on mathematical analysis. The results of science. South of Russia. Mat. forum]. Vladikavkaz, UMI VSC RAS, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 218–230 (in Russian).

6. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Lokal'noe opisanie tselykh funktsii. Podmoduli ranga 1 [Local description of entire functions. Submodules of rank 1]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 14–28 (in Russian).
7. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral analysis on convex regions. *Math. USSR-Sb.*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500.
8. Azarin V. S. On the decomposition of an entire function of finite order into factors having given growth. *Math. USSR-Sb.*, 1973, vol. 19, no. 2, pp. 225–226.
9. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. IV : Synthesis. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 407–426.
10. Khabibullin B. N. *Teoremy sravneniia i odnorodnosti dlia subgarmonicheskikh funktsii*. Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Comparison theorems for subharmonic functions : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov-on-Don, 1985. 103 p. (in Russian).
11. Krasichkov I. F. Sravnenie tselykh funktsii tselogo poriadka po raspredeleniiu ikh kornei [Comparison of entire functions of finite order by means of the distribution of their roots]. *Mat. Sb.*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 198–230 (in Russian).
12. Pis'mennyi R. G. Factoring of an entire function into two equivalent functions. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 19–30 (in Russian).
13. Pis'mennyi R. G., Shishkin A. B. Rasshcheplenie tselykh funktsii konechnogo poriadka na ekvivalentnye mnozhiteli [Splitting entire functions of finite order in the equivalent factors]. *Vest. Adyg. gos. un-ta. Ser. Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 2(61), pp. 23–28 (in Russian).
14. Volkovaya T. A. Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 251–262 (in Russian).
15. Leont'ev A. F. *Riady eksponent* [Exponential series]. Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
16. Gol'dberg A. A., Ostrovskii I. V. O proizvodnykh i pervoobraznykh tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [Derivatives and primitives of entire functions of completely regular growth]. *Teoriia funktsii, funkts. analiz i ikh pril. (Kharkiv)*, 1973, no. 18, pp. 70–81 (in Russian).

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с периодическими краевыми условиями в центрально-симметричном случае, когда потенциал симметричен относительно середины интервала. Обсуждается постановка обратной задачи, приводится алгоритм ее решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, периодические краевые условия, обратные спектральные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля:

$$\ell y := y'' + q(x)y, \qquad x \in (0, \pi),$$

на конечном интервале $(0, \pi)$ с периодическими краевыми условиями. Обратные задачи заключаются в восстановлении коэффициентов дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике и приложениях. Обратные задачи для дифференциальных операторов с распадающимися краевыми условиями достаточно полно изучены (см. монографии [1–5] и списки литературы). Более трудные обратные задачи для операторов Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями изучались в [6–17] и других работах. В частности, периодическая краевая задача рассматривалась в [6, 7, 9, 14]. И. В. Станкевич [6] предложил постановку обратной задачи и доказал соответствующую теорему единственности. В. А. Марченко и И. В. Островский [7] дали характеризацию спектра периодической краевой задачи в терминах специального конформного отображения. Условия, предложенные в [7], трудны для проверки. Другой метод, использованный в [9], позволил получить более удобные для проверки необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в периодическом случае. Аналогичные результаты получены в [9] и для другого типа краевых условий, а именно

$$y'(0) - ay(0) + by(\pi) = y'(\pi) + dy(\pi) - by(0) = 0.$$

Позднее похожие результаты получены в [12, 13].

В данной статье исследуется случай, когда потенциал q симметричен относительно середины интервала, т. е. $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0, \pi)$. Симметричный случай требует нетривиальных изменений в методе и позволяет задавать меньше спектральной информации, чем в общем случае. Некоторые результаты для симметрического случая получены в [10] и [17]. В данной статье для симметрического случая мы строим решение обратной спектральной задачи и даем характеризацию спектра. Для удобства читателей в п. 1 мы кратко приводим известные результаты для общего (несимметрического) случая.

1. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр и $q(x) \in L_2(0, T)$ — вещественнозначная функция, которая называется потенциалом. Пусть $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения уравнения (1) при начальных условиях $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = -\psi'(\pi, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = 0$. При каждом x функции $C^{(\nu)}(x, \lambda)$, $S^{(\nu)}(x, \lambda)$ и $\psi^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$, причем

$$\langle C(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle \equiv 1, \tag{2}$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z. Обозначим

$$\Delta(\lambda) = (C(\pi, \lambda) + S'(\pi, \lambda))/2, \qquad \delta(\lambda) = (C(\pi, \lambda) - S'(\pi, \lambda))/2, \; p(\lambda) = 1 - \Delta(\lambda).$$

Нули $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$ целой функции $p(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $L = L(q)$ для уравнения (1) с периодическими краевыми условиями:

$$y(0) - y(\pi) = y'(0) - y'(\pi) = 0.$$

Функция $p(\lambda)$ называется характеристической функцией для L. Для удобства читателей приведем здесь кратко известные результаты, относящиеся к краевой задачи L (подробнее см. [6, 7, 9]).

1. Все собственные значения λ_n вещественны и

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 < \ldots, \tag{3}$$

$$\lambda_{2n} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n}, \qquad \lambda_{2n-1} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n-1}, \qquad \{\kappa_n\} \in l_2, \tag{4}$$

где $\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt$. Здесь и далее один и тот же символ $\{\kappa_n\}$ обозначает различные последовательности из l_2. Задание Λ однозначно определяет характеристическую функцию $p(\lambda)$ по формуле

$$p(\lambda) = \frac{\pi^2}{2}(\lambda - \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2n} - \lambda}{(2n)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2n-1} - \lambda}{(2n)^2}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\max_{\lambda\in[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]} p(\lambda) \geqslant 2, \qquad n \geqslant 0. \tag{6}$$

2. Пусть $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n\geqslant 1}$ — нули целой функции $p^+(\lambda) := p(\lambda) - 2$. Тогда $\{\lambda_n^+\}_{n\geqslant 0}$ вещественны и

$$\lambda_0 < \lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3^+ \leqslant \lambda_4^+ < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \ldots, \tag{7}$$

$$\lambda_{2n}^+ = (2n-1)^2 + \alpha + \kappa_{2n}, \qquad \lambda_{2n-1}^+ = (2n-1)^2 + \alpha + \kappa_{2n-1}, \qquad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{8}$$

Обозначим: $a_{2n} = [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $a_{2n-1} = [\lambda_{2n-1}^+, \lambda_{2n}^+]$, $n \geqslant 1$. Отрезки a_n называются лакунами.

3. Положим $d(\lambda) := \langle \psi(x,\lambda), S(x,\lambda)\rangle = S(\pi,\lambda) = \psi(0,\lambda)$. Нули $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ целой функции $d(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $L_0 = L_0(q)$ для уравнения (1) с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Числа γ_n вещественны, $\gamma_n \in a_n$, и

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots; \quad \gamma_n = n^2 + \alpha + \kappa_n, \qquad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{9}$$

Задание спектра γ однозначно определяет функцию $d(\lambda)$ по формуле

$$d(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \lambda}{n^2}. \tag{10}$$

Числа $\alpha_n := \int_0^\pi S^2(x,\gamma_n)\,dx$ называются весовыми числами, а совокупность чисел $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ называется спектральными данными для краевой задачи L_0. Имеем

$$\alpha_n = \dot{d}(\gamma_n) S'(\pi,\gamma_n), \qquad \dot{d}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} d(\lambda), \tag{11}$$

$$\alpha_n > 0; \qquad \alpha_n = \frac{\pi}{2n^2}\Big(1 + \frac{\kappa_n}{n}\Big), \qquad \{\kappa_n\} \in l_2, \tag{12}$$

$$\dot{d}(\gamma_n) = \frac{(-1)^n \pi}{2n^2}\Big(1 + \frac{\kappa_n}{n}\Big), \qquad \{\kappa_n\} \in l_2, \qquad \operatorname{sign} \dot{d}(\gamma_n) = (-1)^n. \tag{13}$$

Функции $S(x,\gamma_n)$ и $\psi(x,\gamma_n)$ являются собственными функциями для L_0, причем

$$\psi(x,\gamma_n) = \beta_n S(x,\gamma_n), \qquad \beta_n \neq 0. \tag{14}$$

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\alpha_n \beta_n = -\dot{d}(\gamma_n). \tag{15}$$

Доказательство. Так как

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda), \qquad -S''(x,\gamma_n) + q(x)S(x,\gamma_n) = \gamma_n S(x,\gamma_n),$$

