5. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

6. Khromova G. V. On the approximate solutions of the Abel's equation. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15*, 2001, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ И ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О. И. Шаталина

Специалист отдела расчетных операций, Локо-Банк, Саратов, OShatalina@srt.lockobank.ru

В работе приведено семейство интегральных операторов, с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывной функции, удовлетворяющей краевым условиям (при этом указанные приближения удовлетворяют тем же условиям), и решена задача типа Колмогорова – Никольского на некотором компактном классе. Кроме того, с помощью полученного семейства интегральных операторов решается известная задача из теории некорректно поставленных задач, так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

Ключевые слова: функционал Тихонова, семейство интегральных операторов, некорректно поставленная задача, задача типа Колмогорова – Никольского, равномерные приближения.

1. Пусть непрерывная функция $\overline{u}(x)$ удовлетворяет краевому условию:

$$\cup(\overline{u}) \equiv \beta_1\overline{u}(0) + \beta_2\overline{u}(1) = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \tag{1}$$

Получим равномерные приближения к $\bar{u}(x)$, используя модификацию функционала Тихонова, известного в теории некорректно поставленных задач [1], а именно рассмотрим функционал

$$M^\alpha[u,\overline{u}] = \|u - \overline{u}\|^2_{L_2} + \alpha\|u\|^2_{W_2^1}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, $\|u\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_0^1 (pu^2 + (qu')^2)\,dx\right)^{1/2}$, p, q — положительные константы. Это так называемый тихоновский функционал, но в данном случае он связывается не с интегральными уравнениями 1-го рода, как у А. Н. Тихонова, а с простейшим уравнением 1-го рода — уравнением с оператором вложения из пространства $C[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$. При этом будем считать допустимыми функциями функции, удовлетворяющие условию (1).

Обозначим через $u^\alpha(x)$ — функции, минимизирующие функционал (2) при каждом фиксированном значении α. Существование этих функций при каждом фиксированном α доказывается точно так же, как в классической постановке А. Н. Тихонова [2].

Лемма 1. *Минимизирующие функции $u^\alpha(x)$ при каждом фиксированном α являются решением краевой задачи:*

$$\begin{cases} -qy'' + (p + \frac{1}{\alpha})y = \frac{1}{\alpha}\overline{u}, \\ \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_1 y'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (2) и его приращение

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = M^\alpha[u^\alpha + \beta\eta, \bar{u}] - M^\alpha[u^\alpha, \bar{u}],$$

где $\eta(x) \in W_2^1[0,1]$ и удовлетворяет условию (1), $\beta > 0$ — произвольное вещественное число.

Сделав необходимые преобразования, учитывая свойства скалярного произведения, получаем:

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = 2\beta\left\{(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha, \eta)_{W_2^1}\right\} + \beta^2\left\{\|\eta\|^2_{L_2} + \alpha\|\eta\|^2_{W_2^1}\right\}.$$

Приравнивая линейную часть приращения функционала к нулю, получаем:

$$(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha, \eta)_{W_2^1} = 0. \tag{4}$$

Преобразуем (4), переходя от скалярного произведения в пространстве W_2^1 к скалярному произведению в пространстве L_2:

$$(u^\alpha - \bar{u} + \alpha p u^\alpha, \eta)_{L_2} + \alpha q ({u^\alpha}', \eta')_{L_2} = 0.$$

Функция $u^\alpha(x)$ принадлежит области определения функционала (2), поэтому существует производная $(u^\alpha(x))'$. Убеждаемся, что существует $(u^\alpha(x))''$ и выполняется условие

$$\beta_2(u^\alpha(0))' + \beta_1(u^\alpha(1))' = 0.$$

Учитывая краевое условие (1), приходим к задаче (3).

Обозначим через T_α оператор, который каждой непрерывной функции $\bar{u}(x)$, удовлетворяющей условию (1), ставит в соответствие функцию, минимизирующую функционал (2).

