Доказательство. Заключение теоремы следует из теорем 1 и 2.

Обобщенная теорема Ф.Рисса. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1 \le p \le q \le \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \le 1$ и при $\kappa = 1$ $1 < p_n < q_n < \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_p \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0(G)} \omega_{p,q}^{l_i,i}(\delta; f)\delta^{-l_i+l_i\kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных).

Обобщенная теорема Харди–Литтлвуда. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, $1 \le q \le \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \le 1$ и при $\kappa = 1$ $q_n = \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} V(\lambda_{l_i,i}(f)) \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0(G)} \omega_{1,q}^{l_i,i}(\delta; f)\delta^{-l_i+l_i\kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование $\lambda_{l_i,i}(f)$, $i = 1,\ldots,n$).

Библиографический список

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Hardy G., Littlewood J.* Some properties of fractional integrals // Math. 1932. № 34. P. 403-409.
3. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
4. *Брудный Ю.А.* Критерий существования производных в L^p // Математический сборник. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–64.
5. *Терехин А.П.* Функции ограниченной q-интегральной p-вариации и теоремы вложения // Математический сборник. 1972. Т. 88, № 2. С.42–64.
6. *Терехин А.П.* Многомерная q-интегральная p-вариация и обобщенная по Соболеву дифференцируемость в L_p функции из L_p // Сибирский математический журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1358–1373.
7. *Терехин А.П.* Смешанная q-интегральная p-вариация и смешанная дифференцируемость в L_p функции из L_p // Математические заметки. 1982. Т. 25, № 3. С. 151–166.
8. *Сахно Л.В.* Многомерная q-интегральная p-вариация и теоремы вложения // Саратов, 1981. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 19.03.81. № 1220-81.
9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51-518

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Шишкова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: ShishkovaEV@info.sgu.ru

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно, и когда она задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиноминальными финитными ядрами.

Exact Orders of Errors in Smooth Functions Approximations

E.V. Shishkova

In this paper exact order estimations of errors in uniform metric approximation of smooth function and its derivatives over several classes are obtained in cases when the function is defined precisely or using its δ-approximation $f_\delta(x)$ in $L_2[a,b]$ metric. Integral operators with polynomial finite kernels are considered as approximate one.

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно и когда она задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2\,[a,b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиномиальными финитными ядрами.

Рассмотрим семейство интегральных операторов [1]:

$$A = A(M, \alpha, \nu) \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ – параметр, α_k выбираются из условия и имеют вид

$$a_k = A_k \alpha^{-(2k+1)}, \;\; A_k = \left(2\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+1} \right)^{-1}.$$

Обозначим через $T_{\alpha k}^p$ $(p = \overline{0,k})$ оператор

$$T_{\alpha k}^p f = \int_a^b \frac{\partial^p K_{\alpha k}(x,t)}{\partial x^p} f(t)dt. \tag{2}$$

1. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ задана точно. Известно [1], что если $f(x) \in C^k[a,b]$, то $\left\| T_{\alpha k}^p f - f^{(p)} \right\|_{C_\varepsilon} \to 0$ $(p = \overline{0,k})$ при $\alpha \to 0$, где $C_\varepsilon[a,b] = C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > \alpha$.

Рассмотрим при $k = 1,2,\ldots$, $p = \overline{0,k}$ классы:

$M_2^{k+1}[a,b] = \{ f(x) \in W_2^{k+1}[a,b] : \|f\|_{W_2^{k+1}} \le 1 \}$, где $W_2^{k+1}[a,b]$ – одномерные пространства Соболева с нормой $\|f\|_{W_2^{k+1}} = \left(\int_a^b \left[\left(f(t) \right)^2 + \left(f^{(k+1)}(t) \right)^2 \right] dt \right)^{1/2}$, и величины:

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sup \left\{ \left\| T_{\alpha k}^p f - f^{(p)} \right\|_{C_\varepsilon} : f(x) \in M_2^{k+1}[a,b] \right\}, \tag{3}$$

