Библиографический список

1. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М. : Физматлит, 2006. 294 с.
2. *Подчукаев В. А.* Аналитические методы теории автоматичекого управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
3. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984. 320 с.
4. *Пензов Ю. Е.* Аналитическая геометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1972. 364 с.
5. *Подчукаев В. А., Звягина А. С.* Новое доказательство гипотезы Ж. А. Пуанкаре // Докл. Академии воен. наук. 2009. № 5(40). С. 115–123.
6. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. : Наука, 1986. 544 с.

УДК 501.1

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА ОТНОСИТЕЛЬНО L-ФУНКЦИЙ АРТИНА ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Д. С. Степаненко

Саратовский государственный университет
E-mail: stepanenko.dmitry@gmail.com

В работе рассматривается задача аналитического продолжения L-функций Артина числовых полей. Приводится уточнение результата Брауэра, а именно показывается, что в случае неглавного характера возможные полюсы L-функций должны лежать на критической прямой.

Ключевые слова: L-функция Артина, теорема Брауэра.

On Verification of Brauer's Theorem Concerning Artin's L-Functions of Number Fields

D. S. Stepanenko

This paper investigates problem of analytic continuation of Artin's L-functions. One refinement of Brauer's theorem was obtained. It states that in the case of non-main character all possible poles of Artin's L-functions should lay on the critical line.

Key words: Artin's L-function, Brauer's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — конечное неабелево расширение числового поля k степени n, G — группа Галуа этого расширения, $\rho : G \to M_{n\times n}$ — представление этой группы в группу матриц с комплексными коэффициентами, χ — характер этого представления, т. е. при каждом $g \in G$: $\chi(g) = \mathrm{Sp}\,(M(g))$, $\wp$ — простой идеал поля k, β — неразветвленный простой идеал поля K, лежащий над $\wp$. Обозначим через $F[\wp]$ автоморфизм Фробениуса группы Галуа расширения полей вычетов $O/\wp \subset O_1/\beta$, где O и O_1 — кольца целых элементов полей k и K соответственно.

L-функция Артина определяется следующим образом:

$$L(s,\chi,K|k) = \prod_{\rho} |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-1}|^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где $|E - M(g)\lambda|$ — характеристический многочлен матрицы $M(g)$, а произведение берется по всем неразветвленным идеалам $\wp$ поля k.

Эту функцию впервые определил и изучил Артин в 1923 году в работе [1].

Отметим, что в случае абелева расширения $k \subset K$ L-функция Артина за вычетом множителей, относящихся к разветвленным простым идеалам, совпадает с L-функцией Дирихле поля k.

В начале 1930-х годов Артин высказал предположение, что в случае неглавного характера L-функция (1) является целой функцией.

В настоящее время гипотеза Артина доказана только в ряде случаев. В частности, в случае, когда порядок группы G свободен от квадратов и в случае, когда порядок группы G является степенью простого числа.

В 1948 году Брауэр доказал, что L-функция (1) является мероморфной функцией, которая в случае неглавного характера является регулярной и не обращается в нуль при $\sigma \geq 1$ и возможные полюсы этой функции могут располагаться только в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

В данной работе мы уточняем результат Брауэра, а именно доказываем, что возможные полюсы могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.

© Степаненко Д. С., 2012

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА L-ФУНКЦИЙ АРТИНА

Остановимся на отдельных свойствах L-функций Артина, доказательство которых можно найти в работах [1, 2].

1. $L(s,\chi)$ регулярна при $\sigma > 1$, так как соответствующее произведение сходится абсолютно и равномерно в каждом замкнутом подмножестве полуплоскости $\sigma > 1$.

2. Пусть H — нормальный делитель в G и Ω — соответствующее промежуточное поле между k и K. Каждый характер χ группы $G|H$ можно рассматривать как характер группы G, причем $L(s,\chi,K|k) = L(s,\chi,\Omega|k)$.

3. Пусть χ — непростой характер в G, а именно $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Тогда $L(s,\chi) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$.

4. Пусть Ω — промежуточное поле между k и K. Пусть $H = Gal(K|\Omega)$ и пусть $G = \sum\limits_i H\alpha_i$ — разложение группы G на правые классы смежности. Каждому характеру χ группы H соответствует индуцированный характер χ^* группы G, определяемый равенством $\chi^*(g) = \sum\limits_i \chi(\alpha_i g \alpha_i^{-1})$, $g \in G$. Тогда $L(s,\chi^*,K|k) = L(s,\chi,K|\Omega)$.