то

$$\frac{d}{dx}\langle \psi(x,\lambda), S(x,\gamma_n)\rangle = (\lambda - \gamma_n)\psi(x,\lambda)S(x,\gamma_n),$$

следовательно,

$$(\lambda - \gamma_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda)S(x,\gamma_n)\,dx = \langle \psi(x,\lambda), S(x,\gamma_n)\rangle\Big|_0^\pi = -d(\lambda).$$

При $\lambda \to \lambda_n$ это дает

$$\int_0^\pi \psi(x,\gamma_n)S(x,\gamma_n)\,dx = -\dot{d}(\gamma_n).$$

Используя (14), приходим к (15). □

Обратная задача для краевой задачи L_0 формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. *Даны спектральные данные $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$, найти потенциал q.*

Эта обратная задача относится к случаю распадающихся краевых условий. Известно, что задание спектральных данных $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ однозначно определяет потенциал q. Глобальное решение нелинейной обратной задачи 1 может быть построено методом оператора преобразования или методом спектральных отображений (подробнее см. [1–5]). В частности, эти методы позволяют описать необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1, которые представлены в следующей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ *были спектральными данными для некоторой краевой задачи* L_0 *с потенциалом* $q(x) \in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись* (9) *и* (12).

Вернемся теперь к периодической краевой задаче L. Из (2) вытекает, что

$$\Delta^2(\lambda) - \delta^2(\lambda) - d(\lambda)d_1(\lambda) \equiv 1, \tag{16}$$

где $d_1(\lambda) := C'(\pi,\lambda)$. В частности, (16) дает

$$\delta^2(\gamma_n) = \Delta^2(\gamma_n) - 1. \tag{17}$$

Обозначим: $\Omega = \{\omega_n\}_{n\geqslant 1}$, $\omega_n = \operatorname{sign}\delta(\gamma_n)$. Последовательность Ω называется Ω-последовательностью для q. В силу (17) имеем:

$$\delta(\gamma_n) = \omega_n(\Delta^2(\gamma_n) - 1)^{1/2}, \tag{18}$$

Так как $S'(\pi,\gamma_n) = \Delta(\gamma_n) - \delta(\gamma_n)$, то из (11) и (18) следует, что

$$\alpha_n = \dot{d}(\gamma_n)(\Delta(\gamma_n) - \omega_n(\Delta^2(\gamma_n) - 1)^{1/2}). \tag{19}$$

Обратная задача для периодического случая ставится следующим образом [6].

Обратная задача 2. *Даны* Λ, γ *и* Ω, *построить потенциал* q.

Эта обратная задача изучалась в [6, 7, 9, 14] и других работах. В [6] доказано, что задание Λ, γ и Ω однозначно определяет потенциал q. Для построения q надо найти функции $p(\lambda)$ и $d(\lambda)$ по формулам (5) и (10) и вычислить $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ по формуле (19), где $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$. Тогда, используя спектральные данные $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$, можно построить потенциал q, решая обратную задачу 1.

Лемма 2. *Фиксируем* $n \geqslant 1$. *Соотношение* $\delta(\gamma_n) = 0$ *верно тогда и только тогда, когда* γ_n *лежит на одном из концов лакуны* a_n.

В самом деле, в силу (17), $\delta(\gamma_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\gamma_n) = \pm 1$, т.е. γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n.

Обозначим через J множество последовательностей $\Omega = \{\omega_n\}_{n\geqslant 1}$ таких, что $\omega_n = 0$, если γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n и $\omega_n = \pm 1$ в противном случае. Ясно, что если Ω является Ω-последовательностью для L, то $\Omega \in J$. Следующая теорема из [9] устанавливает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 2.

Теорема 2 (см. [9]). *Пусть заданы вещественные числа* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, *удовлетворяющие* (3), (4). *Для того чтобы* Λ *была спектром некоторой краевой задачи* L *с вещественным потенциалом* $q(x) \in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (6), *где функция* $p(\lambda)$ *построена по формуле* (5). *Кроме того, если дополнительно задана последовательность* $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$, $\gamma_n \in a_n$, *удовлетворяющая* (9), *где* $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n\geqslant 1}$ *— нули функции* $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$ *и последовательность* $\Omega = \{\omega_n\}_{n\geqslant 1} \in J$, *то существует единственная вещественная функция* $q(x) \in L_2(0,\pi)$ *такая, что* Λ *и* γ *являются спектрами задач* L *и* L_0 *соответственно и* Ω *является* Ω*-последовательностью для* L.

