идемпотента есть вторичный идемпотент. Более того, транзитивно-рефлексивное замыкание всякой квадратной матрицы является идемпотентом, причем, учитывая теорему 4.1, вторичным. Наоборот, всякий вторичный идемпотент совпадает со своим транзитивно-рефлексивным замыканием. Таким образом, указанные в теореме 3.7 свойства делимости для вторичных идемпотентов становятся свойствами транзитивно-рефлексивных замыканий.

Замечание. Пусть $\overline{A}$ — транзитивно-рефлексивное замыкание произвольной булевой квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Тогда уравнение $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ разрешимо.

Действительно, так как транзитивно-рефлексивное замыкание $\overline{A}$ есть вторичный идемпотент, то в качестве решения X уравнения $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ можно взять любую матрицу, порождающую тот же правый идеал в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, что и идемпотент $\overline{A}$ (см. теорему 3.2).

Аналогично, решением уравнения $X'^T \sqcup X = \overline{A}$ может быть любая матрица, порождающая тот же левый идеал, что и идемпотент $\overline{A}$.

Следующий пример показывает, что решения уравнения $X \sqcup X'^T = \overline{A}$ (или $X'^T \sqcup X = \overline{A}$) и матрица $\overline{A}$ могут порождать разные односторонние идеалы.

Пример 4.2. Легко проверить, что матрицы $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ удовлетворяют равенству $X \sqcup X'^T = \overline{A}$. Причем матрицы X и A порождают один и тот же правый идеал (у них одинаковые столбцовые пространства, см. [1]). Однако матрицы X и $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ порождают разные односторонние идеалы.

Библиографический список

1. *Поплавский В. Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.
2. *Бисли Л. Б., Гутерман А. Э., Канг К.-Т., Сонг С.-З.* Идемпотентные матрицы и мажорирование // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 1. С. 11–29.
3. *Кумаров В. Б.* Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 121–144.
4. *Luce R. D.* A note on Boolean matrix theory // Proc. Am. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 382–388.
5. *Rudeanu S.* Boolean functions and equations. Amsterdam; London : North-Holland Publishing Company; N.Y. : American Elsevier Publishing Company, Inc. 1974. 442 p.
6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 287 с.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Доказана теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля.

Ключевые слова: некомпактные графы, обратные спектральные задачи, матрицы Вейля.

Uniqueness of Recovering Arbitrary Order Differential Operators on Noncompact Spatial Networks

V. A. Yurko

An inverse spectral problem is studied for arbitrary order differential operators on noncompact graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is proved.

Key words: noncompact graphs, inverse spectral problems, Weyl matrices.

1. Исследуется нелинейная обратная спектральная задача восстановления потенциалов дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графах изучалась в [1–8] и других работах. Дифференциальные операторы высших порядков на компактных графах исследовались в [9–10]. В данной статье исследуются дифференциальные операторы высших порядков на некомпактных графах без циклов (деревьях). Доказана теорема единственности решения обратной задачи восстановления потенциалов по заданным матрицам Вейля. Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на *интервале* достаточно подробно представлены в работах [11–16].

Рассмотрим некомпактное дерево T в $\mathbf{R}^N$ с множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_r\}$, где $e_j = [v_{k_j}, v_j]$, $j = \overline{1, r-1}$, $k_j > j$ — конечные отрезки, а $e_r = (v_0, v_r]$ — бесконечный луч, $v_0 := \infty$. Пусть $\Gamma := \{v_1, \ldots v_p\}$ — множество конечных граничных вершин, а $E := \{e_1, \ldots e_p\}$ — множество компактных граничных ребер. Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \le b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем v_0 с b. Будем писать $a < b$, если $a \le b$ и $a \ne b$. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : \ a \le z \le b\}$. В частности, если $e_j = [v_{k_j}, v_j]$, $j = \overline{1, r-1}$, $v_{k_j} < v_j$ — ребро, то мы будем называть v_{k_j} его начальной точкой, v_j — его конечной точкой и будем говорить, что e выходит из v_{k_j} и заканчивается в v_j.

Пусть μ_{sj} — число ребер между вершинами v_j и v_s. Обозначим $\sigma_s := \max\limits_j \mu_{sj}$. Ясно, что $0 \le \mu_{sj} \le$ $\le \sigma_s$, $\mu_{ss} = 0$, $\mu_{sj} = \mu_{js}$. Фиксируем v_s. Будем называть μ_{sj} порядком v_j относительно v_s. Пусть $V_s^{(\mu)} := \{v_j : \ \mu_{sj} = \mu\}$ — множество вершин порядка μ относительно v_s.