5. Пусть $\Omega = K$. Тогда $H = \{e\}$. В этом случае имеем только один единичный характер χ_0. Соответствующий индуцированный характер χ_0^* задается формулой $\chi_0^*(g) = \begin{cases} n, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$

Пусть Ψ_1, $\Psi_2, \cdots, \Psi_s$ — все простые характеры группы G. Тогда $\chi_0^*(g) = \sum\limits_{i=1}^{s} \Psi_i(g)\Psi_i(e)$ и для дзета-функции Дедекинда $Z_k(s)$ имеет место разложение

$$Z_k(s) = \prod_{i=1}^{s} L(s,\Psi_i,K|k)^{\Psi_i(e)}.$$

При изучении аналитических свойств L-функций Артина одним из основных подходов является подход, основанный на разложении характера χ в виде линейной комбинации $\chi = \sum\limits_j \alpha_j \chi_j^*$, где χ_j^* — индуцированные характеры для характеров χ_j циклических подгрупп, а $\alpha_j \in Q$.

В работе [3] было доказано, что в качестве α_j могут быть взяты целые числа. Таким образом, имеет место

Теорема Брауэра. *Для любого характера χ группы G L-функция Артина $L(s,\chi,K|k)$ может быть представлена в виде*

$$L(s,\chi,K|k) = \prod_i L(s,\chi_i^*,K|\Omega_i)^{n_i},$$

где каждое расширение $K|\Omega_i$ имеет циклическую группу Галуа, χ_i — характер этих циклических групп, n_i — целые числа.

Укажем два следствия теоремы Брауэра (см., например, [4]).

Следствие 1. *L-функция Артина, образованная неглавным характером, является мероморфной функцией, возможные полюсы которой могут располагаться только в критической полосе $0 < \sigma < 1$.*

Следствие 2. *Каждая L-функция Артина удовлетворяет функциональному уравнению вида*

$$\Phi(s,\chi) = W(\chi)\Phi(1-s,\overline{\chi}), \tag{2}$$

где $W(\chi)$ — константа, по модулю равная 1, $\Phi(s,\chi) = A(\chi)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{a(\chi)}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{b(\chi)}L(s,\chi)\Big)$, A — положительная константа, a и b — рациональные числа.

2. К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ L-ФУНКЦИЙ АРТИНА

Здесь будет доказано утверждение, уточняющее следствие 1 теоремы Брауэра. А именно имеет место

Теорема 1. *В случае неглавного характера L-функция Артина является мероморфной функцией, возможные полюсы которой могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.*

Предварительно докажем следующее утверждение.

Пусть расширение $k \subset K$ является конечным абелевым расширением Галуа степени n с группой Галуа G. Рассмотрим ряд Дирихле вида

$$f(s) = \prod_{\wp}\Big(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1} = \sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{3}$$

где произведение берется по почти всем (за исключением конечного числа) простым идеалам поля k, полностью разлагающимся в поле K.

Относительно рядов вида (3) имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (3), обладает свойством*

$$f(s)^n = \Psi(s)Z_K(s),$$

где $\Psi(s)$ — целая функция, а $Z_K(s)$ — дзета-функция Дедекинда поля K.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(s) = \prod_{\wp}\Big(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1}, \qquad s = \sigma + it,$$

где произведение берется по всем простым $\wp$, для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ равен единице.

Ясно, что

$$f(s) = \phi(s)f_1(s), \tag{4}$$

где $\phi(s)$ — целая функция.

Рассмотрим характер $\hat{\chi_0}$, который на единичном элементе группы G равен единице, а на остальных элементах — нулю. Тогда индуцированный характер $\hat{\chi_0^*}$ определяется следующим образом: $\hat{\chi_0^*} = \begin{cases} n, & g = e, \\ 0, & g \neq e \end{cases}$ и $\hat{\chi_0} = \chi_0^*/n$.

