



МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

С. П. Безгласный

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, bezglasnsp@rambler.ru

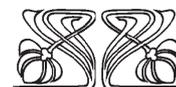
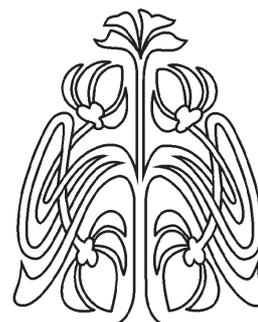
Статья посвящена проблеме синтеза пассивных управлений, решающих задачу об управлении плоских движений двухмассового параметрического маятника в поле силы тяжести. Актуальность исследований определена необходимостью в приборостроении математического конструирования систем управления автоматических механизмов, в частности при исследовании маятниковых движений механических систем. Маятник моделируется двумя одинаковыми невесомыми стержнями с двумя равными точечными массами, двигающимися по окружности вокруг точки закрепления. Управление реализуется путем непрерывного изменения угла между стержнями и является функцией, зависящей от изображающей точки центра масс маятника на фазовой плоскости. Построены два управляющих закона, реализующих процессы раскачивания и затухания маятника в окрестности нижнего положения равновесия по принципу качелей. Задача решена методом функций Ляпунова классической теории устойчивости. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления механизмами в технике и приборостроении.

Ключевые слова: маятник, положение равновесия, принцип качелей, стабилизирующее управление, метод функции Ляпунова.

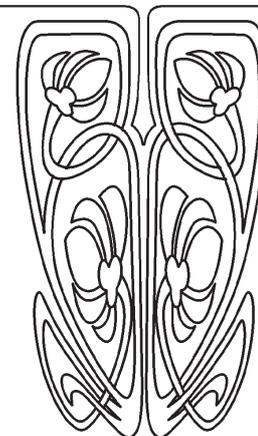
ВВЕДЕНИЕ

Математический маятник и его обобщения широко используются в прикладных задачах при моделировании движений разных систем. Также он обнаруживает много качественных свойств динамики нелинейной системы, вызывая самостоятельный интерес у современных исследователей. Так, например, в работе [1] получены бифуркационные диаграммы равновесий, исследованы резонансы и показано наличие стохастической паутины вблизи равновесий в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса. В [2] с помощью метода предельных функций и предельных систем [3] исследована и решена задача о стабилизации релейным управлением программных движений маятника в переменном поле силы тяжести при наличии неучтенных воздействий. Задачи о построении асимптотически устойчивых заданных маятниковых движений волчка Лагранжа на подвижной платформе и руки робота-манипулятора, моделируемой двустепенным маятником переменной длины, решены в работах [4, 5] соответственно.

Одной из классических задач механики о маятниковых движениях является задача о движении качелей. При исследовании динамики



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





качелей рассматривают две основные модели — одномассовый и двухмассовый маятники. Используя одномассовую модель в виде математического маятника переменной длины, авторы ряда работ, например [6—8], исследовали вопросы устойчивости и неустойчивости верхнего и нижнего положений, влияния сил (сухого, вязкого трений и аэродинамического сопротивления), выбора оптимальных режимов раскачки, гашения колебаний и возникновения резонансов. Двухмассовая модель качелей использована в работах [9—12]. В [9] методами усреднения и принципа максимума решены задачи управления и оптимизации движений для случаев малых колебаний и быстрых вращений путем регулируемой по скорости длиной маятника. В работе [10] синтезированы процессы оптимальной раскачки и оптимального торможения качелей релейным и «релейно-непрерывным» управлением длиной подвеса подвижной массы (без трения и с наличием разных видов трения). В отличие от большинства указанных выше работ, в которых задачи об управлении качелями решались с помощью скачкообразного (релейного) изменения величины перемещения подвижной массы, невозможного для практической реализации в силу инертности масс, авторами работы [11] был предложен гладкий закон движения подвижной массы с непрерывной производной, на основе которого были исследованы управляемые движения в окрестностях нижнего и верхнего положений равновесия качелей и оценены зоны застоя, возникающие при влиянии сил вязкого трения. Применению этого закона управления для диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите с помощью подвижной массы по принципу качелей посвящена работа [12]. Но управляющий закон, использованный в этих работах, предполагает неограниченность расстояния от точки подвеса до подвижной массы в обе стороны, в частности, в [11] авторами приведен численный пример, в котором теоретически считается, что стержень продлен вверх за точку подвеса маятника с предоставленной возможностью движения по нему подвижной массы, что является нецелесообразным и крайне затруднительным с точки зрения практической реализации. В работе [13] были предложены новые законы управления подвижной массой по принципу качелей, которые предполагают ограниченность относительного перемещения этой массы вдоль стержня.