Теорема 1. *При каждом фиксированном α оператор T_α имеет следующий интегральный вид:*

$$T_\alpha \bar{u} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)dt = 0, \tag{5}$$

где

$$K_\alpha(x,t) = \frac{1}{2\alpha_1 q}\left[\pm \operatorname{sh}\alpha_1(x-t) + \frac{D(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}{B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}\right],$$

знак «+» соответствует случаю $t \le x$, знак «−» — случаю $t \ge x$,

$$B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1 + 2\beta_1\beta_2,$$

$$D(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1(x+t) +$$

$$+(\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1(x-t) - (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1(x+t)\operatorname{ch}\alpha_1,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q}},$$

β_1, β_2 — из условия (1)*, p, q — из определения функционала $M^\alpha[u,\bar{u}]$.*

Доказательство. Применим метод вариации произвольных постоянных для решения краевой задачи (3). Решение дифференциального уравнения ищем в виде суммы

$$y(x) = C_1(x)e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{-\alpha_1 x}.$$

Для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ согласно этому методу справедлива система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{\alpha_1 x} + C_2'(x)e^{-\alpha_1 x} = 0, \\ -qC_1'(x)\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + qC_2'(x)\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} = \dfrac{1}{\alpha_1}\bar{u}, \end{cases}$$

решая которую находим

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2\alpha_1 q}\int_0^x \bar{u}(t)e^{-\alpha_1 t}\,dt + C_1^\circ, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2\alpha_1 q}\int_0^x \bar{u}(t)e^{\alpha_1 t}\,dt + C_2^\circ, \end{cases}$$

C_1° и C_2° определяем из краевых условий задачи (3). Тогда решение $y(x)$ теперь можно записать в виде

$$y(x) = \frac{1}{q\alpha_1}\int_0^x \bar{u}(t)\operatorname{sh}\alpha_1(t-x)dt + \frac{1}{4q\alpha_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}\int_0^1 \bar{u}(t)\Big[\operatorname{sh}\alpha_1(1-t)\beta_2(\beta_1+\beta_2 e^{\alpha_1})\times$$

$$\times(e^{-\alpha_1(1-x)} + e^{-\alpha_1 x}) + \operatorname{ch}\alpha_1(1-t)\beta_1(\beta_2+\beta_1 e^{\alpha_1})(e^{-\alpha_1(1-x)} - e^{-\alpha_1 x})\Big]dt.$$

Разбивая второй интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[0,x]$ и $[x,1]$ и перегруппировывая слагаемые получим:

$$y(x) = \frac{1}{\alpha_1}\int_0^x K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)\,dt + \frac{1}{\alpha_1}\int_x^1 K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)\,dt$$

отсюда получаем (5).

Теорема 2. *Для любой непрерывной функции $\bar{u}(x)$, удовлетворяющей условию* (1)*, и семейства интегральных операторов T_α имеет место сходимость*

$$\|T_\alpha \bar{u} - \bar{u}\|_{C[0,1]} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha \to 0.$$

Доказательство проводится в два этапа. Сначала предполагается, что $\bar{u}(x) \in W_2^1[0,1]$ и применяется классическая (Тихоновская) схема: устанавливается что $\bar{u}(x)$ и $u^\alpha(x)$ принадлежит одному и тому же компактному множеству, определяемому шаром в пространстве Соболева, откуда следует сходимость в этом случае [2]. Затем привлекается результат Г. В. Хромовой [3], согласно которому нормы $\|T_\alpha\|_{C[0.1]} \to C$ ограничены, откуда следует сходимость для любой непрерывной функции $\bar{u}(x)$.

2. Интегральный вид операторов T_α позволяет решить задачу об определении скорости сходимости полученных приближений на некотором классе.

Введем в рассмотрение класс функций:

$$M_B = \{u \in C[0,1] : \ U(u) = 0, \ u = B\vartheta, \ \|\vartheta\|_{L_2} \le 1\},$$

где B — интегральный оператор с ядром $B(x,t)$, имеющим вид

$$B(x,t) = \begin{cases} \beta_1, & 0 \le t \le x, \\ -\beta_2, & x < t \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

и величину

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup\left\{\|T_\alpha u - u\|_{C[0,1]} : u \in M_B\right\}. \tag{7}$$

Для этого класса решаем задачу типа Колмогорова – Никольского. Эта задача нахождения точных по порядку α оценок верхних граней отклонения функций от их приближений на некотором классе. Классическая задача Колмогорова – Никольского состоит в получении асимптотически точных значений указанных граней. В теории приближений эта задача рассматривалась в случае периодических функций и операторов из теории рядов Фурье. Г. В. Хромовой было рассмотрено обобщение, а именно поставлена задача типа Колмогорова – Никольского — получение асимптотически точных оценок по α величины $\Delta_1(T_\alpha M_B)$ для непрерывных функций, заданных на отрезке, и операторов из теории некорректно поставленных задач.