Следующая теорема из [9] показывает, что один из концов каждой лакуны можно выбирать произвольно, учитывая только асимптотику.

Теорема 3 (см. [9]). *Пусть заданы вещественные числа* θ_n *вида* $\theta_n = n^2 + \alpha + \kappa_n$, $\{\kappa_n\} \in l_2$, $\theta_n < \theta_{n+1}$. *Тогда существует вещественная функция* $q(x) \in L_2(0,\pi)$ *(не единственная!) такая, что для этого потенциала число* θ_n *лежит на одном из концов лакуны* a_n *при всех* $n \geqslant 1$.

2. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда потенциал q симметричен относительно середины интервала, т.е. относительно замены $x \to \pi - x$. Будем говорить, что $q(x) \in L_2'(0,\pi)$, если $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$.

Теорема 4. $q(x) \in L_2'(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

Доказательство. 1. Пусть $q(x) \in L_2'(0,\pi)$. Тогда $\psi(x,\lambda) \equiv S(\pi - x,\lambda)$. Используя (14), вычисляем

$$\psi(x,\gamma_n) = \beta_n S(x,\gamma_n) = \beta_n \psi(\pi - x,\gamma_n) = \beta_n^2 S(\pi - x,\gamma_n) = \beta_n^2 \psi(x,\gamma_n).$$

Следовательно, $\beta_n^2 = 1$. С другой стороны, из (14) вытекает, что $\beta_n S'(\pi,\gamma_n) = -1$. Используя теорему Штурма об осцилляции, заключаем, что $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

2. Пусть $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geqslant 1$. Положим $\tilde q(x) := q(\pi - x)$. Условимся, что здесь и в дальнейшем, если некоторый символ θ обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde\theta$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde q$.

Очевидно, что $\tilde\psi(x,\lambda) \equiv S(\pi - x,\lambda)$, $\tilde S(x,\lambda) \equiv \psi(\pi - x,\lambda)$, и следовательно, $d(\lambda) \equiv \tilde d(\lambda)$ и $\gamma_n = \tilde\gamma_n$, $n \geqslant 1$. Так как $\beta_n = (-1)^{n-1}$, то из (14) вытекает, что $\psi(x,\gamma_n) = (-1)^{n-1} S(x,\gamma_n)$. Кроме того, в силу (14) $\tilde\psi(x,\gamma_n) = \tilde\beta_n \tilde S(x,\gamma_n)$, поэтому $S(\pi - x,\gamma_n) = \tilde\beta_n \psi(\pi - x,\gamma_n)$, т. е. $\tilde\beta_n = (\beta_n)^{-1} = (-1)^{n-1}$. Таким образом, $\beta_n = \tilde\beta_n$ при всех $n \geqslant 1$. Учитывая (15), заключаем, что $\alpha_n = \tilde\alpha_n$ при всех $n \geqslant 1$. Так как задание спектральных данных $\{\gamma_n,\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ однозначно определяет потенциал, то получаем, что $q(x) = \tilde q(x)$ п. в. на $(0,\pi)$, т. е. $q(x) \in L_2'(0,\pi)$. □

Сначала рассмотрим обратную задачу для L_0. В случае $q(x) \in L_2'(0,\pi)$ не надо задавать весовые числа $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$; достаточно задавать только один спектр γ.

Обратная задача 3. *Дан спектр* $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$, *построить потенциал* q.

Известно [1–5], что в центрально-симметричном случае задание спектра $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ задачи L_0 однозначно определяет потенциал q. Для построения q надо вычислить $d(\lambda)$ по формуле (10) и весовые числа $\alpha_n = (-1)^n \dot d(\gamma_n)$, а затем найти q, решая обратную задачу 1. Характеризация спектра задачи L_0 дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ *были собственными значениями краевой задачи* L_0 *с вещественным потенциалом* $q(x) \in L_2'(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (9).