Фиксируем v_s и e_j. Пусть ε_{sj} — максимальный порядок концов ребра e_j относительно v_s. Число ε_{sj} называется порядком ребра e_j относительно вершины v_s. Ясно, что $\varepsilon_{ss} = 1$, $1 \le \varepsilon_{sj} \le \sigma_s$. Через $\mathcal{E}_s^{(\mu)} := \{e_j : \ \varepsilon_{sj} = \mu\}$ обозначим множество ребер порядка μ относительно v_s. Пусть v_{sj}^+ и v_{sj}^- — концы ребра e_j такие, что порядок v_{sj}^+ относительно v_s больше, чем порядок v_{sj}^-. Будем называть v_{sj}^+ (v_{sj}^-) дальним (ближним) концом e_j относительно v_s.

Каждое компактное ребро $e_j = [v_{k_j}, v_j] \in \mathcal{E}$, $j = \overline{1, r-1}$ рассматривается как отрезок $[0, l_j]$ и параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$; l_j — длина e_j. Выберем следующую ориентацию: $x_j = 0$ соответствует конечной точке v_j, а $x_j = l_j$ — начальной точке v_{k_j} ребра e_j. Бесконечное ребро $e_r = (v_0, v_r]$ параметризуется параметром $x_r \in [0, \infty)$ так, что $x_r = 0$ соответствует v_r.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j \in J}$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j.

Зафиксируем $n \ge 2$. Пусть $q_\nu = \{q_{\nu j}\}_{j=\overline{1,r}}$, $\nu = \overline{0, n-2}$ — интегрируемые комплекснозначные функции на T. Рассмотрим дифференциальное уравнение T:

$$y_j^{(n)}(x_j) + \sum_{\nu=0}^{n-2} q_{\nu j}(x_j) y_j^{(\nu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, и $y_j^{(\nu)}(x_j) \in AC[0, l_j]$, $j = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ при всех $l_r > 0$. Через $q = \{q_\nu\}_{\nu=\overline{0,n-2}}$ обозначим множество коэффициентов уравнения (1); q называется потенциалом.

Пусть $\lambda = \rho^n$. Тогда ρ — плоскость разбивается на сектора S раствора $\dfrac{\pi}{n}$ $\left(\arg \rho \in \left(\dfrac{\nu\pi}{n}, \dfrac{(\nu+1)\pi}{n}\right),\right.$ $\left.\nu = \overline{0, 2n-1}\right)$, в каждом из которых корни R_1, $R_2, \ldots$, R_n уравнения $R^n - 1 = 0$ могут быть занумерованы так, что

$$\mathrm{Re}\,(\rho R_1) < \mathrm{Re}\,(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}\,(\rho R_n), \quad \rho \in S. \tag{2}$$

Пусть $\rho^* := 2n \max\limits_{\nu, j} \|q_{\nu j}\|_{L(e_j)}$. Известно (см. [17]), что при каждом фиксированном $j = \overline{1, r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений $\{E_{kj}(x_j, \rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения (1) такая, что в каждом секторе S со свойством (2) функции $E_{kj}^{(\nu-1)}(x_j, \rho)$, $k, \nu = \overline{1, n}$ аналитичны при $\rho \in S$, $|\rho| > \rho^*$, непрерывны при $\rho \in \overline{S}$, $|\rho| \ge \rho^*$, и при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{S}$,

$$E_{kj}^{(\nu-1)}(x_j, \rho) = (\rho R_k)^{\nu-1} \exp(\rho R_k x_j)[1], \tag{3}$$

где $k, \nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Зафиксируем внутреннюю вершину v_m, $m = \overline{p+1, r}$. Через $R(v_m) := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v_m, w], \, w \in V\}$ обозначим множество ребер, выходящих из v_m, а через $R^+(v_m)$ — множество ребер, примыкающих к v_m. Пусть $R_m := \{j : \ e_j \in R(v_m)\}$ и пусть ω_m — число ребер, выходящих из v_m. Если

$R_m = \{\alpha_{jm}\}_{j=\overline{1,\omega_m}}$, то положим $e_{(jm)} := e_{\alpha_{jm}}$, $y_{(jm)} := y_{\alpha_{jm}}$, $l_{(jm)} := l_{\alpha_{jm}}$, $x_{(jm)} := x_{\alpha_{jm}}$. Рассмотрим линейные формы

$$U_{j\nu m}(Y) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu m} y_{(jm)}^{(\mu)}(l_{(jm)}), \quad m = \overline{p+1, r}, \qquad j = \overline{1, \omega_m}, \qquad \nu = \overline{0, n-1},$$

