Отметим, что во всех разобранных случаях волна (цикл) как бы состоит из двух полуволн, симметричных относительно двух осей, приходящихся на номера «одиночных» тонов и соответствующих символу $\overset{\vdots}{\underset{\vdots}{=}}$.

Таким образом, наблюдатель (находящийся в i-й точке), который не видит всю картину функционирования конечной системы в целом, однако видит последовательность биволн с двумя осями симметрии. Ему сложно уловить цикличность из-за «шумов». Лучше находиться на «пути», идущем от i-й точки к j-й точке ($i \neq j$), что соответствует элементам $(A^k)^i_j$ булевой матрицы A, определяющей некоторый осциллятор.

Замеченное наличие обертонов может оказаться весьма интересным, в частности для проблемы максимальной плотности элементов булевой матрицы, сформулированной в [5].

Библиографический список

1. *Luce R.D.* A note on Boolean matrix theory // Proc. Ammer Math. Soc. 1952. V. 3. P.382–388.

2. *Give'on Y.* Lattice matrices // Inform. And Control. 1964. V. 7, № 4. P. 477–484

3. *Kim Ki Hang*. Boolean matrix theory and applications. Pure and Applied Mathematics, 70. N. Y.; Basel: Marcel Dekker, Inc., 1982. XIV+ 425 p.

4. *Rosenblatt D.* On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices // Naval Res. Logist. Quart. 1957. V. 4. P. 151–167.

5. *Li Q., Shao J.* The index set problem for Boolean (or nonnegative) matrices // Discrete Math. 1993. V. 123, №1–3. P. 75–92.

6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.

7. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.

8. *Hammer P. L., Rudeanu S.* Boolean methods in operations research and related areas. Berlin; N. Y.; Springer, 1968. XIX+ 329 p.

9. *Лунц А.Г.* Приложение матричной булевской алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, №3. С. 421–423.

10. *Rutherford D.E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasg. Math. Assoc. 1963. V. 6. P. 49–53.

11. *Wedderburn J.H.M.* Boolean linear associative algebra // Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 185–194.

12. *Schwarz S.* On the semigroup of binary relations on a finite set // Czech. Math. J. 1970. V. 20(95). P. 632–679.

13. *Wielandt H.* Unzerlegbare, nichnegativen Matrizen//Math. Z. 1950. V. 52. P. 642–648.

14. *Gregory D.A., Kirkland S.J., Pullmang N.J.* A bound on the exponent of a primitive matrix using Boolean rank // Linear Algebra Appl. 1995. V. 217. P. 101–116.

15. *Поплавский В.Б.* Определители степеней булевых матриц // Чебышевский сборник: Труды VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». 2004. Т. 5, вып. 3(11). С. 98–111.

УДК 517.51

МНОГОМЕРНЫЕ q-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ p-МОДУЛИ И КРИТЕРИИ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Л.В.Сахно

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: SahnoLV@mail.ru

В статье в терминах L_q-нормы дается характеристика анизотропных пространств С.Л. Соболева в пространстве L_p. Так как по одной части номеров возможно неравенство $p_i>1$, а по другой – $p_i=1$, то аналог теоремы Ф. Рисса и Hardy–Littlwood представляется в комбинированном виде. Рассматривается более общее дифференцирование, регулярное по М. Шварцу, которое лишь по части переменных является соболевским.

Multivariate q-integral p-modules and Criterion of the Generalized Differentiability

L.V. Sakhno

In the article in terms of L_q-norm the performance of anisotropic spaces of S.L.Sobolev in space L_p is given. As by one part of numbers probably inequality $p_i>1$, and on another – $p_i=1$ the analog of the theorem of F.Rissa and Hardy–Littlwood is represented in a combined aspect. More common derivation, regular by Schwarz which only in part of variables is Sobolev's also is considered.

© Л.В. Сахно, 2006

ВВЕДЕНИЕ

Известен ряд критериев существования у функции обобщенных в смысле Соболева производных в L_p. Прежде всего для функции одной переменной – это критерий Ф.Рисса (см. [1], с.277) ($p > 1$), условие которого естественно трактовать как равномерное, а также критерий Харди–Литтлвуда [2] ($p > 1$), выраженный в терминах модулей непрерывности в L_p. Харди и Литтлвуд [2] доказали, что условие Гельдера в L_1 эквивалентно ограниченности вариации.

А.П. Терехин [3] обобщил теорему Ф. Рисса на производные порядка $r \in N$. Ю.А. Брудный [4] распространил теорему Харди–Литтлвуда на $r \in N$. А.П. Терехин [5] установил аналоги теорем Ф. Рисса и Харди–Литтлвуда в случае $r \in N$, условия которых выражены в терминах L_q-нормы $1 \le p \le q \le \infty$.

