Теорема 2. *Оператор A является генератором ограниченной полугруппы операторов T класса C_0, удовлетворяющей оценке* (5), *с резольвентой, удовлетворяющей оценке* (6), *а его числовая область $\Theta(A)$ совпадает со всей комплексной плоскостью $\mathbb{C}$.*

Библиографический список

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 739 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. *Engel K., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. N.Y.: Springer, 1999. 586 p.
4. *Баскаков А. Г., Воробьёв А. А., Романова М. Ю.* Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 190–203.

УДК 517.54

МОДИФИКАЦИЯ НОВОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Р. Б. Салимов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: salimov@5354.ru

Предлагается модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области, основанное на построении решения соответствующей однородной задачи, когда определяется аналитическая в области функция по известным граничным значениям ее аргумента применительно к случаю, когда область является круговой.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, оператор Шварца.

Modification of New Approach to Solution of the Hilbert Boundary Value Problem for Analytic Function in Multi-Connected Circular Domain

R. B. Salimov

Kazan State University of Architecture and Engineering,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: salimov@5354.ru

The author offers a new approach to the Riemann – Hilbert boundary value problem in multiconnected domain. The approach bases on certain construction of solution of corresponding homogeneous problem including determination of analytic function by known boundary values of its argument circular domain.

Key words: Riemann – Hilbert boundary value problem, index of a problem, Schwarz's operator.

Предлагается модификация рассмотренного в работе [1] нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической в многосвязной круговой области функции.

Пусть D является $(m+1)$-связной круговой областью, ограниченной полными окружностями $L_0, L_1, \dots, L_m$ без общих точек, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные.

Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на её границу $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ по краевому условию

$$\mathrm{Re}\,[(a(t)+ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t), b(t), c(t)-$ заданные на L действительные функции точки t контура L, удовлетворяющие условию Гёльдера, — функции класса H на L, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

На L установим положительное направление обхода, при котором область D остается слева. Пусть t_{j0} — фиксированная точка кривой L_j. В дальнейшем для функции $f(t)$, заданной на L_j, под $f(t_{j0}+0)$ и $f(t_{j0}-0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(t)$, когда точка t стремится к t_{j0} соответственно в отрицательном и положительном направлениях.

Краевое условие (1) запишем так

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\nu(t)}F(t)\right] = c(t)/|G(t)|, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t) = \arg G(t)$ — ветвь, непрерывная всюду на L, за исключением, быть может, точек t_{j0}, для которых
$$\nu(t_{j0} - 0) - \nu(t_{j0} + 0) = 2\pi \frac{\kappa_j}{2},$$
причем $\kappa_j/2$— целое число, $j = \overline{0, m}$.

Число $\kappa = \sum\limits_{j=0}^{m} \kappa_j$ назовем *индексом задачи Гильберта* (2), следуя Н. И. Мусхелишвили [2, с. 144] (заметим, что в книге [3, с. 144] индексом этой задачи называется число $\kappa/2$).

Для простоты здесь ограничимся рассмотрением случая, когда $\dfrac{\kappa}{2} \geq m$.

1. Обозначим q_j, R_j соответственно центр и радиус окружности L_j, $j = \overline{0, m}$, считая, что $q_0 = 0$, $R_0 = 1$. Примем $t_{00} = 1$, $t_{j0} = q_j + R_j$, $j = \overline{1, m}$. Пусть $t = q_j + R_j e^{i\gamma}$, $0 \leq \gamma < 2\pi$, есть точка окружности L_j; через s будем обозначать дуговую абсциссу указанной точки кривой L_j, отсчитываемую от точки t_{j0} в положительном направлении, $j = \overline{0, m}$, $s = (2\pi - \gamma)R_j$ при $j = \overline{1, m}$. Под $\arg(z - q_j)$ будем понимать непрерывную ветвь, однозначную в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из отрезка с концами $z = q_j$, $z = t_{j0}$, и линии l_j, лежащей внутри области D и соединяющей точки t_{j0}, t_{00}, $j = \overline{0, m}$, (при $j = 0$ линия l_j отсутствует), считаем, что эта ветвь на L_j принимает значение $\arg(t - q_j) = \gamma$, $0 \leq \gamma < 2\pi$.