где $\gamma_{j\nu\mu m}$ — комплексные числа, причем $\gamma_{j\nu m} := \gamma_{j\nu\nu m} \neq 0$ и выполняются условия регулярности склейки (см. [10]). Пусть $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1,r}}$, $s = \overline{1,p}$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям склейки

$$\left.\begin{aligned} \psi_{skm}^{(\nu)}(0,\lambda) + U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) = 0, \quad j = \overline{1,\omega_m}, \qquad \nu = \overline{0, k-1}, \\ \psi_{skm}^{(\nu)}(0,\lambda) + \sum_{j=1}^{\omega_m} U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) = 0, \quad \nu = \overline{k, n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

в каждой внутренней вершине v_m, $m = \overline{p+1, r}$, а также граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1,k}, \\ \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad j = \overline{1,p} \setminus s, \\ \psi_{skr}(x_r, \lambda) = O(\exp(\rho R_k x_r)), \quad \rho \in S, \quad x_r \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в каждом секторе S со свойством (2). Здесь и далее, $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера. Решение Ψ_{sk} называется решением Вейля порядка k относительно граничной вершины v_s. Условия (4) называются условиями склейки порядка k. Введем матрицы

$$M_s(\lambda) = [M_{sk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}, \quad s = \overline{1,p},$$

где $M_{sk\nu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0,\lambda)$. Ясно, что $M_{sk\nu}(\lambda) = \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$, и $\det M_s(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно граничной вершины v_s. Пусть $M = \{M_s\}_{s=\overline{1,p}}$ — множество матриц Вейля. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Дано M, построить q на T.

Понятие матриц Вейля M является обобщением понятия функции Вейля для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением понятия матрицы Вейля, введенной в [14, 15] для уравнений высших порядков на интервале.

2. Обозначим $\beta_k := \Omega_{k-1}\Omega_k^{-1}$, $k = \overline{1,n}$, $\Omega_k := \det[R_\xi^{\nu-1}]_{\xi,\nu=\overline{1,k}}$, $\Omega_0 := 1$.

Лемма 1. *Фиксируем $m = \overline{p+1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$ и сектор S со свойством (2). Пусть $Y = \{y_j\}_{j\in J}$ — решение уравнения (1) на T, удовлетворяющее условиям склейки порядка k. Если при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $x_{(jm)} \in (0, l_{(jm)}]$, $j = \overline{1,\omega_m}$, $\nu = \overline{0, n-1}$*

$$y_{(jm)}^{(\nu)}(x_{(jm)}, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^{n} A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(jm)})[1], \tag{6}$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $x_m \in (0, l_m]$, $\nu = \overline{0, n-1}$

$$y_m^{(\nu)}(x_m, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^{n} A_\mu(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m)[1]. \tag{7}$$

Доказательство. Используя фундаментальную систему решений $\{E_{\mu m}(x_m, \rho)\}_{\mu=\overline{1,n}}$ и учитывая (3), вычисляем

$$y_m^{(\nu)}(x_m, \rho) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m)[1], \qquad x_m \in [0, l_m], \qquad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{8}$$

Подставляя (6) и (8) в условия склейки, получаем линейную алгебраическую систему σ_{k0m} порядка $k\omega_m + n - k$ относительно $\{A_\mu(\rho)\}_{\mu=\overline{1,n-k}}$ и $\{A_{\mu j}(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1,n}}$, $j = \overline{1,\omega_m}$ ($\{A_\mu(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1,n}}$ рассматриваются как параметры). Определитель $D_{k0m}(\rho)$ системы σ_{k0m} имеет асимптотику

$$D_{k0m}(\rho) = d_{km}\exp(\rho(R_{n-k+1} + \cdots + R_n)(l_{1m} + \cdots + l_{\omega_m,m}))[1], \qquad \rho \in S, \qquad |\rho| \to \infty,$$

где $d_{km} \neq 0$. Решая σ_{k0m}, по формулам Крамера находим

$$A_\mu(\rho) = \sum_{\xi=n-k+1}^{n} (a^0_{\xi m\mu} + O(\rho^{-1}))A_\xi(\rho), \qquad \mu = \overline{1, n-k}, \tag{9}$$