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$, удовлетворяющие (9). Построим функцию $d(\lambda)$ по формуле (10) и числа $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ по $\alpha_n = (-1)^n \dot d(\gamma_n)$. Наш план — использовать теорему 1. Для этого мы должны получить требуемую в теореме 1 асимптотику чисел α_n. Это кажется трудной задачей, так как функция $d(\lambda)$ по построению является бесконечным произведением. Но, к счастью, для вычисления α_n можно также использовать теорему 1 в качестве вспомогательного утверждения. В самом деле, в силу теоремы 1 существует потенциал $\tilde q(x) \in L_2(0,\pi)$ (не единственный) такой, что $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ является спектром задачи $\tilde L_0 := L_0(\tilde q)$ с этим потенциалом. Тогда функция $d(\lambda)$ является характеристической функцией для $\tilde L_0$ и, следовательно, верно (13), а значит, имеет место (12). По теореме 1 существует единственный потенциал $q(x) \in L_2(0,\pi)$ такой, что числа $\{\gamma_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ являются спектральными данными задачи $L_0(q)$. Так как $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geqslant 1$, то по теореме 4 заключаем, что $q(x) \in L_2'(0,\pi)$. □

Теорема 6 (см. [9]). $q(x) \in L_2'(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* γ_n *лежит на одном из концов лакуны* a_n *при всех* $n \geqslant 1$.

Доказательство. 1) Пусть $q(x) = q(\pi - x)$ п. в. на $(0,\pi)$. Используя лемму 4 из [8], получаем $C(\pi,\lambda) \equiv S'(\pi,\lambda)$, т.е. $\delta(\lambda) \equiv 0$. В силу леммы 2 заключаем, что γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geqslant 1$.

2. Пусть γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geqslant 1$. По лемме 1 имеем $\delta(\gamma_n) = 0$ при всех $n \geqslant 1$. Тогда функция $F(\lambda) := \delta(\lambda)/d(\lambda)$ является целой по λ и убывает на бесконечности.

Это означает, что $F(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $C(\pi, \lambda) \equiv S'(\pi, \lambda)$. Используя лемму 4 из [8], получаем, что $q(x) = q(\pi - x)$ п. в. на $(0, \pi)$. $\square$

Будем писать $a_n \in I_0$, если длина лакуны a_n равна нулю и $a_n \in I_1$ в противном случае.

Рассмотрим теперь обратную задачу для периодической краевой задачи L. В общем случае в обратной задаче 2 мы должны задавать Λ, γ и Ω. В случае центральной симметрии не надо задавать γ. С другой стороны, последовательность $\Omega = \{\omega_n\}_{n\geqslant 1}$ не несет никакой информации, потому что в случае центрально-симметричного потенциала $\omega_n = 0$ при всех $n \geqslant 1$. К сожалению, в отличие от случая распадающихся условий, в периодическом случае задание спектра Λ не определяет потенциал q однозначно, и нам необходима дополнительная информация. Для этого введем последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$, где $\varepsilon_n = 0$, если $a_n \in I_0$, $\varepsilon_n = 1$, если $a_n \in I_1$ и γ_n лежит на правом конце лакуны a_n, $\varepsilon_n = -1$, если $a_n \in I_1$ и γ_n лежит на левом конце лакуны a_n. Последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ называется E-последовательностью для потенциала $q(x) \in L_2'(0, \pi)$. Обратная задача для периодической краевой задачи L в случае центральной симметрии формулируется следующим образом [9].

Обратная задача 4. *Даны Λ и E, построить q.*

Теорема 7 (см. [9]). *Пусть $q(x) \in L_2'(0, \pi)$. Тогда задание Λ и E однозначно определяет потенциал q. Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. *Даны Λ и E.*

1. Строим $p(\lambda)$, используя (5).

2. Вычисляем функции $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$ и $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$.

3. Находим нули $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n\geqslant 1}$ функции $p^+(\lambda)$.

4. Строим $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ по правилу: γ_n лежит на правом конце лакуны a_n, если $\varepsilon_n = 1$; γ_n лежит на левом конце лакуны a_n, если $\varepsilon_n = -1$, и $\gamma_n = a_n$, если $\varepsilon_n = 0$.

5. Используя $\{\gamma_n\}$, вычисляем потенциал $q(x) \in L_2'(0, \pi)$, решая обратную задачу 3.

Обозначим через J_1 множество последовательностей $E = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ таких, что $\varepsilon_n = 0$, если $a_n \in I_0$, и $\varepsilon_n = \pm 1$, если $a_n \in I_1$. Ясно, что если E является E-последовательностью для q, то $E \in J_1$. Следующая теорема из [9] устанавливает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 4.

