствами транзитивно-рефлексивных замыканий.

Замечание. Пусть $\overline{A}$ — транзитивно-рефлексивное замыкание произвольной булевой квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Тогда уравнение $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ разрешимо.

Действительно, так как транзитивно-рефлексивное замыкание $\overline{A}$ есть вторичный идемпотент, то в качестве решения X уравнения $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ можно взять любую матрицу, порождающую тот же правый идеал в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, что и идемпотент $\overline{A}$ (см. теорему 3.2).

Аналогично, решением уравнения $X'^T \sqcup X = \overline{A}$ может быть любая матрица, порождающая тот же левый идеал, что и идемпотент $\overline{A}$.

Следующий пример показывает, что решения уравнения $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ (или $X'^T \sqcup X = \overline{A}$) и матрица $\overline{A}$ могут порождать разные односторонние идеалы.

Пример 4.2. Легко проверить, что матрицы $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ удовлетворяют равенству $X \sqcup X'^T = \overline{A}$. Причем матрицы X и A порождают один и тот же правый идеал (у них одинаковые столбцовые пространства, см. [1]). Однако матрицы X и $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ порождают разные односторонние идеалы.

Библиографический список

1. *Поплавский В. Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.
2. *Бисли Л. Б., Гутерман А. Э., Канг К.-Т., Сонг С.-З.* Идемпотентные матрицы и мажорирование // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 1. С. 11–29.
3. *Кумаров В. Б.* Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 121–144.
4. *Luce R. D.* A note on Boolean matrix theory // Proc. Am. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 382–388.
5. *Rudeanu S.* Boolean functions and equations. Amsterdam; London : North-Holland Publishing Company; N.Y. : American Elsevier Publishing Company, Inc. 1974. 442 p.
6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 287 с.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Доказана теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля.

Ключевые слова: некомпактные графы, обратные спектральные задачи, матрицы Вейля.

Uniqueness of Recovering Arbitrary Order Differential Operators on Noncompact Spatial Networks

V. A. Yurko

An inverse spectral problem is studied for arbitrary order differential operators on noncompact graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is proved.

Key words: noncompact graphs, inverse spectral problems, Weyl matrices.

1. Исследуется нелинейная обратная спектральная задача восстановления потенциалов дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графах изучалась в [1–8] и других