В данной работе рассматривается модель параметрического маятника, представляющего совокупность двух симметрично отклоненных от оси симметрии одинаковых по длине и массе маятников с возможностью управлять величиной угла между ними. Предложены законы управления этим углом, позволяющие раскачивать и гасить колебания рассматриваемой модели по принципу качелей. Ограниченность и гладкость закона управления позволяют на основе классической теории устойчивости аналитически доказать асимптотическую устойчивость и неустойчивость различных движений маятника путем построения соответствующих функций Ляпунова. С помощью численного моделирования движений исследуемой системы графически иллюстрируется асимптотическая устойчивость полученных решений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим параметрический двухмассовый маятник, состоящий из двух равных точечных масс m , неподвижно закрепленных на концах двух одинаковых невесомых стержней длиной b (рис. 1). Свободные концы стержней закреплены шарнирно в неподвижной точке O . Угол между стержнями обозначим 2ψ , тогда на пересечении его биссектрисы с отрезком, соединяющим обе точечные массы, будет находиться центр масс маятника. Расстояние от точки O до центра масс обозначим l .

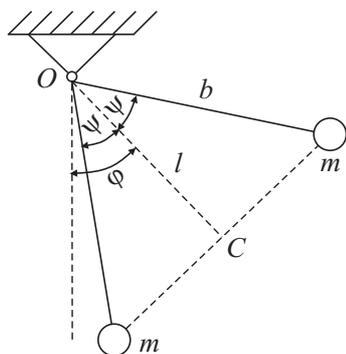


Рис. 1. Маятник

За обобщенную переменную, описывающую движение маятника, примем величину угла отклонения биссектрисы от вертикали φ . Движения маятника происходят в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Управлением будем считать величину угла ψ , являющуюся непрерывной функцией вектора фазового состояния:

$$\psi = \psi(\varphi, \varphi'),$$

где штрих обозначает производную по времени.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника имеют вид

$$T = mb^2 (\varphi'^2 + \psi'^2), \quad \Pi = -2mgb \cos \varphi \cos \psi.$$

Записав лагранжиан рассматриваемой системы:

$$L = T - \Pi = mb^2 (\varphi'^2 + \psi'^2) + 2mgb \cos \varphi \cos \psi,$$



имеем уравнение движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода:

$$\varphi'' + \frac{g}{b} \sin \varphi \cos \psi = 0, \quad (1)$$

где g — ускорение сил тяготения.

Поставим и решим следующие задачи управления плоскими движениями параметрического маятника — построить непрерывные законы правления величиной угла ψ , реализующие раскачку и асимптотическое успокоение колебаний соответственно в окрестности нижнего положения равновесия.

2. УПРАВЛЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИМИ ДВИЖЕНИЯМИ МАЯТНИКА

Решение задачи об асимптотическом успокоении колебаний двухмассового маятника относительно его нижнего положения равновесия получим на основе второго метода классической теории устойчивости. Выберем управляющий закон в виде

$$\psi = \arccos \frac{\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi}{b}, \quad (2)$$

где величина $\ell_0 = \text{const} > 0$ задает некоторое положение стержней маятника, соответствующее нижнему положению равновесия, число a удовлетворяет условию $0 < a = \text{const} < \ell_0$.

