Библиографический список

1. *Джаков П. В., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182.
2. *Djakov P., Mityagin B.* Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283 (3). P. 443-462.
3. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 340 с.
5. *Бурлуцкая М. Ш.* Об асимптотике решения одного дифференциального уравнения первого порядка с непрерывным потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весенней мат. шк. «Понтрягинские чтения XXI». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж гос. ун-та, 2010. С. 3–9.
6. *Хромов А. П.* Об асимптотике решений уравнения Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж : Изд.-полиграф. центр Воронеж гос. ун-та, 2011. С. 346–347.
7. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М. : Наука, 1965. 445 с.

УДК 517.51

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ПО СИСТЕМЕ ХААРА НА НУЛЬ-МЕРНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

Н. Е. Комиссарова

Саратовский государственный университет
E-mail: NataliyaKomissarov@yandex.ru

На компактной нуль-мерной группе $(G, \dot{+})$ рассматриваются функции Лебега по системе Хаара. Указываются случаи, когда они являются постоянными, а также получаются двусторонние оценки для функций Лебега.

Ключевые слова: компактные нуль-мерные группы, функции Хаара, функции Лебега.

Lebesgue Functions for Haar System on Compact Zero-Dimensional Group

N. E. Komissarova

In this article we discuss Lebesgue functions for Haar system on compact zero-dimensional group. We find cases when they are constant, also we find two-sided estimates for Lebesgue functions.

Key words: compact zero-dimensional group, Haar functions, Lebesgue functions.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из [1] известно, что для констант Лебега L_N по системе характеров компактной нуль-мерной группы G справедливо неравенство $L_N \leq C \log N$. С. Ф. Лукомским в работе [2] были получены двусторонние оценки констант Лебега, причём в случае $p_n \leq p$ одинаковые по порядку. В [3] Б. И. Голубов рассматривал на отрезке $[0,1]$ класс полных ортогональных систем X, построенных по последовательности чисел $P = (p_n)_{n=0}^{\infty}$. Для функций Лебега $L_M(x), M = jm_N + q$ по таким системам получил оценку сверху $L_M(x) \leq C \log p_N$. Функции Хаара на произвольной нуль-мерной компактной группе G были определены в работе [4]. Причём если отобразить группу G на отрезок $[0,1]$ с помощью естественного отображения, то функции Хаара, определённые в [4] на нуль-мерной группе с точностью до меры нуль, совпадают с функциями из [3]. В данной работе изучаются функции Лебега по системе Хаара на компактной нуль-мерной группе и даются для них двусторонние оценки.

Пусть $(G, \dot{+})$ — нуль-мерная компактная абелева группа, топология в которой задана системой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$ таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$, $(G_n/G_{n+1})^{\sharp} = p_n$, где p_n — простые числа; μ — мера Хаара на G. Положим $m_0 = 1$, $m_{n+1} = p_n m_n$. Пусть далее $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ — базисная последовательность, т. е. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$. Напомним, что непрерывная функция $\chi : G \to \mathbb{C}$ называется характером, если 1) для всех $x \in G$ выполняется $|\chi(x)| = 1$, 2) $\chi(x \dot{+} y) = \chi(x)\chi(y)$.

Совокупность характеров χ, для которых $\chi(G_n) = 1$, называют аннулятором группы G_n и обозначают $G_n^{\perp}$.

Известно, что группа характеров группы G представляет из себя объединение возрастающей последовательности аннуляторов $\{1\} = G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \cdots \subset G_n^{\perp} \subset G_{n+1}^{\perp} \subset \ldots$ При любом $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$. Функцию r_n будем называть функцией Радемахера. Для функций Радемахера r_n имеем $r_n(G_{n+1}) = 1$.