характеризующие скорость аппроксимации $f^{(p)}(x)$ с помощью операторов $T_{\alpha k}^p$ на классе $M_2^{k+1}[a,b]$. Поставим задачу (задачу Колмогорова – Никольского [2], [3]) получения для величин $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ $(k = 1,2,\ldots,\; p = \overline{0,k}$) асимптотических представлений вида

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \varphi_{1k}^{(p)}(\alpha) + \psi_{1k}^{(p)}(\alpha), \;\; \psi_{1k}^{(p)}(\alpha) = o(\varphi_{1k}^{(p)}(\alpha)) \text{ при } \alpha \to 0. \tag{4}$$

В [4] получены (4) для $k = 1$, $p = 0,1$.

ТЕОРЕМА (Хромовой [2]). Имеют место представления

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sup_{a \le x \le b} \left(\int_a^b \frac{\partial^p K_{\alpha k}(x,\xi)}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial^p g(x,\xi,\alpha)}{\partial x^p} d\xi - \left. \frac{\partial^{2p} g(x,\xi,\alpha)}{\partial x^p \partial \xi^p} \right|_{\xi = x} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где

$$g(x,\xi,\alpha) = \int_a^b K_{\alpha k}(x,\eta) G(\xi,\eta) d\eta - G(\xi,x), \tag{6}$$

$G(\xi,\eta)$– функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = (-1)^{k+1} y^{2k+2}(t) + y(t)$ и краевыми условиями: $y^{(r)}(a) = y^{(r)}(b) = 0, \quad r = k+1,\ldots,2k+1$.

Для функции Грина справедливо выражение

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{4(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l e^{-\lambda_l \eta} \left(\pm e^{\lambda_l \xi} + \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{\lambda_m \xi} \right), \tag{7}$$

где $\lambda_l = \sqrt[2(k+1)]{(-1)^k}$, c_{ml} – некоторые константы, зависящие от краевых условий; знак «+» соответствует $\xi < \eta$; знак «–» – $\xi > \eta$ [2].

Лемма 1. Пусть $k = 1,2,\ldots$, $t = \overline{0,\left[\frac{k}{2}\right]}$, тогда при $h = \overline{0,k-t-1}$

$$\sum_{s=0}^{[k-t]} (-1)^s \frac{k!s^h}{s!(k-s-t)!} = 0\,. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (8) через S. При $h = 0$ (8) очевидно. При $h \ge 1$ $S = \sum_{s=1}^{k-t} \frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-t)\;(k-t-1)!s^{h-1}}{(s-1)!(k-s-t)!}$. Если $h = 1$, то

$$S=k\cdot\ldots\cdot(k-t)\sum_{s=1}^{k-t}(-1)^s C_{k-t-1}^{s-1}=-k\cdot\ldots\cdot(k-t)\sum_{s=0}^{k-t-1}(-1)^s C_{k-t-1}^{s-1}=0,$$

при $h>1$ имеем

$$S=\sum_{s=1}^{k-t}(-1)^s\,\frac{k\cdot\ldots\cdot(k-t)\,(k-t-1)!s^{h-2}(s-1+1)}{(s-1)!(k-s-t)!}=$$

$$=\sum_{s=2}^{k-t}\frac{(-1)^s k\cdot\ldots\cdot(k-t-1)\,(k-t-2)!s^{h-2}}{(s-2)!(k-s-t)!}+\sum_{s=1}^{k-t}\frac{(-1)^s k\cdot\ldots\cdot(k-t)\,(k-t-1)!s^{h-2}}{(s-1)!(k-s-t)!}.$$