Теорема 8 (см. [9]). *Пусть заданы вещественные числа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющие* (3), (4). *Последовательность Λ является спектром некоторой краевой задачи L с вещественным потенциалом $q(x) \in L_2'(0, \pi)$, тогда и только тогда, когда выполняется* (6), *где функция $p(\lambda)$ строится по формуле* (5). *Кроме того, если дополнительно задана последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1} \in J_1$, то существует единственная вещественная функция $q(x) \in L_2'(0, \pi)$ такая, что Λ совпадает со спектром L, а E является E-последовательностью для q.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющие (3), (4). Построим функцию $p(\lambda)$, используя (5), и вычислим функции $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$ и $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$. Пусть выполняется (6). Тогда существуют нули $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n\geqslant 1}$ функции $p^+(\lambda)$ и верно (7). Используя (5) и аналогичные рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5 (см. также [4, с. 45]), получаем:

$$p(\lambda) = 1 - \cos\rho\pi - a\frac{\sin\rho\pi}{\rho} - \frac{\kappa(\rho)}{\rho}\,, \tag{20}$$

где $\kappa(\rho) \in L_2(-\infty, \infty)$ при вещественных ρ. Так как $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$, то из (20) следует, что верно (8). Пусть задана последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1} \in J_1$. Введем вещественные числа $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ следующим образом: γ_n лежит на правом конце лакуны a_n, если $\varepsilon_n = 1$; γ_n лежит на левом конце лакуны a_n, если $\varepsilon_n = -1$; $\gamma_n = a_n$ если $\varepsilon_n = 0$. Ясно, что верно (9). Построим функцию $d(\lambda)$, используя (10), и последовательность $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ по формуле

$$\alpha_n = \dot{d}(\gamma_n)\Delta(\gamma_n), \quad n \geqslant 1. \tag{21}$$

Так как $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$, то из (20) вытекает, что

$$\Delta(\lambda) = \cos\rho\pi + a\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{\kappa(\rho)}{\rho}\,.$$

Вместе с (9) это дает

$$\Delta(\gamma_n) = (-1)^n\Big(1 + \frac{\kappa_n}{n}\Big), \qquad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{22}$$

Кроме того, верно (13). Из (13), (21) и (22) следует, что верно (12). Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{sign}\dot{d}(\gamma_n) = (-1)^n, \qquad \operatorname{sign}\Delta(\gamma_n) = (-1)^n. \tag{23}$$

В силу (21) и (23) заключаем, что $\alpha_n > 0$, $n \geqslant 1$. Тогда по теореме 1 существует единственный вещественный потенциал $q(x) \in L_2(0,\pi)$ такой, что $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ являются спектральными данными для краевой задачи L_0 с этим потенциалом. Построим решения $C(x,\lambda), S(x,\lambda)$ уравнения (1) с этим потенциалом. Обозначим

$$\tilde\Delta(\lambda) = (C(\pi,\lambda) + S'(\pi,\lambda))/2, \qquad \tilde p(\lambda) = 1 - \tilde\Delta(\lambda), \qquad \tilde p^+(\lambda) = \tilde p(\lambda) - 2.$$

Используя (10) и (21), получаем $\Delta(\gamma_n) = \tilde\Delta(\gamma_n)$, $n \geqslant 1$. Тогда функция $F_0(\lambda) := (\Delta(\lambda) - \tilde\Delta(\lambda))/d(\lambda)$ является целой по λ и убывает на бесконечности. Это означает, что $F_0(\lambda) \equiv 0$, т. е. $\Delta(\lambda) \equiv \tilde\Delta(\lambda)$ и, следовательно, $p(\lambda) \equiv \tilde p(\lambda)$, $p^+(\lambda) \equiv \tilde p^+(\lambda)$. В частности, это означает, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ совпадает со спектром краевой задачи L для потенциала q. Так как γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geqslant 1$, то из теоремы 6 следует, что $q(x) \in L_2'(0,\pi)$. Теперь очевидно, что E является E-последовательностью для q. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014K) и РФФИ (проект № 16-01-00015).