Подставив (2) в уравнение (1), получим:

$$\varphi'' + \frac{g}{b^2} (\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) выберем функцию Ляпунова $V = V(\varphi, \varphi')$:

$$V = \varphi'^2 (1 + k\varphi\varphi') + \frac{2g\ell_0}{b^2} (1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

Эта функция при любых значениях коэффициента k в окрестности нижнего положения равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ является положительно определенной и допускает бесконечно малый высший предел по переменным φ, φ' . Оценим полную производную этой функции по времени в силу уравнения (3):

$$V' = -\frac{g}{b^2} (\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi (2\varphi' + 3k\varphi\varphi'^2) + k\varphi'^4 + \frac{2g\ell_0}{b^2} \varphi' \sin \varphi. \quad (5)$$

Разложив в правой части равенства (5) функцию $\sin \varphi$ в ряд и выполнив элементарные преобразования и отбросив слагаемые старше четвертой степени по переменным φ, φ' , получим, что в окрестности положения $\varphi = \varphi' = 0$ производная (4) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости представима выражением

$$V' \approx k\varphi'^4 - \varphi^2 \varphi'^2 g \left(\frac{3k\ell_0 + 2a}{b^2} \right).$$

При выборе коэффициента k согласно условиям

$$-\frac{2a}{3\ell_0} < k < 0,$$

например, выберем

$$k = -\frac{a}{3\ell_0},$$

будем иметь оценку производной функции Ляпунова V' в виде

$$V' \approx -\frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4 - \frac{ag}{b^2} \varphi'^2 \varphi^2 \leq -\frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4.$$

Таким образом, функция V' будет знакопостоянной отрицательной функцией по своим переменным φ, φ' . Множество, на котором эта производная обращается в ноль, есть множество $\{\varphi' = 0\}$ и оно не содержит решений системы (3), кроме $\varphi = 0$. На основе теоремы Барбашина – Красовского [14] имеем асимптотическую устойчивость нижнего положения равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ маятника.



Проведенные численные расчеты подтверждают сделанные выводы об асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия маятника и демонстрируют асимптотическое затухание амплитуды колебаний не только в малой окрестности, но и при произвольно больших начальных отклонениях. На рис. 2 изображен график зависимости угла φ от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (3) при следующих значениях параметров системы: $l_0 = 2$ м, $b = 4$ м, $a = 1$ м, $g = 9.81$ м/с², и начальных данных: $\varphi(0) = 2$ рад, $\varphi'(0) = 0$ рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке $[0, 80]$ с.

На рис. 3 изображен фазовый портрет решения уравнения (3) с управлением (2). Фазовая траектория отображает затухание амплитуды и скорости колебаний маятника вокруг нулевого положения равновесия, начинающихся с достаточно больших значений $\varphi(0) = 2$ рад начальных отклонений. Графики, представленные на рис. 2 и 3, иллюстрируют очень медленную сходимость решений к нулевому положению равновесия после значений $\varphi = 0.3$ рад, что позволяет сделать вывод о слабой эффективности предложенных управлений при малых углах отклонений. Тем не менее численное интегрирование, проведенное на больших интервалах времени, подтверждает асимптотическую сходимость решений и отсутствие ненулевых предельных циклов.

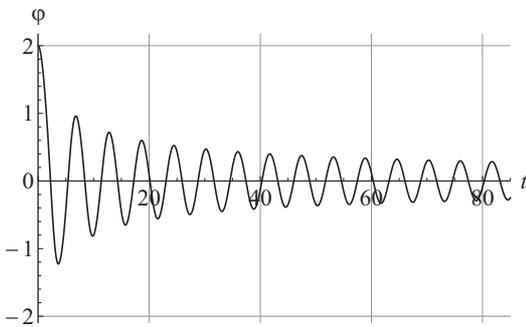


Рис. 2. График величины $\varphi(t)$

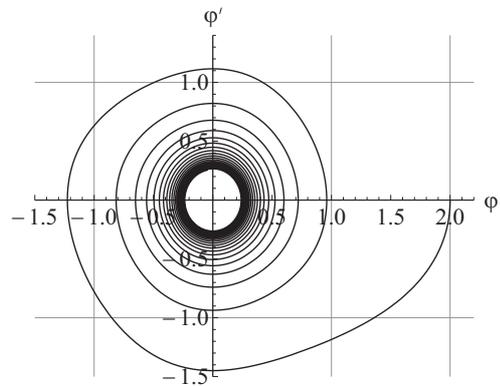


Рис. 3. Фазовый портрет

Рис. 4 демонстрирует поведение величины расстояния l от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ . Из него видно, что перемещения точки вдоль прямой O происходят в окрестности величины l_0 , и точка с течением времени асимптотически приближается к положению l_0 . На рис. 5 представлено поведение величины $\psi(t)$, изменяющейся согласно управляющему закону (2). График демонстрирует асимптотическое приближение величины $\psi(t)$ к значению $\psi = \arccos \frac{l_0}{b}$ с течением времени.