Положив в последнем выражении для S $h=2$, получим:

$$S=k\cdot\ldots\cdot(k-t-1)\sum_{s=2}^{k-t}(-1)^s C_{k-t-2}^{s-2}+k\cdot\ldots\cdot(k-t)\sum_{s=1}^{k-t}(-1)^s C_{k-t-1}^{s-1}=$$

$$=k\cdot\ldots\cdot(k-t-1)\sum_{s=0}^{k-t-2}(-1)^s C_{k-t-2}^{s}-k\cdot\ldots\cdot(k-t)\sum_{s=0}^{k-t-1}(-1)^s C_{k-t-1}^{s}=0,$$

а при $h>2$

$$S=\sum_{s=2}^{k-t}(-1)^s\,\frac{k\cdot\ldots\cdot(k-t-1)\,(k-t-2)!s^{h-3}(s-2+2)}{(s-2)!(k-s-t)!}+$$

$$+\sum_{s=1}^{k-t}(-1)^s\,\frac{k\cdot\ldots\cdot(k-t)\,(k-t-1)!s^{h-3}(s-1+1)}{(s-1)!(k-s-t)!}.$$

Проводя дальнейшие рассуждения по этой схеме для произвольного h, получим

$$S=B_h\sum_{s=0}^{k-t-h}(-1)^s C_{k-t-h}^{s}+\ldots+B_1\sum_{s=0}^{k-t-1}(-1)^s C_{k-t-1}^{s},$$

где $B_h,\ldots,B_0$ – некоторые константы. Так как $h\le k-t-1$, то $S=0$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого натурального числа k и $p=\overline{0,k}$

$$\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p}(1+(-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)}=0. \tag{9}$$

Доказательство. Если $p=0$, то $\sum_{j=0}^{-1}=0$. Пусть $p\ne 0$.

Пусть $p=2t,\ t\ge 1$. Рассмотрим

$$F_{kt}\equiv\sum_{j=0}^{2t-1}\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s C_k^s\,\frac{(2(k-s))!(1+(-1)^{j-2t})}{(2(k-s)-2t)!\,j!(j+2(k-s)-2t+1)}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s\,\frac{2^t k!(2(k-s)-1)(2(k-s)-3)\ldots(2(k-s)-2t+1)}{s!\,(k-s-t)!\,(2j+2(k-s)-2t+1)(2j)!}\equiv 2\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f_j}{(2j)!}.$$

Преобразуем f_j. Заметим, что при $j=\overline{0,t-1}$ множитель $(2j+2(k-s)-2t+1)$ в знаменателе сократится с одной из скобок в числителе (в каждом слагаемом при соответствующем значении j). Таким образом, в числителе останется многочлен степени $(t-1)$. Тогда по лемме 1

$$f_j=\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s\,\frac{k!(D_{t-1}s^{t-1}+\ldots+D_1 s+D_0)}{s!(k-s-t)!}=0\,,$$

где $D_{t-1},\ldots,D_1,D_0$ – некоторые константы. Следовательно, $F_{kt}=0$.

Аналогично (9) получается для p нечетного.

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого натурального числа k и $p=\overline{0,k-1}$ справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Если $p = 2t < k$ тогда

$$\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = \sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s \frac{k!2^t(2(k-s)-1)(2(k-s)-3)\cdot\ldots\cdot(2(k-s)-2t+1)}{s!(k-s-t)!(2t)!}.$$

В числителе стоит произведение t скобок, то есть многочлен степени t: $B_t s^t + \ldots + B_1 s + B_0$, где $B_t,\ldots,B_1,B_0$ – некоторые константы, поэтому

$$\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = B_t\sum_{s=0}^{k-t}\frac{(-1)^s k!s^t}{s!(k-s-t)!} + \ldots + B_0\sum_{s=0}^{k-t}\frac{(-1)^s k!}{s!(k-s-t)!} = 0,$$

так как по лемме 1 $\sum_{s=0}^{k-t}\frac{(-1)^s k!s^h}{s!(k-s-t)!} = 0$ при $k-t-h>0$, а у нас $h=\overline{0,t}$ и $k-t-h \ge k-2t > 0$. При p нечетном доказательство аналогичное.

Лемма доказана.