где $a^0_{\xi m\mu}$ — константы. Подставляя (9) в (8), получаем (7). □

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 2. *Фиксируем $m = \overline{p+1,r}$, $k = \overline{1,n-1}$, $s = \overline{1,\omega_m}$ и сектор S со свойством* (2). *Пусть $Y = \{y_j\}_{j\in J}$ — решение уравнения* (1) *на T, удовлетворяющее условиям склейки порядка k. Если при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $\nu = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{1,\omega_m} \setminus s$*

$$y^{(\nu)}_{(jm)}(x_{(jm)},\rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^{n} A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(jm)})[1], \qquad x_{(jm)} \in (0, l_{(jm)}],$$

$$y^{(\nu)}_{m}(x_m,\rho) = \sum_{\mu=1}^{k} A_{\mu}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m)[1], \qquad x_m \in [0, l_m),$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $\nu = \overline{0,n-1}$

$$y^{(\nu)}_{(sm)}(x_{(sm)},\rho) = \sum_{\mu=1}^{k} A_{\mu s}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(sm)})[1], \qquad x_{(sm)} \in [0, l_{(sm)}). \tag{10}$$

Лемма 3. *Фиксируем сектор S со свойством* (2). *При $x_s \in (0, l_s)$, $k,\nu = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,p}$, верна следующая асимптотическая формула:*

$$\psi^{(\nu-1)}_{sks}(x_s,\lambda) = \frac{\beta_k}{\rho^{k-1}}(\rho R_k)^{\nu-1}\exp(\rho R_k x_s)[1], \qquad \rho \in S, \quad |\rho| \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Покажем, что при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $\nu = \overline{1,n}$

$$\psi^{(\nu-1)}_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^{n} A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1}\exp(\rho R_\mu x_j)[1], \quad x_j \in (0, l_j], \quad \text{если} \quad v_j = v^+_{sj}, \tag{12}$$

$$\psi^{(\nu-1)}_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{k} A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1}\exp(\rho R_\mu x_j)[1], \quad x_j \in [0, l_j), \quad \text{если} \quad v_j = v^-_{sj}. \tag{13}$$

Если $j = r$, то $v_r = v^-_{sr}$, и (13) очевидно. Докажем (12)–(13) для $j = \overline{1,r-1}$. Разделим все ребра $\{e_j\}_{j\in J}$ на классы $\mathcal{E}^{(\mu)}_s$, $\mu = 1,\dots\sigma_s$. Докажем (12)–(13) индукцией по $\mu = \sigma_s, \sigma_{s-1}, \dots, 1$.

1. Пусть $\mu = \sigma_s$, $e_j \in \mathcal{E}^{(\sigma_s)}_s$. Тогда e_j — граничное ребро и $v_j = v^+_{sj}$. Применяя лемму 1 из [10], получаем (12)–(13).

2. Фиксируем $\mu < \sigma_s$. Предположим, что (12)–(13) уже доказаны для всех $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu+1)}_s \cup \ldots \cup \mathcal{E}^{(\sigma_k)}_s$. Пусть теперь $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}_s$. Обозначим $R_{sj} := \{\xi : \ e_\xi \in R^+(v^+_{sj}) \setminus e_j\}$. Тогда $R^+(v^+_{sj}) \setminus e_j := \{e_\xi\}_{\xi\in R_{sj}}$. Ясно, что $e_\xi \in \mathcal{E}^{(\mu+1)}_s$ при всех $\xi \in R_{sj}$.

Случай 1. Если $v_j = v^+_{sj}$, то по предположению индукции (12) верно при всех $\xi \in R_{sj}$:

$$\psi^{(\nu-1)}_{sk\xi}(x_\xi,\lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^{n} A_{\mu\xi}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1}\exp(\rho R_\mu x_\xi)[1], \qquad x_\xi \in (0, l_\xi], \tag{14}$$

$\nu = \overline{1,n}$, $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$. Применяя лемму 1, получаем (12) для ребра e_j.

Случай 2. Если $v_j = v_{sj}^-$, то существует $\eta \in R_{sj}$ такое, что

$$\psi_{sk\eta}^{(\nu-1)}(x_\eta,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{k} A_{\mu\eta}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1}\exp(\rho R_\mu x_\eta)[1], \qquad x_\eta \in [0,l_\eta),$$

$\nu = \overline{1,n}$, $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, и (14) верно при всех $\xi \in R_{sj}$, $s \neq \eta$. Применяя лемму 2, получаем (13).