В частном случае при $\beta_2 = 0$ и $p = q = 1$ поставленная задача решена в [4].

Теорема 3. *Для класса функций M_B, в котором ядро $B(x,t)$ имеет вид* (6)*, справедлива двусторонняя асимптотическая оценка по α при $\alpha \to 0$:*

$$\frac{1}{2}\tilde{\tilde{\beta}}^2 C^* \alpha^{1/4} - \psi_1(\alpha) \le \Delta_1(T_\alpha, M_B) \le \tilde{\beta}^2 C^* \alpha^{1/4} + \psi_2(\alpha),$$

где $\psi_1(\alpha) = O(\alpha)$, $\psi_2(\alpha) = O(\alpha)$, $C^* = \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} q^{1/4}$, $\tilde{\beta} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$,

$$\tilde{\tilde{\beta}} = \begin{cases} \min(\beta_1, \beta_2), & \beta_1\beta_2 \ne 0, \\ 1, \quad \beta_1 = 0 \text{ или } \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для оценок величины $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$, определенной в (7), используем формулу из [5]:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup_{0 \le x \le 1} \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^1 K_\alpha(x,\xi) B(\xi,t) d\xi - B(x,t) \right]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $Y(x,t,\alpha) = \int\limits_0^1 K_\alpha(x,\xi)B(\xi,t)d\xi$, тогда, вычисляя этот интеграл, получаем:

$$Y(x,t,\alpha) = \begin{cases} A_1(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + O(\alpha) & \text{при } t \le x \\ A_2(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + O(\alpha) & \text{при } t \ge x, \end{cases}$$

где $B(\beta_1, \beta_2, \alpha_1)$ — из теоремы 1. Далее, имеем:

$$A_1(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1^2 q B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left[\beta_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) - \beta_2^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 t - \right.$$
$$\left. -\beta_1^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 t - \beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(x-t)\right],$$
$$A_2(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1^2 q B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left[-\beta_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + \beta_1^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{sh}\alpha_1(1-t)\operatorname{sh}\alpha_1 x + \right.$$
$$\left. +\beta_2^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(1-t)\operatorname{ch}\alpha_1 x + \beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(x-t)\right].$$

Подставляем полученный результат в интеграл

$$Y_1 = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\alpha}Y(x,t,\alpha) - B(x,t)\right]^2 dt,$$

обозначим его через $Y_1(x)$ и тогда, делая необходимые преобразования, получаем:

$$Y_1(x) = \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{B^2(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left\{ \frac{\beta_1^4}{2}(x\operatorname{ch}^2\alpha_1(1-x) + (x-1)\operatorname{sh}^2\alpha_1 x) + \frac{\beta_2^4}{2}(x\operatorname{sh}^2\alpha_1(1-x) + (x-1)\operatorname{ch}^2\alpha_1 x) + \right.$$
$$+\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{2} + \frac{\beta_1^4}{2\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 + \frac{\beta_2^4}{2\alpha_1}\operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 + \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{2\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) +$$
$$+\beta_1^3\beta_2(x\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) + \operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)) + \beta_2^3\beta_1(-x\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) + \operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)) +$$
$$\left. +\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1}\left[\beta_1^2\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 x + \beta_2^2\operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\right]\right\}.$$

Представив все гиперболические функции через экспоненты, придем к выражению:

$$Y_1(x) = \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(\beta_1^2+\beta_2^2)^2}\left\{\frac{(\beta_1^4-\beta_2^4)}{4}\varphi_1(x) + \frac{\beta_1^4}{4\alpha_1}\varphi_2(x) + \frac{\beta_2^4}{4\alpha_1}\varphi_3(x) + \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{4\alpha_1}\varphi_3(x)\right\}\left(1 + O(e^{-2\alpha_1})\right),$$