Лемма 4. Для любого натурального k и $p=\overline{0,k}$ справедливо

$$(-1)^p\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} = \sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s C_k^s}{2(k-s)+1}. \tag{11}$$

Доказательство проведем индукцией по p. При $p = 0$(11) верно. Предположим, что оно верно для некоторого $p < k$. Докажем для $p + 1 \le k$. Пусть $p = 2t$. Рассмотрим

$$(-1)^{p+1}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p+1}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p+1}}{2(k-s)+1} - (-1)^p\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p}}{2(k-s)+1} =$$

$$= (-1)^{2t+1}\left(\sum_{s=0}^{k-t-1}\frac{(-1)^s C_k^s (2(k-s))!}{(2(k-s)+1)(2(k-s)-2t-1)!(2t)!}\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{1}{2(k-s)-2t}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-t}\frac{C_k^{k-t}}{2t+1}\right) = -\frac{1}{(2t+1)}\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = 0$$

по лемме 3. Учитывая предположение индукции, для $p < k$ получаем

$$(-1)^{p+1}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p+1}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p+1}}{2(k-s)+1} = (-1)^p\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p}}{2(k-s)+1} = \sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s C_k^s}{2(k-s)+1}.$$

Аналогичное равенство получается при $p = 2t + 1$. Следовательно, равенство (11) верно для любого $p=\overline{0,k}$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Для любых натуральных чисел k и m выполняется равенство:

$$\frac{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} = (-1)^k. \tag{12}$$

Доказательство проведем индукцией по k. Обозначим левую часть равенства (12) через f_k. При $k = 1$ (12) очевидно. Предположим, что при произвольном k: $(-1)^k f_k = 1$. Рассмотрим:

$$(-1)^k f_k - (-1)^{k+1} f_{k+1} = (-1)^k\frac{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} - (-1)^{k+1}\frac{(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+m+1)}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} =$$

$$= (-1)^k\frac{(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+m)}{(m-1)!}\left((k+1)\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} + \frac{(k+1)C_{k+1}^0}{k+1+m} + (k+1)\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} + m\sum_{n=0}^{k+1}\frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1}\right).$$

Обозначив $D_{km} = (-1)^k \dfrac{(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+m)}{(m-1)!}$ и применив формулу $C_k^s - C_{k+1}^{s+1} = -C_k^{s+1}$, получим

$$(-1)^k f_k - (-1)^{k+1} f_{k+1} = D_{km}\left((k+1)\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s (C_k^s - C_{k+1}^{s+1})}{k-s+m} + \frac{(k+1)C_{k+1}^0}{k+m+1} + \right.$$

$$\left. + m\sum_{n=0}^{k+1}\frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1}\right) = D_{km}\left((k+1)\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m+1} + \frac{(k+1)C_k^0}{k+m+1} + \right.$$

$$\left. + m\sum_{n=0}^{k+1}\frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1}\right) = D_{km}\sum_{n=0}^{k+1}(-1)^n C_{k+1}^n = 0.$$

Таким образом, $(-1)^{k+1} f_{k+1} = (-1)^k f_k = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Для любых натуральных чисел k и m, $p = \overline{0,k}$

$$\frac{(-1)^p}{(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+2m-1)}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{k-s+m} = \frac{1}{(2m-1)!}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s C_k^s}{k-s+m}. \qquad (13)$$

Доказательство проведем методом математической индукции по p. При $p = 0$ равенство очевидно. Допустим равенство (13) доказано для произвольного $p < k$, докажем для $p+1$. Обозначим левую часть (13) через f_p. Пусть $p = 2t$, рассмотрим

$$(-1)^{2t+1}(2t+1)(2t+2)\cdot\ldots\cdot(2t+2m)(f_{p+1} - f_p) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-t-1}\frac{(-1)^s C_k^s (2(k-s))!}{(k-s+m)(2t)!(2(k-s)-2t-1)!}\left(1 + \frac{2(t+m)}{2(k-s)-2t}\right) + 2(-1)^{k-t} C_k^{k-t} =$$

$$= 2\sum_{s=0}^{k-t}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = 2\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p = 0$$