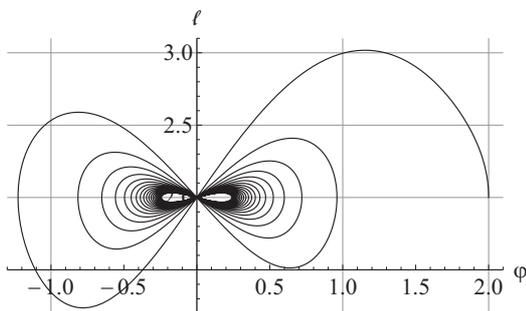


Рис. 4. График величины $l(\varphi)$

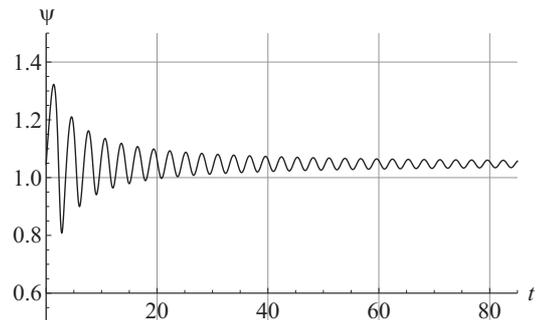


Рис. 5. График величины $\psi(t)$

3. РАСКАЧКА МАЯТНИКА

Применим аналогичный подход к решению задачи о раскачке маятника из произвольной окрестности нижнего положения равновесия. Заметим, что при нулевых начальных значениях $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$ система (1) является неуправляемой для всех $t_0 < t < \infty$ при любом законе управ-



ления вида $\psi = \psi(\varphi, \varphi')$. Однако если выбором этого закона добиться, чтобы положение $\varphi = \varphi' = 0$ системы было неустойчивым по Ляпунову, то действующие на систему внешние возмущения выведут ее из положения равновесия, и станет возможным эффективный процесс управления — раскачка.

Выбрав закон управления в виде

$$\psi = \arccos \frac{\ell_0 - a\varphi' \sin \varphi}{b} \quad (6)$$

и подставив (6) в уравнение (1), получим уравнение управляемого возмущенного движения маятника в окрестности исследуемого нулевого решения $\varphi = \varphi' = 0$:

$$\varphi'' + \frac{g}{b^2} (\ell_0 - a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (7)$$

Для доказательства неустойчивости нулевого решения системы (7) воспользуемся положительно определенной функцией Ляпунова (4). Ее полная производная по времени в силу уравнения (7) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости включительно по переменным φ, φ' имеет вид

$$V' \approx k\varphi'^4 + \varphi^2 \varphi'^2 g \frac{2a - 3k\ell_0}{b^2}. \quad (8)$$

При выборе коэффициента k согласно условиям

$$0 < k < \frac{2a}{3\ell_0},$$

например, выберем

$$k = \frac{a}{3\ell_0},$$

будем иметь оценку производной (8) в виде

$$V' \approx \frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4 + \frac{ag}{b^2} \varphi'^2 \varphi^2.$$

На основе первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [14] имеем неустойчивость нижнего положения равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ маятника.

На рис. 6 изображен график зависимости угла φ от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (7) при следующих значениях параметров системы: $\ell_0 = 2$ м, $b = 4$ м, $a = 2/3$ м, $g = 9.81$ м/с² и начальных данных: $\varphi(0) = 0.3$ рад, $\varphi'(0) = 0$ рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке $[0, 120]$ с.