В работе [2] была доказана лемма, в которой содержатся свойства функций Радемахера, а именно

Лемма 1. *Пусть* G_n/G_{n+1} *— фактор-группа,* $G_{n+1} \dot{+} g_n j \in G_n/G_{n+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$ *— смежные классы. Тогда*

1) $r_n(t)$ *постоянны на каждом смежном классе* $G_{n+1} \dot{+} g_n j$*;*

2) $r_n(G_{n+1} \dot{+} g_n j)$ *есть различные корни из единицы порядка* p_n*;*

3) $\sum\limits_{j=0}^{p_n-1} r_n^j(t) = \begin{cases} p_n, & t \in G_{n+1}, \\ 0, & t \in G_n \backslash G_{n+1}; \end{cases}$

4) $\prod\limits_{k=0}^{\nu} \sum\limits_{j=0}^{p_k-1} (r_k(t))^j = \begin{cases} m_\nu, & t \in G_{\nu+1}, \\ 0, & t \in G_\nu \backslash G_{\nu+1}. \end{cases}$

Определение. Функции H_{jm_n+k} $\left(j = \overline{1, p_n - 1}, k = \overline{0, m_n - 1}\right)$, определённые равенствами

$$H_0 \equiv 1, H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j (x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j (x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} h_k),$$

где $h_k \in G$ и $k \in \mathbb{N}_0$, связаны соотношениями

$$h_k = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad k = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \cdots + a_{n-1} m_{n-1} \qquad (a_i = \overline{0, p_i - 1}),$$

$\mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x)$ — характеристическая функция множества $G_n \dot{+} h_k$, будем называть *функциями Хаара на нуль-мерной группе.*

Функции H_0, H_{jm_n+k} были введены в работе [4]. Там же было доказано, что они образуют ортонормированную систему функций на G.

Обозначим через $L_M(x) = \int\limits_G \left| \sum\limits_{k=0}^{M-1} H_k(x) \overline{H_k(t)} \right| d\mu(t)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *функции Лебега по системе Хаара*. Любое число $M \in \mathbb{N}$ представимо в виде $M = b_N m_N + q$, где $1 \le b_N \le p_N - 1, 0 \le q \le m_N - 1$.

При доказательстве основных результатов данной работы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть дан отрезок* $[a, b]$*, причём* $1 < a < b$*. Тогда если* $l, l + 1, \ldots, l + k$ *— все целые числа, попадающие в данный отрезок, расположенные в порядке возрастания,* l *— наименьшее из этих чисел, то справедливо неравенство*

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} + \cdots + \frac{1}{l+k} \ge \frac{1}{3} \int\limits_a^b \frac{dx}{x}.$$

Лемма 3. *Для функций Лебега* $L_M(x)$ *справедливо неравенство*

$$L_M(x) \ge \frac{1}{p_N} \qquad (M = b_N m_N + q).$$

Доказательство. Из определения функций Хаара следует, что

$$\int\limits_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right|^2 d\mu(t) = \sum_{l=0}^{M-1} |H_l(x)|^2 \ge \sum_{l=0}^{m_N-1} |H_l(x)|^2 =$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}-1} |H_l(x)|^2 = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} m_j (p_j - 1) = m_N.$$

Поэтому

$$m_N \le \int\limits_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right|^2 d\mu(t) \le \int\limits_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right| d\mu(t) \sup_t \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) H_l(t) \right| \le$$

$$\leq L_M(x)\sup_t \sum_{l=0}^{m_{N+1}-1} |H_l(x)H_l(t)| \leq L_M(x)\left(1+\sum_{j=0}^{N}\sum_{l=m_j}^{m_{j+1}-1}|H_l(x)|^2\right) = L_M(x)m_{N+1}.$$

Отсюда находим, что $L_M(x) \geq \dfrac{m_N}{m_{N+1}} = \dfrac{1}{p_N}$. □

Замечание. Полученная оценка конечно является неточной, особенно при $p_N \to \infty$. В дальнейшем мы получим при $p_N \to \infty$ оценку снизу, точную по порядку.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы получим двусторонние оценки для функций Лебега при некоторых ограничениях на p_N и b_N, которые не являются принципиальными.