где $\varphi_1(x) = xe^{-2\alpha_1 x} + (x-1)e^{-2\alpha_1(1-x)}$, $\varphi_2(x) = 1 - e^{-2\alpha_1 x} + (x-1)e^{-2\alpha_1(1-x)}$, $\varphi_3(x) = 1 + e^{-2\alpha_1 x} - - e^{-2\alpha_1(1-x)}$.

Исследуем функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ на экстремум. Вводим $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\tilde{\beta}}$ и получаем оценки сверху и снизу величины $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$, учитывая, что $1/\alpha_1^2 = q\alpha(1+O(\alpha))$.

3. Рассмотрим случай, когда вместо точной функции $\overline{u}(x)$ нам известна функция $u_\delta(x)$ такая, что $\|u_\delta - u\| \le \delta$. Поставим задачу получения по u_δ и δ равномерных приближений к $\overline{u}(x)$. Это известная задача из теории некорректно поставленных задач (так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному δ-приближению). Общая постановка задачи восстановления для гильбертовых пространст дана в [6]. Задача восстановления функций на $[a,b]$ из $L_2 \to C$ рассматривалась Г. В. Хромовой [7].

Поставленную задачу позволяет нам решить опять же интегральный вид операторов T_α. Справедлива

Теорема 4. *Для нормы интегрального оператора T_α имеет место равенство*

$$\|T_\alpha\|_{L_2\to C} = \frac{\tilde{\beta}^2\alpha^{-1/4}}{\sqrt{2(\beta_1^2+\beta_2^2)}q^{1/4}} + O(\alpha^{3/4}),$$

асимптотическое по α при $\alpha \to 0$, где $\tilde{\beta} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Доказательство. Норму оператора считаем, по следующей формуле:

$$\|T_\alpha\|_{L_2\to C} = \frac{1}{\alpha}\max_{0\le x\le 1}\left(\int\limits_0^1 K_\alpha^2(x,t)\,dt\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $K_\alpha(x,t)$ — из теоремы 1.

Вычисляем интеграл $\int\limits_0^1 K_\alpha^2(x,t)\,dt$ и, представив гиперболические функции через экспоненты и выполнив ряд преобразований, получаем:

$$\int\limits_0^1 K_\alpha^2(x,t)dt = \frac{1}{4\alpha_1^3 q^2}\left[1+\varphi(x,\alpha_1)+O(e^{-\alpha})\right],$$

где

$$\varphi(x,\alpha_1) = \frac{\beta_1^2-\beta_2^2}{\beta_1^2+\beta_2^2}\left[e^{-2\alpha_1(1-x)}(1+2\alpha_1(1-x)) - e^{-2\alpha_1 x}(1+2\alpha_1 x)\right].$$

Находим максимум по x функции $\varphi(x,\alpha_1)$ на отрезке $[0,1]$. Тогда возвращаясь к формуле (8), получаем утверждение теоремы.

Теоремы 3 и 4 дают возможность решить задачу о получении точной по порядку оценки погрешности приближенных решений задачи восстановления функций на классе M_B и получить согласование $\alpha=\alpha(\delta)$, обеспечивающее эту оценку.

Рассмотрим величину:

$$\Delta(\delta,T_\alpha,M_B) = \sup\left\{\|T_\alpha u_\delta - u\|_{C[0,1]}:\ u\in M_B,\ \|u-u_\delta\|_{L_2}\le\delta\right\}.$$

Теорема 5. *Справедлива двусторонняя ассимптотическая по δ, при $\delta\to 0$ оценка*

$$C_2\delta^{1/2} - \varkappa_2(\delta) \le \Delta(\delta,T_{\alpha(\delta)},M_B) \le C_1\delta^{1/2}+\varkappa_1(\delta),$$