На рис. 7 изображен соответствующий фазовый портрет. Фазовая траектория отображает нарастание с течением времени амплитуды и скорости колебания двухмассового маятника и переход от колебаний к вращательному движению.

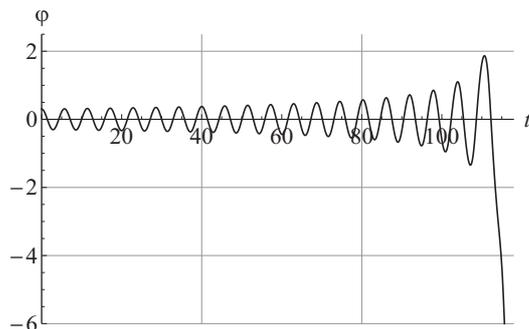


Рис. 6. График величины $\varphi(t)$

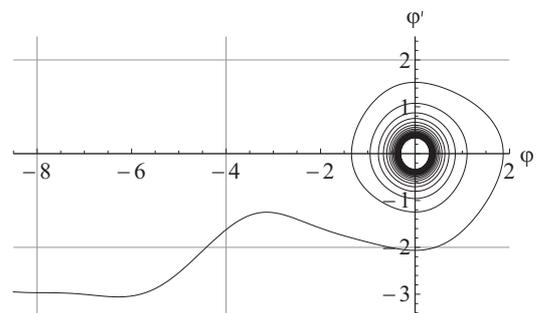
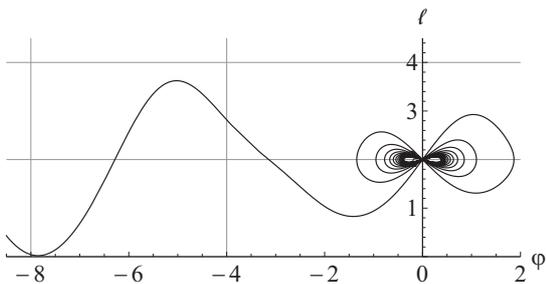
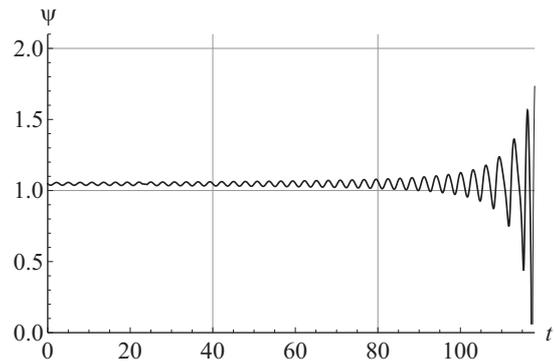


Рис. 7. Фазовый портрет

Рис. 8 демонстрирует поведение величины расстояния ℓ от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ , которая при нарастании отклонений и скоростей и переходе маятника от колебательных к вращательным движениям может существенно удалиться от значения ℓ_0 .

На рис. 9 представлено поведение величины $\psi(t)$, изменяющейся согласно управляющему закону (6).

Рис. 8. График величины $l(\varphi)$ Рис. 9. График величины $\psi(t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для задачи параметрического управления плоскими движениями двухмассового маятника предложены законы управления его раскачкой и асимптотическим успокоением путем непрерывного изменения величины угла между стержнями, зависящей от фазового состояния центра масс маятника. Для предложенных законов управления методом функций Ляпунова доказаны асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответственно успокоения и раскачки маятника относительно нижнего положения равновесия. Теоретические результаты подтверждены и проиллюстрированы численными расчетами. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании управляемых маятниковых движений различных механических систем.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 9.540.2014/К).