Теорема 1. *Пусть число M представлено в виде $M = b_N m_N + q$, где $1 \leq b_N \leq p_N - 1$, $0 \leq q \leq m_N - 1$. Тогда 1) если $M = m_N$, то $L_{m_N} \equiv 1$, 2) если $M = b_N m_N$, то $L_{b_N m_N}(x) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим функции Лебега с номерами $M = m_N$.

$$L_{m_N} = \int_G |K_{m_N}(x,t)|d\mu(t) = \int_G \left|\sum_{l=0}^{m_N-1} H_l(x)\overline{H_l(t)}\right| d\mu(t).$$

Выпишем ядро Лебега и преобразуем его:

$$K_{m_N}(x,t) = 1 + \sum_{l=1}^{m_N-1} H_l(x)\overline{H_l(t)} = 1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1}\sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x\dot{-}h_k)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(x)\overline{r_n^j(t\dot{-}h_k)}\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(t) =$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x\dot{-}h_k\dot{+}h_k\dot{-}t)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(x)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(t)\right) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1} m_n r_n^j(x\dot{-}t)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}t).$$

Тогда, учитывая инвариантность интеграла относительно сдвига, получим

$$L_{m_n}(x) = \int_G \left|1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1} m_n r_n^j(x\dot{-}t)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}t)\right| d\mu(t) =$$

$$= \int_G \left|1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1} m_n \overline{r}_n^j(t\dot{-}x)\mathbf{1}_{G_n}(t\dot{-}x)\right| d\mu(t) = \int_G \left|1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1} m_n \overline{r}_n^j(t)\mathbf{1}_{G_n}(t)\right| d\mu(t).$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{p_n-1} \overline{r}_n^j(t)\mathbf{1}_{G_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin G_n, \\ -1, & t \in G_n \backslash G_{n+1}, \\ p_n - 1, & t \in G_{n+1}, \end{cases}$ то получим

$$L_{m_N} = \int_G \left|1 + \sum_{n=0}^{N-1}[(m_{n+1}-m_n)\mathbf{1}_{G_{n+1}}(t) - m_n\mathbf{1}_{G_n\backslash G_{n+1}}(t)]\right| d\mu(t) = \int_G |\mathbf{1}_{G_N}(t)m_N|\, d\mu(t) = 1.$$

2) Пусть теперь $M = b_N m_N$ ($b_N \geq 2$). В этом случае

$$K_M(x,t) = K_{b_N m_N}(x,t) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1}\sum_{k=0}^{m_n-1} H_{jm_n+k}(x)\overline{H_{jm_n+k}(t)} + \sum_{j=1}^{b_N-1}\sum_{k=0}^{m_N-1} H_{jm_N+k}(x)\overline{H_{jm_N+k}(t)}.$$

И для функций Лебега получим выражение следующего вида:

$$L_M(x) = L_{b_N m_N}(x) = \int_G \left|1 + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p_n-1}\sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x\dot{-}h_k)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(x)\overline{r}_n^j(t\dot{-}h_k)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_k}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{b_N-1}\sum_{k=0}^{m_N-1} m_N r_N^j(x\dot{-}h_k)\mathbf{1}_{G_N\dot{+}h_k}(x)\overline{r}_N^j(t\dot{-}h_k)\mathbf{1}_{G_N\dot{+}h_k}(t)\right| d\mu(t) =$$

$$= \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N + \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N r_N^j (x\dot{-}t) \mathbf{1}_{G_N}(x\dot{-}t) \right| d\mu(t) =$$

$$= \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N + \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N \overline{r}_N^j(t) \mathbf{1}_{G_N}(t) \right| d\mu(t) = \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N \sum_{j=0}^{b_N-1} \overline{r}_N^j(t) \right| d\mu(t).$$

И снова $L_M(x) = L_{b_N m_N} = \text{const}$, т. е. не зависит от x. $\square$

Теорема 2. *Если* $M = b_N m_N + q$ $(p_N > 2,\ 2 \le b_N \le p_N - 1,\ 0 \le q \le m_N - 1)$, *то для всякого* $x \in G$ *справедливо неравенство*

$$\max\left(\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln \nu_N - 2, \frac{1}{p_N} \right) \le L_M(x) \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln \nu_N + 5,$$

где $\nu_N = min\{b_N - 1, p_N - (b_N - 1)\}$.