Библиографический список

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984.
3. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. N. Y. : Academic Press, 1987.
4. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : NOVA Science Publ., 2001.
5. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
6. *Станкевич И. В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
7. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 540–606.
8. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Матем. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 569–576.
9. *Юрко В. А.* О периодической задаче // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 109–115.
10. *Юрко В. А.* О восстановлении дифференциальных операторов с нераспадающимися краевыми условиями // Исследования по математике, механике и их приложениям. Уфа : Башкирский ун-т, 1981. С. 55–57.
11. *Плаксина О. А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Матем. сб. 1986. Т. 131(173), № 1(9). С. 3–26.
12. *Гусейнов И. М., Гасымов М. Г., Набиев И. М.* Обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля с нераспадающимися самосопряженными краевыми условиями // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31, № 6. С. 46–54.
13. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма – Лиувилля // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 5. С. 35–48.
14. *Kargaev P., Korotyaev E.* The inverse problem for the Hill operator, a direct approach // Invent. Math. 1997. Vol. 129, № 3. С. 567–593.
15. *Юрко В. А.* О дифференциальных операторах с нераспадающимися краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28, вып. 4. С. 90–92.

16. *Yurko V. A.* The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions // J. Math. Analysis Appl. 2000. Vol. 250, № 1. P. 266–289.
17. *Freiling G., Yurko V. A.* On the stability of constructing a potential in the central symmetry case // Applicable Analysis. 2011. Vol. 90, № 12. P. 1819–1828.

On Inverse Periodic Problem for Differential Operators for Central Symmetric Potentials

V. A. Yurko

Yurko Vjacheslav Anatoljevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operators on a finite interval with periodic boundary conditions is studied in the central symmetric case, when the potential is symmetric with respect to the middle of the interval. We discuss the statement of the problem, provide an algorithm for its solution along with necessary and sufficient conditions for the solvability of this nonlinear inverse problem.

Key words: differential operators; non-separated boundary conditions; inverse spectral problems.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (projects no. 1.1436.2014K) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00015).

References

1. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Birkhäuser, 1986.
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987.
3. Pöschel J., Trubowitz E. *Inverse Spectral Theory*. New York, Academic Press, 1987.
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications*. New York, NOVA Science Publ., 2001.
5. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002.
6. Stankevich I. V. An inverse problem of spectral analysis for Hill's equation. *Soviet Math. Dokl.*, 1970, vol. 11, pp. 582–586.
7. Marchenko V. A., Ostrovskii I. V. A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, no. 4, pp. 493–554. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002493.
8. Yurko V. A. An inverse problem for second order differential operators with regular boundary conditions. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 3–4, pp. 928–932. DOI: 10.1007/BF01153046.
9. Yurko V. A. On a periodic boundary value problem. *Differ. Equations and Theory of Functions*, Saratov, Saratov Univ. Press, 1981, pp. 109–115 (in Russian).
10. Yurko V. A. On recovering differential operators with nonseparated boundary conditions. *Study in Math. and Appl.*, Ufa, Bashkir Univ. Press, 1981, pp. 55–58 (in Russian).
11. Plaksina O. A. Inverse problems of spectral analysis for the Sturm – Liouville operators with nonseparated boundary conditions. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 59, no. 1, pp. 1–23. DOI: 10.1070/SM1988v059n01ABEH003121.
12. Guseinov I. M., Gasymov M. G., Nabiev I. M. An inverse problem for the Sturm – Liouville operator with nonseparable self-adjoint boundary conditions. *Siberian Math. J.*, 1990, vol. 31, no. 6, pp. 910–918.
13. Guseinov I. M., Nabiev I. M. Solution of a class of inverse boundary-value Sturm – Liouville problems. *Sb. Math.*, 1995, vol. 186, no. 5, pp. 661–674. DOI: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035.
14. Kargaev P., Korotyaev E. The inverse problem for the Hill operator, a direct approach. *Invent. Math.*, 1997, vol. 129, no. 3, pp. 567–593.
15. Yurko V. A. On differential operators with nonseparated boundary conditions. *Funct. Anal. Appl.*, 1994, vol. 28, no. 4, pp. 295–297. DOI: 10.1007/BF01076118.
16. Yurko V. A. The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions. *J. Math. Analysis Appl.*, 2000, vol. 250, no. 1, pp. 266–289.
17. Freiling G., Yurko V. A. On the stability of constructing a potential in the central symmetry case. *Applicable Analysis*, 2011, vol. 90, no. 12, pp. 1819–1828.