Для функций многих переменных А.П. Терехин [6] получил аналог теоремы Ф. Рисса для обобщенных по Соболеву производных порядка $r \in N^n$, выразив условие в терминах L_q-нормы, $1 \le p \le q \le \infty$, p и q – скаляры. Он же [7] рассмотрел пространства со смешанными нормами. По части номеров $p_i > 1$, а по другой – $p_i = 1$, поэтому аналог теоремы Ф.Рисса и Харди–Литтлвуда для производных порядка $r \in N^n$ выступает в комбинированном виде. Автор статьи [8] получила L_q-характеристику анизотропных соболевских классов , которая является многомерным развитием критерия Ф. Рисса ($q = \infty$) и критерия Харди–Литтлвуда ($p = q$) на случай $1 \le p \le q \le \infty$, p и q – вектора. Эта характеристика получена в условиях известного [9] вложения .

В данной статье также рассматриваются анизотропные пространства и случай, когда по части номеров $p_i > 1$ (возможно все $p_i > 1$), а по другой – $p_i = 1$ (возможно все $p_i = 1$). Аналог теорем Ф. Рисса и Харди–Литтлвуда выступает в комбинированном виде. По этой причине используется известное [7] слабое дифференцирование, которое по части переменных является соболевским.

Обозначения. $e \subset \{1,...,n\}$, $e' = \{1,...,n\} \setminus e$; x^e, d^e – точка и параллелепипед из $R^e \equiv \{x \in R^n \mid (\forall\, i \notin e)\, x_i = 0\}$, либо проекция на R^e точки x или параллелепипеда d из R^n, $d = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$; e_i – единичный вектор, направленный по оси x_i; $\Delta_i^r(h)$ – r-я степень разностного одномерного оператора $\Delta(h) f(x) = f(x+h) - f(x)$, примененного к i-й переменной,

$\Delta_i^r(h;G) f(x) = \begin{cases} \Delta_i^r(h) f(x) & \text{при } [x, x + rhe_i] \subset G \\ 0 & \text{при } [x, x + rhe_i] \not\subset G \end{cases}$; $I_i^r(h)$ – r-я степень одномерного оператора Стеклова $I(h) f(x) = \int_0^1 f(x + hu)\,du$ (его область определения $D(I(h)f) = \{x : [x, x+h] \subset D(f)\}$, примененного к i-й переменной.

Для векторов $p = (p_1,...,p_n), q = (q_1,...,q_n)$ $a \in R$ неравенство $p \ge a$ означает, что $p_i \ge a$, $i = 1,\ldots,n$; неравенство $p \ge q$ – $p_i \ge q_i$, $i = 1,\ldots,n$; $(p,q) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$, $|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{p_1},...,\frac{1}{p_n}\right)$. Пусть $v > 0$, $x = (x_1,...,x_n)$, $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)$. Тогда $v^\lambda = (v^{\lambda_1},...,v^{\lambda_n})$, $x : v^\lambda = (x_1 v^{-\lambda_1},...,x_n v^{-\lambda_n})$, $xv^\lambda = (x_1 v^{\lambda_1},...,x_n v^{\lambda_n})$.

В одномерном случае

$$\|f(x)\|_{L_p(h)} = \left(\int_0^h |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\cdot\|_{L_\infty(h)} = \underset{x \in (0,h)}{ess\sup} |\cdot|, \quad \mathrm{h} > 0,$$

$$\|a_v\|_{l_p} = \left(\sum |a_v|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\cdot\|_{l_\infty} = \sup_v |\cdot|,$$

где (a_v), $v = 0, \pm 1,$ – двусторонняя последовательность.

$D_i f$ – обобщенная в смысле Соболева производная по i-му аргументу.

1. СЛАБОЕ ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Следуя [7], введем определение слабой r-дифференцируемости, аналогичное известному определению С.Л. Соболева [9] обобщенной производной.

Определение 1. Пусть $r \in N$. Функцию f, локально суммируемую на открытом множестве $G \subset R^n$, назовем слабо r-дифференцируемой по i-й переменной, если в G существует обобщенная мера λ такая, что для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ

$$\int_{R^n} \varphi(x)\lambda(dx) = (-1)^r \int_{R^n} f(x) D_i^r \varphi(x)\, dx. \qquad (1)$$

Слабое r-дифференцирование будем называть соболевским по x^e, если для каждого параллелепипеда $d^{e'} \overset{\circ}{\subset} G^{e'}$ обобщенная мера $\lambda(d^e \times d^{e'})$ является локально абсолютно непрерывной функцией параллелепипедов $d^e \overset{\circ}{\subset} G(d^{e'}) \equiv \left\{ x^e \mid x^e \times d^{e'} \overset{\circ}{\subset} G \right\}$.

Согласно теореме Радона,

$$\lambda(d^e \times d^{e'}) = \int_{d^e} \chi(x^e, d^{e'}) dx^e, \qquad (2)$$

где функция χ определена для всех $d^{e'} \overset{\circ}{\subset} G^{e'}$, почти всех $x^e \in G(d^{e'})$ и локально суммируема на $G(d^{e'})$.