Пусть $t_j = q_j + R_j e^{i\gamma_j}$, $0 \leq \gamma_j < 2\pi$, есть некоторая точка окружности L_j, положение этой точки, т.е. число γ_j будем считать незаданным, $j = \overline{1, m}$.

Пусть $\arg(z - t_j)$— непрерывная ветвь, однозначная в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из направленной как L_j дуги $t_j t_{j0}$ этой окружности и вышеуказанной кривой l_j; будем считать, что эта ветвь при $\gamma_j > 0$ на окружности L_j, включая точки левого берега разреза по дуге $t_j t_{j0}$, принимает значения
$$\arg(t - t_j) = \begin{cases} (-\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$
При $\gamma_j = 0$ эта формула принимает вид
$$\arg(t - t_{j0}) = (\pi + \gamma)/2, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi.$$
Поэтому при вышеуказанном выборе ветвей аргументов непрерывная в области D ветвь
$$\arg \frac{z - t_j}{z - q_j} = \arg(z - t_j) - \arg(z - q_j)$$
на L_j в случае $\gamma_j > 0$ принимает значение
$$\arg \frac{t - t_j}{t - q_j} = \begin{cases} (-\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi. \end{cases} \tag{3}$$
В частности, при $\gamma_j = 0$ заключаем, что $\arg \dfrac{z - t_{j0}}{z - q_j}$ на L_j принимает значение
$$\arg \frac{t - t_{j0}}{t - q_j} = \frac{\pi - \gamma}{2}, \qquad 0 \leq \gamma < 2\pi. \tag{4}$$

2. Введем в рассмотрение функцию $p_j(t) = 1$ на вышеуказанной дуге $t_j t_{j0}$ окружности L_j, $p_j(t) = 0$ на остальной части L_j и на всех других окружностях — компонентах L, $j = \overline{1, m}$. Далее краевое условие (2) запишем в равносильном виде
$$\mathrm{Re}\,[e^{-i\tilde{\nu}(t)} \tilde{F}(t)] = \tilde{c}(t), \tag{5}$$
где
$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \sum_{j=1}^{m} \left[2\pi p_j(t) + 2 \arg \frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \kappa_j/2) \arg(t - q_j) \right], \tag{6}$$

$$\tilde{F}(z) = \prod_{j=1}^{m} \left[(z-q_j)^{1+\kappa_j/2} \cdot \left(\frac{z-t_j}{z-q_j} \right)^2 \cdot F(z) \right], \tag{7}$$

$$\tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{|G(t)|} \prod_{j=1}^{m} \left[|t-q_j|^{1+\kappa_j/2} \cdot \left| \frac{t-t_j}{t-q_j} \right|^2 \right]. \tag{8}$$

Будем искать решение $\tilde{F}(z)$ краевой задачи (5) в классе функций, непрерывных в области D, вплоть до её границы (при этом, как видно из формулы (7), функция $F(z)$ может иметь особенности в точках t_j, $j=\overline{1,m}$). Вначале найдем частное решение $\tilde{F}_0(z)$ соответствующей однородной задачи

$$\mathrm{Re}\,[e^{-i\tilde{\nu}(t)}\tilde{F}_0(t)] = 0, \tag{9}$$

отличное от нуля всюду на L. Из (9) для аргумента

$$\arg \tilde{F}_0(t) = \tilde{\psi}(t) \tag{10}$$

такого решения, как и в [1], получим выражение

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j, \tag{11}$$

когда $t \in L_j$, где n_j — произвольное целое число, $j=\overline{0,m}$, $n_0 = 0$. Таким образом, известны граничные значения $\tilde{\psi}(t)$ функции $\arg \tilde{F}_0(z)$ с точностью до слагаемого πn_j при нефиксированных пока значениях γ_j, $j=\overline{1,m}$. Остается найти функцию $\tilde{F}_0(z)$.

В статье [1] при нахождении функции $\tilde{F}_0(z)$ были использованы результаты Э. И. Зверовича [4], связанные с отысканием регуляризующего множителя для решения краевой задачи Гильберта в случае многосвязной области, основанные на сложной теории с использованием аппарата теории функций на римановых поверхностях.