Так как $e_s \in \mathcal{E}_s^{(1)}$, $v_s = v_{ss}^-$, то из (13) вытекает, что при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$,

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{k} A_{\mu s}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1}\exp(\rho R_\mu x_s)[1], \qquad x_s \in [0,l_s), \qquad \nu,k = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Согласно (5) имеем

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1,k}. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16), получаем линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов $\{A_{\mu s}(\rho)\}_{\mu=\overline{1,k}}$. Определитель $D_{sk}(\rho)$ этой системы имеет вид $D_{sk}(\rho) = \Omega_k[1]$. Решая систему по формулам Крамера, вычисляем $A_{\mu s}(\rho) = (a_{\mu s}^0 + O(\rho^{-1}))\rho^{1-k}[1]$, $a_{\mu k}^0 = \beta_k$. Вместе с (15) это дает (11). Лемма 3 доказана. □

Аналогично получаем, что при $\rho \in S$, $|\rho| \to \infty$, $s = \overline{1,p}$, $k = \overline{1,n-1}$, $\mu = \overline{k+1,n}$,

$$M_{sk\mu}(\lambda) = m_{k\mu}^0 \rho^{\mu-k}[1],$$

где $m_{k\mu}^0 = (\det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta,\xi=\overline{1,k}})^{-1}\det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta=\overline{1,k},\,\xi=\overline{1,k-1},\mu}$.

Пусть $\{C_{\mu j}(x_j,\lambda)\}_{\mu=\overline{1,n}}$, $j = \overline{1,r}$, — фундаментальная система решений уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = \overline{1,n}$. При каждом $x_j \in [0,l_j]$ функции $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x_j,\lambda)$, $\mu,\nu = \overline{1,n}$, являются целыми по λ порядка $1/n$ и

$$\det[C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x_j,\lambda)]_{\mu,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1. \tag{17}$$

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x_j,\lambda)\}_{\mu=\overline{1,n}}$, получим

$$\psi_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} M_{skj\mu}(\lambda)C_{\mu j}(x_j,\lambda), \quad s = \overline{1,p}, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{18}$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j. В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$ и

$$\psi_{sks}(x_s,\lambda) = C_{ks}(x_s,\lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n} M_{sk\mu}(\lambda)C_{\mu s}(x_s,\lambda). \tag{19}$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$\det[\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s,\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1. \tag{20}$$

3. Зафиксируем $s = \overline{1,p}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу.

Задача IP(s). Дана матрица Вейля M_s, построить функции $q_{\nu s}$, $\nu = \overline{0,n-2}$, на ребре e_s.

Докажем теорему единственности решения обратной задачи IP(s). Для этого, наряду с q, рассмотрим потенциал $\tilde q$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde\alpha$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde q$.

Теорема 1. *Фиксируем $s = \overline{1,p}$. Если $M_s = \tilde M_s$, то $q_{\nu s} = \tilde q_{\nu s}$, $\nu = \overline{0,n-2}$. Таким образом, задание матрицы Вейля M_s однозначно определяет потенциал на ребре e_s.*

Доказательство. Обозначим

$$\psi_s(x_s,\lambda) := [\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s,\lambda)]_{\nu,k=\overline{1,n}} \quad C_s(x_s,\lambda) := [C_{ks}^{(\nu-1)}(x_s,\lambda)]_{\nu,k=\overline{1,n}}.$$

Тогда соотношение (19) может быть записано в виде

$$\psi_s(x_s,\lambda) = C_s(x_s,\lambda)M_s^T(\lambda), \tag{21}$$

где T — знак транспонирования. В силу (17) и (20) имеем

$$\det\psi_s(x_s,\lambda)=\det C_s(x_s,\lambda)\equiv 1. \tag{22}$$

Определим матрицу $\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)=[\mathcal{P}_{sjk}(x_s,\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)=\psi_s(x_s,\lambda)(\tilde\psi_s(x_s,\lambda))^{-1}.$$

Учитывая (22), вычисляем

$$\mathcal{P}_{sjk}(x_s,\lambda)=\det\left[\tilde\psi_{s\nu s}^{(n-1)}(x_s,\lambda),\ldots,\tilde\psi_{s\nu s}^{(k)}(x_s,\lambda),\psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x_s,\lambda),\tilde\psi_{s\nu s}^{(k-2)}(x_s,\lambda),\ldots,\tilde\psi_{s\nu s}(x_s,\lambda)\right]_{\nu=\overline{1,n}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+k-n-1}\psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x_s,\lambda)\times$$

$$\times\det\left[\tilde\psi_{sns}^{(\xi)}(x_s,\lambda),\ldots,\tilde\psi_{s,\nu+1,s}^{(\xi)}(x_s,\lambda),\tilde\psi_{s,\nu-1,s}^{(\xi)}(x_s,\lambda),\ldots,\tilde\psi_{s1s}^{(\xi)}(x_s,\lambda)\right]_{\xi=\overline{0,n-1}\setminus k-1}. \tag{23}$$