Известно [7], что не нарушая равенства (2), функцию χ можно переопределить, задав ее для каждого $x^e \in G^e$ как обобщенную меру в сечении $G(x^e)$. Известно также [7], что слабое r-дифференцирование замкнуто по Хелли, т.е. если f_ν – r-дифференцируемые в G функции, λ_ν – соответствующие им по (1) обобщенные меры, $f_\nu \to f$ в $L^{loc}(G)$, $\lambda_\nu(d) \to \lambda(d)$ для счетного множества параллелепипедов, внутренних к G, и вариации ограничены в совокупности на каждом компакте $F \subset G$, то функция f слабо r-дифференцируема и ей соответствует по (1) обобщенная мера λ.

Определение 2. Пусть G – открытое множество в R^n, функция $\chi(x^e, d^{e'}) = \chi(x^e \times d^{e'})$ измерима по x^e и является обобщенной мерой в $G(x^e)$, а χ_0 – нулевое продолжение функции χ на все пространство R^n, $p = (p_1, ..., p_n)$, и $p_i = 1$ для $i \in e'$.

Полагаем

$$\|\chi\|_p = \left\| \ldots \|\chi_0\|_{p_1} \ldots \right\|_{p_n},$$

где $\|\cdot\|_{p_i}$ – норма в $L_{p_i}(R)$, если $i \in e$, и $\|\cdot\|_{p_1} = \|\cdot\|_1$ – полная вариация, если $i \in e'$.

Если $e' = \varnothing$, то χ – функция точки $x \in R^n$ и в этом случае $\|\chi\|_p$ – норма пространства L^p. Если $e \neq \varnothing$, то $\|\chi\|_1 = V(\chi)$.

2. МНОГОМЕРНЫЕ (*p*, *q*)-МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Определение 3. Пусть $p = (p_1, ..., p_n)$, $q = (q_1, ..., q_n)$, $1 \le p \le q \le \infty$, $l = (l_1, ..., l_n)$ – вектор с положительными компонентами, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ и $\nu_j = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, $j = 1, \ldots, n$. Полагаем

$$\mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f) = \left\| \Delta_i^r(h; G) f(x + \nu h^{\frac{l_i}{l}}) \right\|_{(l_p L_q(h^{\frac{l_i}{l}}))} = \left\| \ldots \left\| \left\| \Delta_i^r(h; G) f(x + \nu h^{\frac{l_i}{l}}) \right\|_{l_{p_1}, \nu_1} \right\|_{L_{q_1}(h^{\frac{l_i}{l_1}})} \ldots \right\|_{l_{p_n}, \nu_n} \Bigg\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l_i}{l_n}})}.$$

Условимся, где это не вызовет недоумения, писать просто $\mu_{p,q}^{r,i}(h; f)$ и называть данную величину (p, q)-модулем непрерывности.

Кроме этого будем пользоваться также выровненными (p, q)-модулями

$$\omega_{p,q}^{r,i}(\delta; f) = \omega_{p,q}^{r,i}(\delta; G, l; f) = \sup_{0<h<d} \mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f).$$

Предложение 1. Имеет место равенство

$$\mu_{p,p}^{r,i}(h; f) = \left\| \Delta_i^r(h) f \right\|_{L_p}.$$

Данное соотношение вытекает из одномерного равенства

$$\int_0^{h^{\frac{l_i}{l_1}}} \sum_{\nu_1} \left| g(x_1 + \nu_1 h^{\frac{l_i}{l_1}}) \right|^{p_1} dx_1 = \sum_{\nu_1} \int_{(0, h^{\frac{l_i}{l_1}}) + \nu_1 h^{\frac{l_i}{l_1}}} \left| g(x_1) \right|^{p_1} dx_1 = \int_R \left| g(x_1) \right|^{p_1} dx_1,$$

которое следует применить покоординатно по отношению к функции $g(x) = \Delta_i^r(h) f(x)$.

Предложение 2. Если $1 \le p \le q' \le q \le \infty$, то

$$\mu_{p,q'}^{r,i}(h; f) \le h^{l_i\left(\frac{1}{q'_1} - \frac{1}{q_1}, \frac{1}{l}\right)} \mu_{p,q}^{r,i}(h; f).$$

Непосредственно вытекает из неравенства Гельдера

$$\left(\int\limits_{(0, h^{\frac{l_i}{l_1}})} |\cdot|^{q'_1}\, dx_1 \right)^{\frac{1}{q'_1}} \le h^{\frac{l_i}{l_1}\left(\frac{1}{q'_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \left(\int\limits_{(0, h^{\frac{l_i}{l_1}})} |\cdot|^{q_1}\, dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

применяемого покоординатно.

Предложение 3. Справедливо неравенство

$$\left\| \Delta_i^r(h; G) f \right\|_{L_p} \le h^{l_i k} \mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f),\ \kappa = \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}, \tfrac{1}{l}\right).$$

Для доказательства воспользуемся предложением 1 и предложением 2 с $q' = p$.

3. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА РИССА–ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Пусть $\lambda_{r,j}(f)$ – обобщенная мера, соответствующая слабо r-дифференцируемой по j-й переменной, функции f; $\lambda_{r,j}^e(f)$ – производная Радона обобщенной меры $\lambda_{r,j}(f)$ по переменной x^e в случае r-дифференцирования соболевского по x^e, $D_j^r f$ – производная в смысле С.Л.Соболева r-го порядка по j-й переменной.