Тогда $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ — все характеры группы G. Тогда легко видеть, что $\hat{\chi_0^*} = \chi_1(g)\chi_2(g)\cdots\chi_k(g)$, $g \in G$. Отсюда

$$L(s, \hat{\chi_0^*}, K|k) = \prod_{i=1}^{n} L_i(s, \chi_i, K|k) = Z_K(s). \tag{5}$$

В то же время

$$L(s, \hat{\chi_0^*}, K|k) = L^n(s, \hat{\chi_0}, K|k) = f_1^n(s).$$

Отсюда в силу (5) и (4) получаем

$$f(s)^n = \phi(s)^n f_1^n(s) = \phi(s)^n Z_K(s),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1. Запишем L-функцию Артина в виде

$$L(s, \chi, K|k) = \prod_{\wp}{}' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1} \prod_{\wp}{}'' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1}, \tag{6}$$

где произведение в первом сомножителе берется по всем неразветвленным простым идеалам $\wp$, для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ равен единице, а во втором сомножителе произведение берется по всем неразветвленным простым идеалам $\wp$, для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ больше единицы.

Отметим, что локальный множитель для L-функции Артина зависит только от характера χ и не зависит от явного вида матрицы. Для конечной группы G нормальная жорданова форма матрицы $M(g)$ является диагональной матрицей, причем диагональные элементы являются корнями из единицы. Поэтому можно считать, что

$$M(F[\wp]) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix}.$$

Тогда локальный множитель равен $\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-\dfrac{\xi_i}{N(\wp)^s}\right)^{-1}$. Отсюда легко видеть, что второй сомножитель в произведении (6) определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 1/2$.

Рассмотрим функцию $f(s)$, определенную первым сомножителем в произведении (6),

$$f(s) = \prod_{\wp}{}' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1} = \prod_{\wp}{}' \prod_{i=1}^{m} \Big(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1} = f_1(s)^m, \tag{7}$$

где

$$f_1(s) = \prod_{\wp}{}' \Big(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Рассмотрим максимальное абелево расширение k_{ab}: $k \subset k_{ab} \subset K$. Известно [1], что если β — простой идеал поля k_{ab}, лежащий над простым идеалом $\wp$ поля k, а $\hat\beta$ — простой идеал поля K, лежащий над простым идеалом $\wp$ поля k, то $N_{k_{ab}|k}(\beta) = N_{K|k}(\hat\beta) = p^f$, т. е. если простой идеал $\wp$ полностью разложим при расширении $k \subset K$, то он полностью разложим и при расширении $k \subset k_{ab}$.

Таким образом, к функции $f_1(s)$ вида (8) применима лемма 1 в случае абелева расширения $k \subset k_{ab}$, т. е.

$$f_1^{mn}(s) = \Psi_1^m(s) Z_{k_{ab}}^m(s), \tag{9}$$

где $\Psi_1(s)$ — целая функция.

В силу (7), (8) и (9) получаем $f(s)^n = \Psi_2(s) Z_{k_{ab}}^m(s)$, где $\Psi_2(s)$ — целая функция.

Отсюда в силу представления L-функции Артина (6) в виде произведения двух сомножителей получаем, что $L^n(s,\chi,K|k)$ является функцией, регулярной во всех точках полуплоскости $\sigma > 1/2$, за исключением точки $s = 1$, где она, возможно, имеет полюс n-го порядка.

Отсюда по следствию 1 теоремы Брауэра получаем, что $L(s,\chi,K|k)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 1/2$, а в силу следствия 2 теоремы Брауэра L-функция Артина может иметь полюса только на критической прямой $\sigma = 1/2$. □

Библиографический список

1. *Artin E.* Über eine neue Art von L-Reihen // Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 1923. Vol. 3. P. 89–108.
2. *Хейльброн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел М. : Мир, 1969. С. 310–348.
3. *Brauer R.* On Artin's L-series with general group characters // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 502–514.
4. *Кассел Дж., Фрелих А.* Нормы из неабелевых расширений // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 476.

УДК 517.9

ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет
E-mail: irina.k.post@yandex.ru

В данной работе определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций.

Ключевые слова: банахово пространство, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, теорема Винера, абсолютно сходящийся ряд Фурье, обратимость.

Wiener's Theorem for Periodic at Infinity Functions

I. I. Strukova

In this article banach algebra of periodic at infinity functions is defined. For this class of functions notions of Fourier series and absolutely convergent Fourier series are introduced. As a result Wiener's theorem analog devoted to absolutely convergent Fourier series for periodic at infinity functions was proved.

Key words: Banach space, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Wiener's theorem, absolutely convergent Fourier series, invertibility.

© Струкова И. И., 2012