Библиографический список

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 36–51. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003.
2. Андреев А. С. Метод функций Ляпунова в задачах управления // Журн. Средневолжского матем. о-ва. 2010. Т. 12, № 4. С. 64–73.
3. Андреев А. С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 388–396. DOI: 10.1016/S0021-8928(96)00048-2.
4. Безгласный С. П., Мысина О. А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 44–52.
5. Безгласный С. П., Батина Е. С., Воробьев А. С. Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 36–42.
6. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата : Наука, 1981. 253 с.
7. Сейранян А. П. Качели. Параметрический резонанс // ПММ. 2004. Т. 68, вып. 5. С. 847–856. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.011.
8. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 6. С. 893–901. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.01.004.
9. Акуленко Л. Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 2. С. 82–91. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90058-T.
10. Лавровский Э. К., Формальский А. М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 2. С. 92–101. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90059-U.
11. Асланов В. С., Безгласный С. П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 32–46. DOI: 10.3103/S002565441203003X.
12. Асланов В. С., Безгласный С. П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 563–573. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.007.
13. Безгласный С. П., Пиякина Е. Е., Талипова А. А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34, № 4. С. 35–41.
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.



On Control of Motion of a Parametric Pendulum

S. P. Bezglasnyi

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University, 34, Moskovskoe shosse, 443086, Samara, Russia, bezglasnsp@rambler.ru

The paper is devoted to a passive control problem. The problem of control of plane motions of a two-mass parametric pendulum in a uniform gravitational field is considered. The problem is important for and necessary in software design of automated systems for control of mechanisms. In particular, it can be applied to various modeling problems of pendulum motions of mechanical systems. The pendulum is modeled by two equivalent weightless rods with two equivalent point masses moving along the circle centered at the pivot. The control is carried out by varying continuously the angle between two rods. It is a function that depends on the representative point of the gravity center of pendulum in the phase plane. Two control processes of excitation and damping pendulum near the lower equilibrium position by swing principle are constructed. The problem is resolved by the method of Lyapunov's functions known from the classical theory of stability. The control is obtained in the form of closed form solution in the class of continuous functions. The obtained results are an important contribution to development of control mechanisms in engineering.

Key words: pendulum, equilibrium position, swing principle, stabilizing control, the method of Lyapunov's functions.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 9.540.2014/K).

References

1. Krasil'nikov P. S. The Non-linear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 25–35. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003.
2. Andreev A. S. Lyapunov Functions Method in the Problems of Control. *J. Srednevolzhskogo Math. Obschestva*, 2010, vol. 12, no. 4, pp. 64–73 (in Russian).
3. Andreev A. S. On the stability of equilibrium position of the non-autonomous mechanical system. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1996, vol. 60, iss. 3, pp. 388–396. DOI: 10.1016/S0021-8928(96)00048-2.
4. Bezglasnyi S. P., Mysina O. A. Stabilization of Program Motions of a Rigid Body on a Moving Platform. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 44–52 (in Russian).
5. Bezglasnyi S. P., Batina E. S., Vorobyov A. S. Synthesis of Asymptotically Stable Motion of a Robot Arm Manipulator. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 36–42 (in Russian).
6. Strizhak T. G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «majatnik»* [Methods for Studying «Pendulum»-Type Dynamical Systems]. Alma-Ata, Nauka, 1981, 253 p. (in Russian).
7. Seyranian A. P. The swing : Parametric resonance. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2004, vol. 68, iss. 5, pp. 757–764. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.011.
8. Akulenko L. D., Nesterov S. V. The stability of the equilibrium of a pendulum of variable length. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 642–647. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.01.004.
9. Akulenko L. D. Parametric control of vibrations and rotations of a compound pendulum (a swing). *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1993, vol. 57, iss. 2, pp. 301–310. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90058-T.
10. Lavrovskii E. K., Formal'skii A. M. Optimal control of the pumping and damping of a swing. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1993, vol. 57, iss. 2, pp. 311–320. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90059-U.
11. Aslanov V. S., Bezglasnyi S. P. Stability and instability of controlled motions of a two-mass pendulum of variable length. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 285–297. DOI: 10.3103/S002565441203003X.
12. Aslanov V. S., Bezglasnyi S. P. Gravitational stabilization of a satellite using a movable mass. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 405–412. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.007.
13. Bezglasnyi S. P., Pijakina E. E., Talipova A. A. Limited Control of Dual-mass Pendulum Motion. *Avtomatizacija processov upravlenija*, 2013, vol. 34, no. 4, pp. 35–41 (in Russian).
14. Malkin I. G. *Teoriya ustojchivosti dvizhenija* [Theory of Motion Stability]. Moscow, Nauka, 1966, 530 p. (in Russian).