Доказательство. Если $M = b_N m_N + q$, то ядро Лебега будет иметь вид

$$K_M(x,t) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} H_{jm_n+k}(x) \overline{H_{jm_n+k}(t)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} H_{jm_N+k}(x) \overline{H_{jm_N+k}(t)} + \sum_{k=0}^{q-1} H_{b_N m_N+k}(x) \overline{H_{b_N m_N+k}(t)} = 1 + S_1 + S_2 + S_3.$$

Отметим, что последняя сумма есть функция от x, так как при некоторых значениях аргумента x мы попадаем в смежные классы, которые не участвуют в суммировании. Будем считать, что $b_N > 1$, так как при $b_N = 1$ сумма $S_2 = 0$. Введём следующие обозначения:

$$I_1 = \int_G |1 + S_1|\, d\mu(t), \qquad I_2 = \int_G |S_2|\, d\mu(t), \quad I_3 = \int_G |S_3|\, d\mu(t).$$

Интеграл I_1 уже вычислен при доказательстве теоремы 1: $I_1 = 1$.

Оценим интеграл I_3:

$$I_3 = \int_G \left| \sum_{k=0}^{q-1} H_{b_N m_N+k}(x) \overline{H_{b_N m_N+k}(t)} \right| d\mu(t) = \int_G \left| \sum_{k=0}^{q-1} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(x) \overline{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(t) \right| d\mu(t).$$

Если $x \in G_N \dot{+} h_l$, то

$$\sum_{k=0}^{q-1} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(x) \overline{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(t) =$$

$$= \begin{cases} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_l}(x) \overline{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_l}(t), & \text{если} \quad h_l \in \bigcup\limits_{k=0}^{q-1} G_N \dot{+} h_k, \\ 0, \quad \text{если} \quad h_l \notin \bigcup\limits_{k=0}^{q-1} G_N \dot{+} h_k. \end{cases}$$

Тогда если $h_l \notin \bigcup\limits_{k=0}^{q-1} G_N \dot{+} h_k$, то интеграл $I_3 = 0$. В противном случае, так как $\mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(x) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(t) = \mathbf{1}_{G_N}(x\dot{-}t)$, имеем

$$I_3 = \int_G \left| m_N r_N^{b_N}(x\dot{-}t) \mathbf{1}_{G_N}(x\dot{-}t) \right| d\mu(t) = \int_G m_N \left| \overline{r_N}^{b_N}(t) \right| \mathbf{1}_{G_N}(t) d\mu(t) = 1,$$

т. е. I_3 принимает значения 0 или 1, и справедливо $I_3 \le 1$.

Теперь будем рассматривать интеграл I_2.

$$I_2 = \int_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} H_{jm_N+k}(x) \overline{H_{jm_N+k}(t)} \right| d\mu(t) =$$

$$= \int\limits_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} m_N r_N^j(x) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k} \overline{r}_N^j(t) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(t) \right| d\mu(t) =$$

$$= \int\limits_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N \overline{r}_N^j(t \dot{-} x) \mathbf{1}_{G_N}(t \dot{-} x) \right| d\mu(t) = m_N \int\limits_{G_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \overline{r}_N^j(t) \right| d\mu(t).$$

Отдельно рассмотрим подынтегральное выражение, учитывая, что $\overline{r}_N(t) = \exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right)$ при $t \in G_{N+1} \dot{+} l g_N$ — одно из значений корня из единицы порядка p_n:

$$\left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \overline{r}_N^j(t) \right| = \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \exp\left(\frac{2\pi i l j}{p_N}\right) \right| = \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right|.$$

Сначала рассмотрим знаменатель:

$$\left| \exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1 \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi l}{p_N} \right|$$

и $4l/p_N \le |\exp(2\pi i l/p_N) - 1| \le 2\pi l/p_N$.

Оценка снизу справедлива, если $\pi l/p_N \in (0; \pi/2)$, т. е. при $l \in [1, (p_N - 1)/2]$.

Следовательно,

$$\frac{p_N}{2\pi l} \le \frac{1}{\left| \exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1 \right|} \le \frac{p_N}{4l}.$$

Если $l \in \left[\frac{p_N+1}{2}, p_N - 1\right]$, то $2\left|\sin \frac{\pi l}{p_N}\right| \ge 4 \frac{p_N - l}{p_N}$.