где

$$C_1 = \frac{2^{3/4}\tilde\beta^2(\beta_1+\beta_2)^{1/2}}{(\beta_1^2+\beta_2^2)^{3/4}}, \qquad C_2 = \frac{(\tilde{\tilde\beta}^2+2\tilde\beta^2)(\beta_1+\beta_2)^{1/2}}{2^{\frac94}(\beta_1^2+\beta_2^2)^{3/4}},$$

$$\alpha=\alpha(\delta) = \frac{\delta^2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{2q(\beta_1+\beta_2)^2}, \qquad \varkappa_j(\delta)=O(\delta^{1/2}), \qquad j=1,2.$$

Доказательство. Метод получения оценок погрешностей был разработан Г. В. Хромовой [8] на базе решения задачи типа Колмогорова – Никольского. Отправным моментом при доказательстве теоремы является известная оценка [8] для величины $\Delta(\delta,T_\alpha,M_B)$, которая применительно к нашей задаче имеет вид

$$\frac12(\Delta_1(T_\alpha,M_B)+\|T_\alpha\|_{L_2\to C}\delta) \le \Delta(\delta,T_\alpha,M_B) \le \Delta_1(T_\alpha,M_B)+\|T_\alpha\|_{L_2\to C}\delta.$$

Используя теорему 3 и теорему 4, получаем:

$$\frac12\left(\frac12\tilde{\tilde\beta}^2C^*\alpha^{1/4}+\frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}}-\psi_1(\alpha)\right)\le\Delta(\delta,T_\alpha,M_B)\le$$
$$\le\tilde\beta^2C^*\alpha^{1/4}+\frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}}+\psi_2(\alpha). \qquad (9)$$

Обозначим через

$$\varphi(\alpha)=\tilde\beta^2C^*\alpha^{1/4}+\frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}}.$$

Находим $\varphi'(\alpha)$, приравниваем ее к нулю и находим зависимость $\alpha=\alpha(\delta)$. Подставив найденное согласование в (9), приходим к утверждению теоремы.

Библиографический список

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. *Васин В. В., Иванов В. К., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
3. *Хромова Г. В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 75–82.
4. *Шаталина О. И.* Оценка погрешностей приближенного решения задач восстановления функции на некотором компактном классе // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Уральск : Изд-во Уральск. федер. ун-та. 2011. С. 97–98.
5. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9 (532). С. 71–78.
6. *Морозов В. А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–884.
7. *Хромова Г. В.* О задачах восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
8. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

Approximation and Reconstruction of Continuous Function with Boundary Conditions

O. I. Shatalina

LOCKO-Bank, 72, Pugacheva str., Saratov, 410056, Russia, OShatalina@srt.lockobank.ru

This work deals with a family of integral operators, which are used to get uniform approximations to continuous function with boundary conditions (stated approximations with the same conditions as well); the Kolmogorov – Nikolsky problem is solved on some compact class. Acquired problem from the theory of ill-posed problems (so-called problem of reconstruction of a continuous function using its mean-root-square approximation) is solved via the goal family of integral operators as well.

Key words: Tikhonov functional, family of integral operators, ill-posed problem, Kolmogorov – Nikolsky problem, uniform approximations.

References

1. Tikhonov A. N. The regularization of ill-posed problem. *Dokl. Akad. Nauk*, 1963, vol. 153, no. 1, pp. 49–52 (in Russian).
2. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
3. Khromova G. V. On Tikhonov's regularization. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, 2001, vol. 1, iss. 2, pp. 75–82 (in Russian).
4. Shatalina O. I. Error estimate for the approximate solution of the problem of restoration of function on some compact class. *Algoritmicheskii analiz neustoichivykh zadach* [Algorithmic analysis of unstable problems], Uralsk, Publ. Ural Federal Univer, 2011, pp. 97–98 (in Russian).
5. Khromova G. V. On the moduli of continuity of unbounded operators. *Russ. Math.*, 2006, vol. 50, no. 9, pp. 67–74.
6. Morozov V. A. On restoring functions by the regularization method. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 208–219. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90153-X.
7. Khromova G. V. Restoration of an inaccurately specified function. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 58–68. DOI: 10.1016/0041-5553(77)90008-8.
8. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. 390–394.