Теорема 1. Если

$$\sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{r,j}(\delta; G, l; f)\delta^{-r+l_j\kappa} = M < +\infty,\ \kappa = \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}, \tfrac{1}{l}\right),$$

то функция f слабо r-дифференцируема, причем соболевски по переменной x^e с $e = \{i : p_i > 1\}$ и

$$\left\| \left| \lambda_{r,j}^e(f) \right| \right\|_p \le M$$

($\left|\lambda_r^e\right|$ – полная вариация меры на параллелепипедах $d^{e'} \mathring{\subset} G(x^e)$).

В случае существования $D_j^r f$ ($e' \ne \varnothing$) последняя оценка принимает вид

$$\left\| D_j^r f \right\|_p \le M.$$

Доказательство. Учитывая предложение 3, из условия теоремы получаем неравенство

$$h^{-r} \left\| \Delta_j^r(h; G) f \right\|_{L_p} \le M,\ h < h_0.$$

Для средних Стеклова $F_{h,j}^r f = I_j^r(h) f$ последнее неравенство означает оценку

$$\left\| D_j^r F_{h,j}^r f \right\|_p \le M. \tag{3}$$

В случае существования производной $D_j^r f$ в силу теоремы Фату о предельном переходе ($D_j^r F_{h,j}^r f$ почти всюду сходятся к $D_j^r f$) из неравенства (3) получаем оценку

$$\left\| D_j^r f \right\|_p \le M.$$

Пусть $e' \ne \varnothing$. Докажем существование $D_j^r f$. Неравенство (3) означает, что $D_j^r F_{h,j}^r f_\circ$ (значок «∘» означает нулевое продолжение) образуют ограниченное в $L_p(R^n)$ семейство по h и, следовательно, слабо компактное, если $p < \infty$ (поскольку пространство L_p, $1 < p < \infty$ рефлексивно). Так как $F_{h,j}^r f$ сходятся к f в $L_{лок}(G)$, то f имеет производную $D_j^r f$.

Если среди координат вектора p есть равные ∞, то приведенные выше рассуждения можно провести с произвольным вектором $\overline{p} < \infty, 1 < \overline{p} \le p$, и любой ограниченной подобластью $\Omega \subset C$. Поэтому $D_j^r f$ существует на Ω, а следовательно, и на всей области G.

Пусть $e' \ne \varnothing$. Определим семейство мер в R^n

$$\lambda_h(d) = \int\limits_d D_j^r F_{h,j}^r f_\circ(x)\, dx, \tag{4}$$

и при каждом $x^e \in R^e$ семейство мер в $R^{e'}$

$$\chi_h(x^e, d^{e'}) = \int_{d^{e'}} D_j^r F_{h,j}^r f_\circ(x)\, dx^{e'}. \tag{5}$$

По теореме Фубини

$$\lambda_h(d) = \int_{d^e} \chi_h(x^e, d^{e'})\, dx^e. \tag{6}$$

Формулы, аналогичные (4) и (5), имеют место для всех вариаций λ_h и χ_h: полных $|\lambda_h|$ и $|\chi_h|$, $\lambda_h^{\pm}$, $\chi_h^{\pm}$.

Далее действуют общие известные факты. Из неравенства (3) вытекает ограниченность семейства $|\lambda_h|(F)$ на любом компакте F и возможность применения второй теоремы Хелли: семейства λ_h, $|\lambda_h|$, λ_h^+, λ_h^- по некоторой последовательности $h = h_k$ сходятся к мере λ и ее вариациям $|\lambda|$, λ^+, λ^-. Из аналога (5) для $|\chi_h|$ с $|D_j^r F_{h,j}^r f_\circ|$ в правой части имеем

$$\left\| |\chi_h|(\cdot, d^{e'}) \right\|_{p^e} \le \left\| D_j^r F_{h,j}^r f \right\|_{1^{e'}, p^e} \le \left\| D_j^r F_{h,j}^r f \right\|_p$$

(так как $p^e > 1^e$, $p^{e'} = 1^{e'}$, то последняя оценка основана на неравенстве Минковского).

При $p < \infty$ в силу рефлексивности L_p^e оценка (3) и последнее неравенство влечет слабую компактность семейства χ_h и всех вариаций, т.е. существование у них слабо предельных функций χ с вариациями.

Поэтому в равенстве (6) можно перейти к пределу:

$$\lambda(d) = \int_{d^e} \chi(x^e, d^{e'})\, dx^e. \tag{7}$$

Так как $F_{h,j}^r f \to f$ в $L_{лок}(G)$, то в силу замкнутости r-дифференцирования в смысле Хелли $\lambda = \lambda_{r,j}(f)$, а равенство (7) означает, что r-дифференцирование является соболевским по x^e и $\lambda_{r,j}^e(f) = \chi$.

Если при некоторых i $p_i = \infty$, то заменив их $1 < p_i < \infty$, мы докажем существование $\lambda_{r,j}^e(f)$ на любой ограниченной подобласти и тем самым на всей области G.