Выражение $\left| \exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1 \right| \ge \sqrt{2}$, если

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le \frac{2\pi l (b_N - 1)}{p_N} \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \qquad (k = \overline{0, b_N - 1}),$$

т. е.

$$\frac{p_N}{(b_N - 1)} \left(k + \frac{1}{4}\right) \le l \le \frac{p_N}{(b_N - 1)} \left(k + \frac{3}{4}\right), \qquad k = \overline{0, b_N - 1},$$

или если

$$l \in E = \bigsqcup_{k=0}^{b_N-1} \left(\frac{p_N}{b_N - 1} \left(k + \frac{1}{4}\right), \frac{p_N}{b_N - 1} \left(k + \frac{3}{4}\right) \right).$$

При этом при всех $l \in E$

$$\left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| \ge \frac{p_N}{\sqrt{2}\pi l}.$$

Оценка сверху для подынтегрального выражения получается в виде

$$\begin{cases} \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| \le \frac{p_N}{2l}, & \text{если} \quad l \in \left[1, \frac{p_N-1}{2}\right] \text{ и } \quad l \in E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| \le \frac{p_N}{2\sqrt{2}l}, & \text{если} \quad l \in \left[1, \frac{p_N-1}{2}\right] \text{ и } \quad l \notin E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| \le \frac{p_N}{2(p_N - l)}, & \text{если} \quad l \in \left[\frac{p_N+1}{2}, p_N - 1\right] \text{ и } \quad l \in E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| \le \frac{p_N}{2\sqrt{2}(p_N - l)}, & \text{если} \quad l \in \left[\frac{p_N+1}{2}, p_N - 1\right] \text{ и } \quad l \notin E. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\sum_{l=1}^{p_N-1}\left|\frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right)-1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right)-1}\right| = \sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}}\cdots+\sum_{l=\frac{p_N+1}{2}}^{p_N-1}\cdots\le$$

$$\le\sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}}\frac{p_N}{2l}+\sum_{l=\frac{p_N+1}{2}}^{p_N-1}\frac{p_N}{2(p_N-l)}=2\sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}}\frac{p_N}{2l}=p_N\sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}}\frac{1}{l}.$$

Оценим интеграл I_2 снизу.

$$I_2=m_N\int\limits_{G_N}\left|\sum_{j=1}^{b_N-1}\overline{r}_N^j(t)\right|d\mu(t)=m_N\sum_{l=0}^{p_N-1}\int\limits_{G_{N+1}\dot{+}lg_N}\left|\sum_{j=1}^{b_N-1}\overline{r}_N^j(t)\right|d\mu(t)=$$

$$=\frac{b_N-1}{p_N}+m_N\sum_{l=1}^{p_N-1}\int\limits_{G_{N+1}\dot{+}lg_N}\left|\sum_{j=1}^{b_N-1}\overline{r}_N^j(t)\right|d\mu(t)\ge\frac{b_N-1}{p_N}+\sum_{l\in E}\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{l}.$$

Рассмотрим последнюю сумму отдельно. Предварительно вычислим:

$$I_1^k=\int\limits_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{5}{4}\right)}\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{k+\frac{5}{4}}{k+\frac{1}{4}}\right),\qquad I_2^k=\int\limits_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)}\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{k+\frac{3}{4}}{k+\frac{1}{4}}\right).$$

Очевидно, что последовательность I_1^k/I_2^k ограничена. Легко видеть, что она монотонно убывает и $\max\limits_{k=0,b_N-1} I_1^k/I_2^k$ достигается при $k=0$. Следовательно, $I_1^k/I_2^k\le\ln 5/\ln 3$, т. е. $I_2^k\ge I_1^k\ln 3/\ln 5$.