В настоящей работе для нахождения вышеуказанного частного решения $\tilde{F}_0(z)$ задачи (9) предлагается более простой и прозрачный подход. Пусть z_0— заданная точка области D, $\arg(t-z_0)$— граничное значение непрерывной ветви $\arg(z-z_0)$, однозначной в области D, разрезанной по линии, лежащей в области D и соединяющей точки z_0, t_{00}. Как видно из формул (6), (11), функция $\tilde{\psi}(t) - (m+\kappa/2)\arg(t-z_0)$ непрерывна на каждой из окружностей L_j, $j=\overline{0,m}$, поэтому при обходе L_j, $j=\overline{0,m}$, приращения не получает. Следовательно, в силу принципа аргумента функция $\tilde{F}_0(z)/(z-z_0)^{m+\kappa/2}$ не имеет нулей в области D. Тогда функция

$$\Phi(z) = -i \ln[\tilde{F}_0(z)/(z-z_0)^{m+\kappa/2}] \tag{12}$$

аналитична в области D, причем действительная часть её граничного значения равна $\tilde{\psi}(t) - (m+\kappa/2)\arg(t-z_0)$, т.е. согласно (10), (11) на L_j

$$\mathrm{Re}\,\Phi(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j - (m+\kappa/2)\arg(t-z_0), \qquad j=\overline{0,m}.$$

Отсюда в силу (6) с учетом выражений (3) для $\arg\frac{t-t_j}{t-q_j}$ и $p_j(t)$ будем иметь при $t \in L_j$, $j=\overline{1,m}$,

$$\mathrm{Re}\,\Phi(t) = \frac{3\pi}{2} + \gamma_j + \pi n_j + \nu(t) + \sum_{j_1=1, j_1\neq j}^{m} \left(\arg(t-q_{j_1}) + 2\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}} \right) +$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{m} \frac{\kappa_{j_1}}{2}\arg(t-q_{j_1}) - (m+\kappa/2)\arg(t-z_0), \tag{13}$$

при $t \in L_0$ получим

$$\mathrm{Re}\,\Phi(t) = \frac{\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j=1}^{m} \left(2\arg\frac{t-t_j}{t-q_j} + (1+\kappa_j/2)\arg(t-q_j) \right) - (m+\kappa/2)\arg(t-z_0). \tag{14}$$

Поскольку функция $\Phi(z)$ должна быть однозначной и аналитической в области D, то должны выполняться условия (см., например, [3, с. 383])

$$\int\limits_L \operatorname{Re}\Phi(t)\alpha_k(t)ds = 0, \quad k=\overline{1,m}, \tag{15}$$

где $\alpha_k(t)=\partial\beta_k(t)/\partial n$ есть производная по направлению внутренней для области D нормали в точке t границы L области D, $\beta_k(z)-$ гармоническая в области D функция, граничные значения которой определяются формулой

$$\beta_k(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\in L_k,\\ 0 & \text{на остальных окружностях,}\end{cases} \tag{16}$$

$k=\overline{1,m}$. Функции $\beta_k(z)$, $\alpha_k(t)$ считаем известными, $k=\overline{1,m}$.

Условия (15) с учетом (13), (14) запишем так

$$\int\limits_{L_0}\left[\frac{\pi}{2}+\nu(t)+\sum_{j_1=1}^{m}\left(2\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}+(1+\kappa_{j_1}/2)\arg(t-q_{j_1})\right)-(m+\kappa/2)\arg(t-z_0)\right]\alpha_k(t)ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{L_j}\left[\frac{3\pi}{2}+\gamma_j+\pi n_j+\nu(t)+\sum_{j_1=1,j_1\neq j}^{m}\left(\arg(t-q_{j_1})+2\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\kappa_{j_1}}{2}\arg(t-q_{j_1})-(m+\kappa/2)\arg(t-z_0)\right]\alpha_k(t)ds=0, \qquad k=\overline{1,m}.$$

Мы получили систему уравнений с неизвестными γ_j и n_j, $j=\overline{1,m}$.

Учитывая, что мы ищем частное решение $\tilde{F}_0(z)$ задачи (9), в предыдущих формулах и всюду в дальнейшем будем считать $n_j=2\tilde{n}_j$, где $\tilde{n}_j-$ целое число, $j=\overline{1,m}$.