Осталось оценить p-норму функции $|\chi|$. Это можно сделать способом, предложенным А.П.Терехиным [7] в доказательстве теоремы 2, где речь идет о смешанном r-дифференцировании ($r \in N^n$). По сути наша ситуация та же. Теорема доказана.

Пусть функция f слабо l_i-дифференцируема по i-й переменной, $1 \le i \le n$.

Воспользуемся известным ([9], с. 83) представлением

$$f(x) = s^{-|\lambda|} \int_{R^n} f(x+y)\Omega(y : s^\lambda)\, dy + \sum_{i=1}^n \int_0^s v^{-1-|\lambda|} dv \int_{R^n} f(x+y) D_i^{l_i} \tilde{L}_i(y : v^\lambda)\, dy.$$

Функции Ω и $\tilde{L}_i$, $i = 1,\ldots,n$, бесконечно дифференцируемы и финитны в R^n, а их носители таковы, что носителем представления служит рог $x+V(l,s)$, $\lambda = 1{:}l$. С помощью равенства (1), заметив, что

$$D_i^{l_i} \tilde{L}_i(y : v^\lambda) = v D_{y_i}^{l_i} \tilde{L}_i(y : v^\lambda),$$

получим

$$f(x) = s^{-|\lambda|} \int_{R^n} f(x+y)\Omega(y : s^\lambda)\, dy + \sum_{i=1}^n \int_0^s v^{-|\lambda|} dv \int_{R^n} L_i((y-x) : v^\lambda) \lambda_{l_i,i}(dy), \tag{8}$$

где $L_i(x) = (-1)^{l_i} \tilde{L}_i(x)$ ($i = 1,\ldots,n$).

При получении оценки (p,q)-модулей через нормы $\left\|\lambda_{l_i,i}^e\right\|_p$ будем пользоваться неравенством, аналогичным известному ([9], с. 24) неравенству Юнга.

Лемма (аналог неравенства Юнга). Пусть p, q, r – вещественные числа, удовлетворяющие условиям $1 \le p \le q \le \infty, 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Пусть K – функция одной переменной, определенная на множестве Y, а f – функция двух переменных, определенная на множестве $X \times Y$, $I(x) = \int_Y f(x,y) K(y)\, dy$ при любом $x \in X$. Тогда

$$\|I\|_{L_q(X)} \le \|K\|_{L_r(Y)} \sup_{x \in X} \|f(x,y)\|_{L_p(Y)}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{y \in Y} \|f(x,y)\|_{L_p(X)}^{\frac{p}{q}}.$$

Доказательство незначительно отличается от доказательства неравенства Юнга, поэтому не будем его приводить в статье.

Пусть функция f определена на множестве $U + V$, где U – открытое множество в R^n, $V = V(l, h_0)$ – l-рог, и слабо l_i-дифференцируема по i-й переменной, $1 \le i \le n$, на этом множестве.

Лемма. Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \le 1$ и при $\kappa = 1$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$. Тогда при $h \le h_0^{\frac{1}{l_j}}$, $1 \le j \le n$

$$\mu_{p,q}^{l_j, j}(h; U, l; f) \le h^{l_j - l_j k} C \sum_{i=1}^{n} \left\| \lambda_{l_i, i}^{e} \right\|_{p, U+V}.$$

Доказательство. Представление $\Delta_j^{l_j}(h; U) f(x + vh^{\frac{l_j}{l}})$ получим из равенства (8), положив $s = h^{l_j}$, внося операцию разности в первом слагаемом правой части под интеграл, а к оставшимся n слагаемым применяя оценку

$$| \Delta_j^{l_j}(h) g(x) | \le C \sum_{k=0}^{l_j} \left| g(x + khe_j) \right|,$$

вытекающую из определения конечных разностей.

Для оценки $(l_p L_q(h^{\frac{l_j}{l}}))$ – нормы $\Delta_j^{l_j}(h; U) f(x + vh^{\frac{l_j}{l}})$ в силу неравенства Минковского достаточно оценить нормы слагаемых правой части.

Поскольку $\Delta_j^{l_j}(h) f = h^{l_j} D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f$ $(F_{h,j}^{l_j} f = I_j^{l_j} h) f)$, то первое слагаемое правой части

$$A_0(x, \nu) = h^{-l_j |\lambda|} \int_{R^n} \Omega(y : h^{\frac{l_j}{l}}) \Delta_j^{l_j}(h; U + V) f(x + y + \nu h^{\frac{l_j}{l}})\, dy =$$

$$= h^{l_j - l_j |\lambda|} \int_{R^n} \Omega((y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) : h^{\frac{l_j}{l}}) D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f(y)\, dy = h^{l_j - l_j |\lambda|} \int_{R^n} \Omega((y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) : h^{\frac{l_j}{l}}) \lambda_h(dy),$$

где $\lambda_h(d) = \int_d D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f(y)\, dy$.