Перейдём к оценке суммы. Используем лемму 2:

$$\sum=\sum_{l\in E}\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{l}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{l\in E}\frac{1}{l}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{k=0}^{b_N-1}\sum_{l=\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)}\frac{1}{l}\ge$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{k=0}^{b_N-1}\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)}\frac{dx}{x}\ge\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\sum_{k=0}^{b_N-1}\int\limits_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{5}{4}\right)}\frac{dx}{x}=\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\int\limits_{\frac{p_N}{b_N-1}\frac{1}{4}}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(b_N-1+\frac{1}{4}\right)}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\left(\ln\left(b_N-1+\frac{1}{4}\right)+\ln 4\right)\ge\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\ln\left(b_N-1\right).$$

Таким образом, получаем оценку вида

$$I_2\ge\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\ln(b_N-1).$$

В итоге для функций Лебега получаем неравенство

$$L_M(x)\ge I_2-I_1-I_3\ge I_2-2\ge\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\ln(b_N-1)-2.$$

Оценим теперь I_2 сверху.

$$I_2=m_N\int\limits_{G_N}\left|\sum_{j=1}^{b_N-1}\overline{r}_N^j(t)\right|\,d\mu(t)=\frac{b_N-1}{p_N}+m_N\sum_{l=1}^{p_N-1}\int\limits_{G_{N+1}\dot{+}g_Nl}\left|\sum_{j=1}^{b_N-1}\overline{r}_N^j(t)\right|d\mu(t)\le$$

$$\le\frac{b_N-1}{p_N}+\sum_{\substack{l=1\\ l\in E}}^{\frac{p_N-1}{2}}\frac{1}{2l}+\sum_{\substack{l=1\\ l\notin E}}^{\frac{p_N-1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}l}+\sum_{\substack{l=\frac{p_N+1}{2}\\ l\in E}}^{p_N-1}\frac{1}{2(p_N-l)}+\sum_{\substack{l=\frac{p_N+1}{2}\\ l\notin E}}^{p_N-1}\frac{1}{2\sqrt{2}(p_N-l)}=$$

$$= \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{\substack{l=1\\ l\in E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{l} + \sum_{\substack{l=1\\ l\notin E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}l} = \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \sum_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)} \frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \sum_{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)}^{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{5}{4}\right)} \frac{1}{l} \le$$

$$\le \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right) - \frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)}{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{5}{4}\right) - \frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)}{\frac{p_N}{b_N-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)} =$$

$$= \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{1}{2\left(k+\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{1}{2\left(k+\frac{3}{4}\right)} \le \frac{b_N-1}{p_N} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(b_N-1) + 2.$$

Следовательно,

$$L_M \le I_1 + I_2 + I_3 \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(b_N-1) + 5.$$

В итоге для функций Лебега при $b_N \ge 2$ получаем двусторонние оценки вида

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\ln(b_N-1) - 2 \le L_M \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(b_N-1) + 5.$$

Если $b_N = 1$, то в этом неравенстве надо опустить логарифм. При этом учитывалось условие $b_N \le \frac{p_N-1}{2}$.

В случае $b_N > \frac{p_N-1}{2}$, принимая во внимание равенство

$$\exp\left(-\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi il[(b_N-1)-p_N+p_N]}{p_N}\right) =$$
$$= \exp\left(-2\pi il\right)\cdot\exp\left(\frac{2\pi il(p_N-(b_N-1))}{p_N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}(p_N-(b_N-1))\right)$$

и проводя аналогичные рассуждения, получаем неравенство того же вида, что и в первом случае.

Итак, при $1 < b_N < p_N - 1$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\frac{\ln 3}{\ln 5}\ln\nu_N - 2 \le L_M(x) \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\nu_N + 5,$$

где $\nu_N = \min\{b_N-1, p_N-(b_N-1)\}$. Используя лемму 3 отсюда получаем требуемое неравенство.□

Замечание. Теорема 2 сформулирована и доказана для $p_N > 2$. При $p_N = 2$ для b_N остается единственная возможность $b_N = 1$. В этом случае, как мы видели из доказательства, $S_2 = 0$, и в окончательном неравенстве пропадает логарифм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097-а).

Библиографический список

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981.

2. *Lukomskii S. F.* On Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian groups // East J. of Approximation. 2009. Vol. 15, № 2. P. 219–233.

3. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сибирский мат. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 297–314.

4. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактных нуль-мерных группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 14–19.