Обозначая

$$a_{kj}=\int\limits_{L_j}\alpha_k(t)\,ds, \qquad k=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{17}$$

$$\theta_j=\gamma_j+2\pi\tilde{n}_j, \qquad j=\overline{1,m}, \tag{18}$$

последнюю систему представим так

$$\sum_{j=1}^{m}a_{kj}\theta_j+2\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{L_j}\left[\sum_{j_1=1,j_1\neq j}^{m}\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}\right]\alpha_k(t)ds+2\int\limits_{L_0}\left[\sum_{j_1=1}^{m}\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}\right]\alpha_k(t)ds=B_k, \quad k=\overline{1,m}, \tag{19}$$

где

$$B_k=-\int\limits_{L_0}\left[\frac{\pi}{2}+\nu(t)+\sum_{j_1=1}^{m}\left(1+\frac{\kappa_{j_1}}{2}\right)\arg(t-q_{j_1})-\left(m+\frac{\kappa}{2}\right)\arg(t-z_0)\right]\alpha_k(t)\,ds-$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{L_j}\left[\frac{3\pi}{2}+\nu(t)+\sum_{j_1=1,j_1\neq j}^{m}\arg(t-q_{j_1})+\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\kappa_{j_1}}{2}\arg(t-q_{j_1})-\right.$$
$$\left.-\left(m+\frac{\kappa}{2}\right)\arg(t-z_0)\right]\alpha_k(t)\,ds, \tag{20}$$

здесь $t_j=q_j+R_je^{i\theta_j}$, $j=\overline{1,m}$.

Мы пришли к системе нелинейных уравнений с неизвестными θ_j, $j=\overline{1,m}$ (о решении системы сказано ниже). Определив из неё θ_j, $2\pi N_j\le\theta_j<2\pi N_j+2\pi$, где N_j- целое число, взяв $\tilde{n}_j=N_j$, по формуле (18) найдем $\gamma_j=\theta_j-2\pi N_j$, $0\le\gamma_j<2\pi$.

Считая, что числа $\tilde{n}_j$, γ_j, $j=\overline{1,m}$, уже определены ($2\tilde{n}_j = n_j$), по формулам (13), (14) вычислим $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и с помощью оператора Шварца найдем однозначную аналитическую в области D функцию

$$\Phi(z) = S(\operatorname{Re}\Phi(t), z) + iv_0,$$

взяв произвольную действительную постоянную $v_0 = 0$.

Тогда согласно (12) будем иметь:

$$\tilde{F}_0(z) = e^{i\Phi(z)}(z-z_0)^{m+\kappa/2} \tag{21}$$

— частное решение задачи (9), отличное от нуля всюду на L. В силу (9) $ie^{-i\tilde{\nu}(t)}\tilde{F}_0(t)$ — действительная величина, поэтому условие (5) можно записать так

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\tilde{F}(t)}{i\tilde{F}_0(t)}\right] = c_*(t), \tag{22}$$

где

$$c_*(t) = \tilde{c}(t)/(ie^{-i\tilde{\nu}(t)}\tilde{F}_0(t)). \tag{23}$$

Как видно из (21), точка z_0 является полюсом порядка $m+\kappa/2$ функции $\tilde{F}(z)/(i\tilde{F}_0(z))$. Учитывая это, последнюю функцию будем искать в виде

$$\tilde{F}(z)/(i\tilde{F}_0(z)) = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \mu_j/(z-z_0)^j, \tag{24}$$

где $\Psi(z)$— новая искомая аналитическая и однозначная в области D функция, β_0, μ_j— произвольные соответственно действительная и комплексная постоянные.