Представим ее в виде

$$\lambda_h(d) = \int_{d^e} \chi_h(y^e, d^{e'})\, dy^e,$$

где $\chi_h(y^e, d^{e'}) = I_j^{l_j}(h) \chi(y^{e'}, d^e)$, а $\chi(y^e, d^{e'})$ – производная Радона обобщенной меры $\lambda_{l_j, j}(f)$ по переменной x^e (т.е. $\lambda_{l_j, j}^{e}(f)$).

Пусть $\pi_i^m = \left\{ \left[\left[\frac{(k-1) h^{\frac{l_j}{l_i}}}{2^m}, \frac{k h^{\frac{l_j}{l_i}}}{2^m} \right) \right] \right\}_{k \in Z}$ – разбиение i-х осей, $i \in e'$; $\pi = \pi^m = \{ d^{e'} = \prod_{i \in e'} d_i,\ d_i \in \pi_i^m \}$.

Для ступенчатой функции g, постоянной на $d^{e'} \in \pi$ и сосредоточенной в прямоугольнике $(0, h^{\frac{l_j}{l}})$ рассмотрим

$$A(x, \nu) = \int_{R^n} g(y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) \lambda_h(dy) = \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l}})} g(y) \chi_h^{\pi}((y + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^e, y^{e'}, (x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^{e'}) dy,$$

где $\chi_h^{\pi}((y + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^e, y^{e'}, (x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^{e'}) = \dfrac{\chi_h[(y^e, d^{e'}) + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}}]}{| d^{e'} |}$, $y^{e'} \in d^{e'}$.

Пусть $1 \in e$. Рассмотрим одномерный случай

$$\tilde{A}(x_1, \nu_1) = \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l_1}})} \tilde{g}(y_1) \tilde{\chi}_h^{\pi}(y_1 + x_1 + \nu h^{\frac{l_j}{l_1}}) dy_1.$$

Пользуясь неравенством Минковского, а затем неравенством Юнга $\left(1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r_1}\right)$, имеем

$$\left\| \tilde{A}(x_1, \nu_1) \right\|_{l_{p_1}} \le \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l_1}})} | \tilde{g}(y_1) | \left\| \tilde{\chi}_h^{\pi}(y_1 + x_1 + \nu h^{\frac{l_j}{l_1}}) \right\|_{l_{p_1}} dy_1,$$

$$\left\|\tilde{A}(x_1,\nu_1)\right\|_{l_{p_1}L_{q_1}(h^{\frac{l_j}{l_1}})} \le \|\tilde{g}\|_{L_{r_1}} \left\|\tilde{\chi}^{\pi}_h\right\|_{L_{p_1}}. \tag{9}$$

Пусть $1 \in e'$. Рассмотрим одномерный случай

$$\tilde{A}(x_1,\nu_1) = \int\limits_{(0,h^{\frac{l_j}{l_1}})} \tilde{g}(y_1)\,\tilde{\chi}^{\pi}_h(y_1, x_1+\nu h^{\frac{l_j}{l_1}})dy_1.$$

На основании неравенства Минковского имеем

$$\left\|\tilde{A}(x_1,\nu_1)\right\|_{l_{p_1}} \le \int\limits_{(0,h^{\frac{l_j}{l_1}})} |\tilde{g}(y_1)| \left\|\tilde{\chi}^{\pi}_h(y_1, x_1+\nu h^{\frac{l_j}{l_1}})\right\|_{l_{p_1}} dy_1 = \int\limits_{(0,h^{\frac{l_j}{l_1}})} |\tilde{g}(y_1)|\,|\varphi(y_1,x_1)|\,dy_1.$$

Тогда при $y_1 \in d,\ d \in \pi_1^m\ (|d| = h^{\frac{l_j}{l_1}}/2^m)$,

$$\left\|\varphi(y_1,x_1)\right\|_{L_1(h^{\frac{l_j}{l_1}}),x_1} = \frac{1}{|d|}\int\limits_{(0,h^{\frac{l_j}{l_1}})} \sum_{\nu_1} |\tilde{\chi}_h[d+x_1+\nu_1 h^{\frac{l_j}{l_1}}]|dx_1 =$$

$$= \frac{1}{|d|}\int\limits_{(0,h^{\frac{l_j}{l_1}}/2^m)} \sum_{k=1}^{2^m}\sum_{\nu_1} |\tilde{\chi}_h(d+x_1+(k-1)h^{\frac{l_j}{l_1}}/2^m{}_1+\nu h^{\frac{l_j}{l_1}})|dx_1 \le \left\|\tilde{\chi}_h\right\|_1.$$

Кроме того, очевидно

$$\left\|\varphi(y_1,x_1)\right\|_{L_1(h^{\frac{l_j}{l_1}}),y_1} \le \left\|\tilde{\chi}_h\right\|_1.$$

На основании аналога неравенства Юнга далее получим ($1 = e'$, $p_1 = 1$)

$$\left\|\tilde{A}(x_1,\nu_1)\right\|_{l_{p_1},L_{q_1}(h^{\frac{l_j}{l_1}})} \le \|\tilde{g}\|_{L_{r_1}} \left\|\tilde{\chi}_h\right\|_1. \tag{10}$$