Из (23) и леммы 3 следует, что при $x_s\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0,\pi$,

$$\mathcal{P}_{s1k}(x_s,\lambda)-\delta_{1k}=O(\rho^{-1}). \tag{24}$$

Преобразуем матрицу $\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)$, используя (21):

$$\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)=\psi_s(x_s,\lambda)(\tilde\psi_s(x_s,\lambda))^{-1}=C_s(x_s,\lambda)M_s^T(\lambda)(\tilde M_s^T(\lambda))^{-1}(\tilde C_s(x_s,\lambda))^{-1}=C_s(x_s,\lambda)(\tilde C_s(x_s,\lambda))^{-1}.$$

В силу (22) заключаем, что при каждом фиксированном x_s, матрица-функция $\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$. Вместе с (26) это дает $\mathcal{P}_{s11}(x_s,\lambda)\equiv 1$, $\mathcal{P}_{s1k}(x_s,\lambda)\equiv 0$, $k=\overline{2,n}$. Так как $\mathcal{P}_s(x_s,\lambda)\tilde\psi_s(x_s,\lambda)=\psi_s(x_s,\lambda)$, то $\psi_{sks}(x_s,\lambda)\equiv\tilde\psi_{sks}(x_s,\lambda)$ при всех x_s,λ,k и, следовательно, $q_{\nu s}=\tilde q_{\nu s}$, $\nu=\overline{0,n-2}$. □

4. Зафиксируем $v_m\notin\Gamma$ (т.е. $m=\overline{p+1,r}$). Обозначим $T_m^0:=\{z\in T:\ v_m<z\}$, $T_m:=T\setminus T_m^0$. Ясно, что T_m^0 — компактное дерево, а T_m — некомпактное дерево с бесконечным ребром e_r. Пусть Γ_m — множество конечных граничных вершин T_m и пусть E_m — множество граничных ребер T_m. Положим $J_m:=\{j:\ e_j\in T_m\}$. Если $Y=\{y_j\}_{j\in J}$ — функция на T, то $\{Y\}_m:=\{y_j\}_{j\in J_m}$ — функция на T_m.

Зафиксируем $v_m\notin\Gamma$, $k=\overline{1,n}$. Пусть $\Psi_{mk}=\{\psi_{mkj}\}_{j\in J_m}$ — решение уравнения (1) на T_m, удовлетворяющее условиям склейки порядка k и краевым условиям

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0,\lambda)=\delta_{k\nu},\quad \nu=\overline{1,k},\\
&\psi_{mkj}^{(\xi-1)}(0,\lambda)=0,\quad \xi=\overline{1,n-k},\quad v_j\in\Gamma_m\setminus v_m,\\
&\psi_{mkr}(x_r,\lambda)=O(\exp(\rho R_k x_r)),\quad \rho\in S,\quad x_r\to\infty,
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

в каждом секторе S со свойством (2). Решение Ψ_{mk} называется решением Вейля порядка k относительно внутренней вершины v_m. Введем матрицу $M_m(\lambda)=[M_{mk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$, где $M_{mk\nu}(\lambda):=$ $=\psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0,\lambda)$. Тогда $M_{mk\nu}(\lambda)=\delta_{k\nu}$ при $k\geq\nu$ и $\det M_m(\lambda)\equiv 1$. Матрица $M_m(\lambda)$ называется матрицей Вейля для T_m относительно вершины v_m.

Лемма 4. *Фиксируем $v_m\notin\Gamma$ и $k=\overline{1,n-1}$. Пусть $e_s=[v_m,v_s]\in R(v_m)$. Тогда*

$$M_{m1\nu}(\lambda)=\frac{\psi_{s1m}^{(\nu-1)}(0,\lambda)}{\psi_{s1m}(0,\lambda)},\quad \nu=\overline{2,n}, \tag{26}$$

$$M_{mk\nu}(\lambda)=\frac{\det[\psi_{s\mu m}(0,\lambda),\ldots,\psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0,\lambda),\psi_{s\mu m}^{(\nu-1)}(0,\lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0,\lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}}, \tag{27}$$

$k=\overline{2,n-1}$, $\nu=\overline{k+1,n}$.