Согласно (22), (24) всюду на L имеем

$$\operatorname{Re}\Psi(t) = c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re}[\mu_j/(t-z_0)^j]. \tag{25}$$

Функция $\operatorname{Re}\Psi(t)$ должна удовлетворять условиям, аналогичным (15), поэтому должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \int\limits_L \operatorname{Re}[\mu_j/(t-z_0)^j]\alpha_k(t)ds = \int\limits_L c_*(t)\alpha_k(t)ds, \quad k=\overline{1,m}. \tag{26}$$

Эти соотношения представляют собой систему m линейных алгебраических уравнений с $(2m+\kappa)$ неизвестными $\operatorname{Re}\mu_j$, $\operatorname{Im}\mu_j$, $j=\overline{1,m+\kappa/2}$. Считая условия (26) выполненными, по значениям $\operatorname{Re}\Psi(t)$ формулы (25) с помощью оператора Шварца находим $\Psi(z)$, тогда в силу (24) будем иметь

$$\frac{\tilde{F}(z)}{i\tilde{F}_0(z)} = S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, z\right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2}\frac{\mu_j}{(z-z_0)^j}. \tag{27}$$

Отсюда, принимая во внимание (21) и выражение (7) для $\tilde{F}(z)$, получим

$$F(z) = ie^{i\Phi(z)}(z-z_0)^{m+\kappa/2}\left\{S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2}\operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, z\right) + i\beta_0 + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2}\frac{\mu_j}{(z-z_0)^j}\right\} \Bigg/ \left(\prod_{j=1}^{m}\left[(z-q_j)^{1+\kappa_j/2}\cdot\left(\frac{z-t_j}{z-q_j}\right)^2\right]\right). \tag{28}$$

Так как мы ищем решение $F(z)$ краевой задачи (2), непрерывное на L, то должны потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках (т.е. выражение (27)) последней формулы обращалось в нуль второго порядка в точках t_{j_1}, $j_1 = \overline{1,m}$. С этой целью потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Im} S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, t_{j_1}\right) + \beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Im}\frac{\mu_j}{(t_{j_1}-z_0)^j} = 0, \quad j_1 = \overline{1,m}. \tag{29}$$

Кроме того, указанное выражение (27), заменив в нем предварительно t на $t_* \in L$, запишем для $z = t = (q_{j_1} + R_{j_1}e^{i\gamma}) \in L_{j_1}$. Далее, потребуем, чтобы производная по γ от него в точке t_{j_1} обращалась в нуль, и будем иметь

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{j_1}} \frac{\operatorname{Im}\Big[S(c_*(t_*),t) - S(c_*(t_*),t_{j_1})\Big]}{\gamma - \gamma_{j_1}} - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2}\left\{\operatorname{Im}\left[S\left(\operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t_*-z_0)^j}, t\right)\right]'_\gamma\Bigg|_{\gamma=\gamma_{j_1}} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im}\frac{\mu_j j R_{j_1} e^{i\gamma_{j_1}}}{(t_{j_1}-z_0)^{j+1}}\right\} = 0, \tag{30}$$

здесь $j_1 = \overline{1,m}$. Последние условия (29), (30) являются необходимыми для непрерывности функции $F(z)$ формулы (28) в точках t_{j_1}; с учетом (8), (23) можно показать, что они являются и достаточными.

Соотношения (26), (29), (30) представляют собой систему $3m$ уравнений с $\kappa + 2m + 1$ действительными неизвестными $\operatorname{Re}\mu_j$, $\operatorname{Im}\mu_j$, β_0. Ранг матрицы этой системы равен $3m$, в чем убеждаемся, используя результаты, представленные в книге [3, с. 388]. Поэтому при $\kappa \geq 2m$ решение $F(z)$, определяемое формулой (28), зависит от $\kappa - m + 1$ действительных произвольных постоянных.

В случае $\kappa < 2m$ задача рассматривается аналогично тому, как это есть в статье [1].

3. Вернемся к вопросу о решении системы (19). Как известно (см. например [3, с. 329]), определитель Δ' матрицы $\|a_{kj}\|$ отличен от нуля. Замечая, что $a_{kk} < 0$, $k = \overline{1,m}$ (см. например [5, с. 264]), рассмотрим матрицу $\|a_{kj}/a_{kk}\|$, определитель которой равен $\Delta = \Delta'/(a_{11}a_{22}\cdots a_{mm})$ и отличен от нуля. Обозначим через A_{kj} алгебраическое дополнение к элементу a_{kj}/a_{kk} этого определителя. Разделим уравнение с номером k системы (19) на a_{kk} для каждого $k = \overline{1,m}$. Выражая с помощью формул Крамера θ_j, входящие в первую сумму левой части каждого уравнения системы (19), запишем:

$$\theta_j = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\left\{\frac{B_k}{a_{kk}} - 2\sum_{j_*=1}^{m}\int\limits_{L_{j_*}}\left[\sum_{j_1=1, j_1\neq j_*}^{m}\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}\right]\frac{\alpha_k(t)}{a_{kk}}\,ds - \right.$$
$$\left. -2\int\limits_{L_0}\left[\sum_{j_1=1}^{m}\arg\frac{t-t_{j_1}}{t-q_{j_1}}\right]\frac{\alpha_k(t)}{a_{kk}}ds\right\}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{31}$$

здесь, как и выше, $t_j = q_j + R_j e^{i\theta_j}$, и согласно (18) θ_j — любое действительное число.

Систему (31) запишем в виде уравнения с оператором A:

$$x_* = A(x_*), \tag{32}$$

где вектор $x_* = \{\theta_j\}_{j=1}^m$– элемент банахова пространства X с нормой (см., например [6, с. 10, 49]) $\|x_*\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{m}\theta_j^2\right)^{1/2}$, $A(x_*)$– вектор, координаты которого равны правым частям соответствующих уравнений системы (31), причем A является вполне непрерывным оператором [6, с. 409].

Так как каждая координата вектора $A(x_*)$ является функцией периодической с периодом 2π по каждому из аргументов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, то ясно, что в пространстве X найдется шар $\|x_*\| < R'$ достаточно большого радиуса R', который оператор A переводит в себя. Поэтому согласно принципу неподвижной точки Шаудера [6, с. 411] оператор A в указанном шаре имеет неподвижную точку, т.е. уравнение (32) имеет решение.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Система* (31) *имеет по крайней мере одно решение.*

Для решения системы нелинейных уравнений (31) можно использовать известные методы решения таких систем. Можно показать, что система (31) имеет единственное решение в случае, когда все R_j, $j = \overline{1, m}$, достаточно малы.

Библиографический список

1. *Салимов Р. Б.* Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 60–64.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 113–179.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 495 с.

УДК 517.956.2

РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ЗАДАЧИ ПУАССОНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

С. Л. Семенов

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа
E-mail: sergo_7@list.ru

Устанавливается разрешимость в классическом смысле задачи Пуассона для оператора Лапласа на двумерных стратифицированных множествах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения.

Solvability of Poisson's Problem for Laplace Operator on Two Dimensional Stratified Sets in Usual Sense

S. L. Semenov

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis
E-mail: sergo_7@list.ru

Solvability of Poisson's problem for Laplace operator on two dimensional stratified sets is established in usual sense.

Key words: differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сложных физических систем часто сводится к исследованию уравнений на стратифицированных множествах (связных объединениях многообразий — стратов различной размерности). Например, задача о малых перемещениях механической системы, составленной из струн, мембран и упругих тел, или задача о диффузии в слоистой среде.

Исследование эллиптических дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах активно проводится в настоящее время О. М. Пенкиным. Основные результаты о разрешимости эллиптических уравнений в этой области изложены в работах [1–3]. В них были получены условия слабой разрешимости для уравнений с «жестким» лапласианом и классической разрешимости для уравнений с «мягким» лапласианом. Было установлено, что для существования решений этих уравнений необходимо, помимо наложения ограничений на гладкость коэффициентов, входящих в уравнение, вводить ограничения на структуру стратифицированного множества. Так, в [1] доказано, что существование слабого решения обеспечивается на множествах, удовлетворяющих условию прочности, которое означает, что для каждого страта существует цепочка из стратов, соединяющая его с границей стратифицированного множества, причем размерности соседних стратов цепочки отличаются не больше чем на единицу и сама цепочка содержит только один страт, принадлежащий границе стратифицированного множества. В то же время условие прочности является недостаточным для существования классического решения. С целью установления существования классического решения для уравнения с «мягким» лапласианом было введено более строгое ограничение на структуру множества [2]. Классическая разрешимость обеспечивается на стратифицированном множестве, у которого достаточно малая окрестность любого страта, размерность которого меньше на 2 или более