В многомерном случае, применяя покоординатно оценки (9) или (10) в зависимости от принадлежности номера переменной множеству e или e', получим оценку

$$\left\|A(x,\nu)\right\|_{(l_pL_q(h^{\frac{l_j}{l_1}}))} \le \|g\|_{L_r} \left\|\chi_h\right\|_{p,U+V}.$$

С помощью последовательности ступенчатых функций g_m, постоянных на $d^{e'} \in \pi$, равномерно сходящейся к функции $\Omega(y : h^{\frac{l_j}{l}})$, перенесем оценку на $A_0(x,\nu)$. Учитывая, наконец, что

$$\left\|\Omega(y : h^{\frac{l_j}{l}})\right\|_{L_r} = h^{l_j(\frac{1}{r},\frac{1}{l})}\|\Omega\|_{L_r},$$

а также неравенство

$$\|\chi_h\|_p \le \|\chi\|_p,$$

получим оценку

$$\left\|A_0(x,\nu)\right\|_{(l_pL_q(h^{\frac{l_j}{l_1}}))} \le Ch^{l_j-l_jk}\left\|\lambda^e_{l_j,j}\right\|_{p,U+V}.$$

В остальных слагаемых

$$A_i(x,\nu) = \int\limits_0^{h^{l_j}} v^{-|\lambda|}dv \int\limits_{R^n} L_i((y-x-\nu h^{\frac{l_j}{l}}) : v^{\lambda})\lambda_{l_i,i}(dy),\ (i = 1,\dots,n)$$

при $\kappa < 1$ ($l_pL_q(h^{\frac{l_j}{l}})$) – нормы внутренних интегралов оценим аналогично $A_0(x,\nu)$, а затем проинтегрируем по v.

Таким образом, оценка леммы для случая $\kappa < 1$ доказана.

Оценим нормы A_i при $\kappa < 1$. Вместо ядра $L_i(y, v^{\lambda})$, носитель которого ограничен и удален от координатных плоскостей, возьмем ступенчатую функцию g с таким же носителем, модуль которой не превосходит модуля ядра, постоянную на $d^{e'} \in \pi$. Обозначим

$$\tilde{A}_i(x,\nu) = \int\limits_0^{h^{l_j}} v^{-|\lambda|}dv \int\limits_{R^n} g(y-x-vh^{\frac{l_j}{l}})\lambda_{l_i,i}(dy).$$

Оценим $l_{p_1}L_{q_1}(h^{\frac{l_j}{l_1}})\ldots l_{p_{n-1}}L_{q_{n-1}}(h^{\frac{l_j}{l_{n-1}}})l_{p_n}$ – норму $\tilde{A}_i$, как и в случае с $A(x,v)$, используя неравенство Минковского и оценки (9) и (10) покоординатно. Положим $y=(\bar{y},y_n)$, $r=(\bar{r},r_n)$, $L(y_n)=\|L_i(y)\|_{L_{\bar{r}}}$. Если $\sup \mathrm{p}L\subset[a,b]\subset[0,1]$, то

$$\|g(y)\|_{L_{\bar{r}}}\le\|L_i(y:v^{\lambda})\|_{L_{\bar{r}},\bar{y}}=v^{\left(\frac{1}{\bar{r}},\frac{1}{\bar{l}}\right)}\|L_i(\bar{y},y_n:v^{\lambda_n})\|_{L_{\bar{r}}}\le v^{\left(\frac{1}{\bar{r}},\frac{1}{\bar{l}}\right)}\|L_i\|_{L_{\bar{r}}L_\infty}\varphi(y_n:v^{\lambda_n}),$$

где $\varphi\,(y_n)$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$.

Поскольку $-|\lambda|+\left(\frac{1}{\bar{r}},\frac{1}{\bar{l}}\right)=-1-\frac{\lambda_n}{r_n}$, в результате получим оценку $(l_{\bar{p}}L_{\bar{q}}(h^{\frac{l_j}{l}}))l_{p_n}$ – нормы $\tilde{A}_i(x,\nu)$ интегралом вида

$$C_1\int_0^{h^{l_j}}v^{-1-\frac{\lambda_n}{r_n}}dv\int_R\varphi(y_n:v^{\lambda_n})\left\|\tilde{\chi}(y_n+x_n+\nu_nh^{\frac{l_j}{l_n}})\right\|_{l_{p_n}}dy_n,$$

если $n\in e$, или интегралом вида

$$C_1\int_0^{h^{l_j}}v^{-1-\frac{\lambda_n}{r_n}}dv\int_R\varphi(y_n:v^{\lambda_n})\left\|\tilde{\chi}^{\pi}(y_n,x_n+\nu_nh^{\frac{l_j}{l_n}})\right\|_{l_{p_n}}dy_n,$$

если $n\in e'$.