Доказательство. Обозначим $z_{m1j}(x_j,\lambda) := \psi_{s1j}(x_j,\lambda)/\psi_{s1m}(0,\lambda)$, $j \in J_m$. Функция $z_{m1j}(x_j,\lambda)$ является решением уравнения (1) на ребре e_j. В силу (25) функция $z_{m1j}(x_j,\lambda)$ удовлетворяет тем же краевым условиям, что и $\psi_{m1j}(x_j,\lambda)$; следовательно, $z_{m1j}(x_j,\lambda) \equiv \psi_{m1j}(x_j,\lambda)$. Итак,

$$\psi_{m1j}(x_j,\lambda) = \frac{\psi_{s1j}(x_j,\lambda)}{\psi_{s1m}(0,\lambda)}, \qquad j \in J_m. \tag{28}$$

Аналогично вычисляем

$$\psi_{mkj}(x_j,\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu m}(0,\lambda),\ldots,\psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0,\lambda),\psi_{s\mu j}(x_j,\lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0,\lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}}, \tag{29}$$

$k = \overline{2,n-1}$, $j \in J_m$. Так как $M_{mk\nu}(\lambda) := \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0,\lambda)$, то из (28) и (29) следует, что верны (26) и (27). □

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x_j,\lambda)\}_{\mu=\overline{1,n}}$, получаем, что (18) верно при $s=\overline{1,r}$, $k=\overline{1,n}$, $j \in J_s$, где $J_s := J$ for $s=\overline{1,p}$, и коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j. В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$, и (19) верно при $s=\overline{1,r}$, $k=\overline{1,n}$. Поэтому имеем

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda), \quad k,\nu=\overline{1,n}, \qquad s=\overline{1,r}, \qquad j \in J_s, \tag{30}$$

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(l_s,\lambda) = C_{ks}^{(\nu-1)}(l_s,\lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n} M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}^{(\nu-1)}(l_s,\lambda), \qquad k,\nu=\overline{1,n}, \qquad s=\overline{1,r}. \tag{31}$$

Зафиксируем v_m $(m=\overline{p+1,r})$. Предположим, что потенциал q известен на дереве T_m^0. Тогда можно вычислить решения $C_{kj}(x_j,\lambda)$ при $k=\overline{1,n}$, $e_j \in T_m^0$. Зафиксируем $e_s=[v_m,v_s] \in R(v_m)$ и $e_i=[v_m,v_i] \in R(v_m) \setminus e_s$. Рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$. Положим $J_{i1} := \{j : \ e_j \in T_i^1\}$. Предположим, что функции $a_{ski\nu}(\lambda) := \psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i,\lambda)$, $\nu=\overline{1,k}$, известны.

Задача $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{ski\nu}\}_{\nu=\overline{1,k}})$. Рассмотрим решение Вейля Ψ_{sk} на дереве T_i^1. Тогда Ψ_{sk} удовлетворяет условиям склейки и краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i,\lambda) = a_{ski\nu}(\lambda), \quad \nu=\overline{1,k}, \\ &\psi_{skj}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \quad \xi=\overline{1,n-k}, \quad j \in J_{i1} \setminus i. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Положим $M_{skj\mu}(\lambda) := \psi_{skj}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$, $j \in J_{i1}$. Тогда

$$\psi_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j,\lambda), \quad j \in J_{i1}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32) и условия склейки на T_i^1, получаем линейную алгебраическую систему относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$, $j \in J_{i1}$. Решая эту систему по формулам Крамера, находим матрицу

$$M_{skj\mu}(\lambda), \qquad j \in J_{i1}, \qquad \mu=\overline{1,n}. \tag{34}$$

Задачу вычисления матрицы (34) будем обозначать $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{ski\nu}\}_{\nu=\overline{1,k}})$.

5. Пусть заданы матрицы Вейля $M=\{M_s\}_{s=\overline{1,p}}$. Решение обратной задачи 1 состоит в последовательном выполнении так называемых A_ξ-процедур при $\xi=\sigma,\sigma-1,\ldots,1$, где $\sigma := \sigma_0$. Опишем A_ξ-процедуры.

$\mathbf{A}_\sigma$-процедура. 1. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ (ясно, что e_s — граничное ребро) решаем вспомогательную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x_s)$, $x_s \in [0,l_s]$, $\nu=\overline{0,n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s.

2. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ строим $C_{\mu s}(x_s,\lambda)$, $x_s \in [0,l_s]$, $\mu=\overline{1,n}$, и, используя (31), вычисляем функции

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(l_s,\lambda), \qquad k,\nu=\overline{1,n}. \tag{35}$$

3. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1,n}$, и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$, выполняем следующие операции:

а) используя (35) и условия склейки в v_m, вычисляем

$$a_{ski\nu}(\lambda) := \psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i, \lambda), \qquad \nu = \overline{1,k}, \tag{36}$$

где $a_{ski\nu}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (35) при $\nu = \overline{1,k}$;

б) рассмотрим дерево $T_i^1 := \{e_i\}$, которое в данном случае состоит из одного ребра e_i. Решая задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{ski\nu}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1,k}})$, вычисляем $\{M_{ski\mu}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1,n}$.

4. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1,n}, \tag{37}$$

по (30). Далее, используя (35), (37) и условия склейки, находим $\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, $k, \nu = \overline{1,n}$.

5. Для каждой $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ по (26)–(27).

Выполним A_ξ-процедуры при $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ по индукции. Фиксируем $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ и предположим, что $A_\sigma, \ldots, A_{\xi+1}$ — процедуры уже выполнены. Выполним теперь A_ξ-процедуру.

$\mathbf{A}_\xi$-процедура. Для каждой вершины $v_s \in V^{(\xi)}$ дана матрица Вейля $M_s(\lambda)$. В самом деле, если $v_s \in V^{(\xi)} \cap \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ известна априори, а если $v_s \in V^{(\xi)} \setminus \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ вычислена ранее по $A_\sigma, A_{\sigma-1}, \ldots, A_{\xi+1}$-процедурам.

1. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ решаем вспомогательную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x_s)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s. Если $\xi = 1$, то обратная задача 1 решена и мы заканчиваем вычисления. Если $\xi > 1$, то переходим к следующему пункту.

2. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ строим $C_{\mu s}(x_s, \lambda)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\mu = \overline{1,n}$, и вычисляем функции (35), используя (31).

3. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1,n}$ и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$ выполняем следующие операции:

а) используя (35) и условия склейки в v_m, получаем (36), где $a_{ski\nu}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (35) при $\nu = \overline{1,k}$;

б) Рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$ с корнем v_m. Решая алгебраическую задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{ski\nu}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1,k}})$, находим матрицу $\{M_{skj\mu}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1,n}$, $j \in J_{i1}$, где $J_{i1} := \{j : \ e_j \in T_i^1\}$.

4. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции (37), используя (30). Далее, используя (35), (37) и условия склейки, находим функции $\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, $k, \nu = \overline{1,n}$.

5. Для каждой $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ по (26)–(27).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Задание матриц Вейля $M = \{M_s\}_{s=\overline{1,p}}$ однозначно определяет потенциал q на T. Решение обратной задачи 1 может быть получено последовательным выполнением A_σ, $A_{\sigma-1}, \ldots, A_1$-процедур.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 *и* 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.

2. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

3. *Brown B. M., Weikard R.* A Borg–Levinson theorem for trees // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2005. Vol. 461, № 2062. P. 3231–3243.

4. *Yurko V. A.* Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 10, 105008. 14 p.

5. *Yurko V. A.* An inverse problem for Sturm–Liouville operators on A-graphs // Applied Math. Letters. 2010. Vol. 23, № 8. P. 875–879.

6. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // J. of Inverse and Ill-Posed Proplems. 2010. Vol. 18, № 3. P. 245–261.

7. *Юрко В. А.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на некомпакт-

ных пространственных сетях // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, № 12. С. 1658–1666.
8. *Герасименко Н. И.* Обратная задача рассеяния на некомпактном графе // ТМФ. 1988. Т. 74, № 2. С. 187–200.
9. *Yurko V. A.* An inverse problem for higher-order differential operators on star-type graphs // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, № 3. P. 893–903.
10. *Юрко В. А.* Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях // Мат. заметки. 2008. Т. 83, вып. 1. С. 139–152.
11. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
12. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984.
13. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28. Amer. Math. Soc. Providence : RI, 1988.
14. *Yurko V. A.* Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications. Amsterdam : Gordon and Breach, 2000.
15. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
16. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
17. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
18. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse problems for differential operators on graphs with general matching conditions // Applicable Analysis. 2007. Vol. 86, № 6. P. 653–667.