Рассмотрим случай $n\in e$. Так как

$$\int_0^{h}v^{-1-\frac{\lambda_n}{r_n}}dv\varphi(y_n:v^{\lambda_n})\le C_2|y_n|^{-\frac{1}{r_n}},$$

то остается оценить L_{q_n}– норму интеграла

$$\int_0^{h^{\frac{l_j}{l_n}}}|y_n|^{-\frac{1}{r_n}}\left\|\tilde{\chi}(y_n,x_n+\nu_nh^{\frac{l_j}{l_n}})\right\|_{l_{p_n}}dy_n.$$

Для этого используем неравенство Харди–Литтлвуда при $1<p_n<q_n<\infty$ ([9], с.31). В итоге имеем

$$\left\|\tilde{A}_i(x,\nu)\right\|_{(l_pL_q(h^{\frac{l_j}{l}}))}\le C\left\|\lambda^e_{l_i,i}\right\|_p.$$

Если $n\in e'$, то $1=p_n<q_n=\infty$, $r_n=\infty$, и вместо неравенства Харди–Литтлвуда применяем аналог неравенства Юнга. В результате имеем ту же оценку. С помощью последовательности степенных функций переносим оценку на A_i. Таким образом, имеем

$$\left\|A_i(x,\nu)\right\|_{(l_pL_q(h^{\frac{l_j}{l}}))}\le C\left\|\lambda^e_{l_i,i}\right\|_p.$$

Собирая оценки, получаем неравенство леммы и при к = 1.

Пусть функция определена на открытом множестве G, удовлетворяющем условию l-рога ([9], с. 117) и слабо l_i-дифференцируема по i-й переменной, $i=1,\ldots,n$, на этом множестве. Оценка леммы известным способом ([9], с. 264) распространяется на множество G.

Теорема 2. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1\le p\le q\le\infty$, $\text{к}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\frac{1}{l}\right)\le 1$ и при к = 1 либо $1<p_n<q_n<\infty$ либо $1=p_n<q_n=\infty$. Тогда для $j=1,\ldots,n$.

$$\sup_{0<\delta<h_0(G)}\omega^{l_j,j}_{p,q}(\delta;f)\delta^{-l_j+l_jk}\le C\sum_{i=1}^n\left\|\lambda^e_{l_i,i}\right\|_p.$$

Обобщенная теорема Рисса–Харди–Литтлвуда. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1\le p\le q\le\infty$, $\text{к}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\frac{1}{l}\right)\le 1$ и при к = 1 либо $1<p_n<q_n<\infty$ либо $1=p_n<q_n=\infty$, $e=\{i:p_i>1\}$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^n\left\|\lambda^e_{l_i,i}\right\|_p \text{ и } \sum_{i=1}^n\sup_{0<\delta<h_0(G)}\omega^{l_i,i}_{p,q}(\delta;f)\delta^{-l_i+l_ik}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование $\lambda^e_{l_i,i}$, $i=1,\ldots,n$).

Доказательство. Заключение теоремы следует из теорем 1 и 2.

Обобщенная теорема Ф.Рисса. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1 \le p \le q \le \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \le 1$ и при $\kappa = 1$ $1 < p_n < q_n < \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_p \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0(G)} \omega_{p,q}^{l_i,i}(\delta; f)\delta^{-l_i+l_i\kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных).

Обобщенная теорема Харди–Литтлвуда. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1 \le q \le \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \le 1$ и при $\kappa = 1$ $q_n = \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} V(\lambda_{l_i,i}(f)) \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0(G)} \omega_{1,q}^{l_i,i}(\delta; f)\delta^{-l_i+l_i\kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование $\lambda_{l_i,i}(f)$, $i = 1,\ldots,n$).

Библиографический список

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Hardy G., Littlewood J.* Some properties of fractional integrals // Math. 1932. № 34. P. 403-409.
3. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
4. *Брудный Ю.А.* Критерий существования производных в L^p // Математический сборник. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–64.
5. *Терехин А.П.* Функции ограниченной q-интегральной p-вариации и теоремы вложения // Математический сборник. 1972. Т. 88, № 2. С.42–64.
6. *Терехин А.П.* Многомерная q-интегральная p-вариация и обобщенная по Соболеву дифференцируемость в L_p функции из L_p // Сибирский математический журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1358–1373.
7. *Терехин А.П.* Смешанная q-интегральная p-вариация и смешанная дифференцируемость в L_p функции из L_p // Математические заметки. 1982. Т. 25, № 3. С. 151–166.
8. *Сахно Л.В.* Многомерная q-интегральная p-вариация и теоремы вложения // Саратов, 1981. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 19.03.81. № 1220-81.
9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51-518

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Шишкова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: ShishkovaEV@info.sgu.ru

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно, и когда она задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиноминальными финитными ядрами.

Exact Orders of Errors in Smooth Functions Approximations

E.V. Shishkova

In this paper exact order estimations of errors in uniform metric approximation of smooth function and its derivatives over several classes are obtained in cases when the function is defined precisely or using its δ-approximation $f_\delta(x)$ in $L_2[a,b]$ metric. Integral operators with polynomial finite kernels are considered as approximate one.

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно и когда она задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиномиальными финитными ядрами.

© Е.В. Шишкова, 2006