по лемме 3. Следовательно, по предположению индукции $f_{p+1} = f_p = \dfrac{1}{(2m-1)!}\displaystyle\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s C_k^s}{k-s+m}$.. Аналогично это равенство получается для $p = 2t+1$. Таким образом, (13) верно для любого $p = \overline{0,k}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого натурального числа k $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \neq 0.$ (14)

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона и свойство биномиальных коэффициентов $C_k^n = C_k^{k-n}$, получим:

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} = (-1)^k\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2n+3} = \frac{(-1)^k}{2}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{n+\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}}dt = \frac{(-1)^k}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^k dt \neq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Для любого натурального числа k и $p = \overline{0,k-2}$ справедливо

$$\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \neq 0. \qquad (15)$$

Доказательство. Покажем, что среди знаменателей слагаемых суммы в (15), то есть во множестве $M = \{2\left(k - \left[k-\dfrac{p}{2}\right]\right) + 3, \ldots, 2k+1, 2k+3\}$, содержится, по крайней мере, одно простое число.

Согласно постулату Бертрана [5], для любого натурально числа $n > 3$ существует простое число q такое, что $n < q < 2(n-1)$. Возьмем $n = k + 3$, тогда $2(n-1) = 2k+4 > 2k+3$. Следовательно, среди нечетных чисел множества $M_0 = \{n+1, n+2, ..., 2k+3\}$ есть простое число q. Заметим, что при любых $p = \overline{0, k-2}$ все нечетные числа M_0 содержатся во множестве M. Тогда $q \in M$ и существует число s_0, позволяющее представление вида $q = 2(k-s_0)+3$. Заметим также, что $2q \notin M$.

Рассмотрим $A \equiv (-1)^{s_0} C_k^{s_0} C_{2(k-s_0)}^p$. Так как $2(k-s_0) < q$ и $k < n < q$, то

$$C_{2(k-s_0)}^p = \frac{2(k-s_0)(2(k-s_0)-1)\cdot\ldots\cdot(2(k-s_0)-p+1)}{p!} \text{ и } C_k^{s_0} = \frac{k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k-s_0+1)}{s_0!}$$

не делятся на q, то НОД $(A,q) = 1$. Обозначим:

$$D = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s_0}}^{k} (2(k-i)+3) = (2k+3)\cdot\ldots\cdot(2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1)\cdot\ldots\cdot 3,$$

тогда, так как $2q \notin M$, НОД $(D,q) = 1$.

Предположим, что $S = \sum\limits_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \dfrac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} = 0 \in \mathrm{Z}$, тогда $D \cdot S = 0 \in \mathrm{Z}$. Рассмотрим

$$D \cdot S = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s_0}}^{k} (2(k-i)+3) \cdot \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} =$$

$$= \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq s_0}}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p (2k+3)\cdot\ldots\cdot(2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1)\cdot\ldots\cdot 3}{2(k-s)+3} +$$

$$+ \frac{(-1)^{s_0} C_k^{s_0} C_{2(k-s_0)}^p (2k+3)\cdot\ldots\cdot(2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1)\cdot\ldots\cdot 3}{2(k-s)+3}.$$

Первое слагаемое (сумма) есть целое число, так как знаменатель каждого слагаемого этой суммы сократится с соответствующей скобкой числителя, а второе слагаемое есть $\dfrac{AD}{q} \notin \mathrm{Z}$ (так как НОД $(AD,q) = 1$ и $2q \notin M$), то есть $D \cdot S \notin \mathrm{Z}$, что противоречит предположению $D \cdot S = 0 \in \mathrm{Z}$, следовательно, $S \neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 9. Если $G(\xi,\eta)$ – функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = (-1)^{k+1} y^{2k+2}(t) + y(t)$ и краевыми условиями: $y^{(r)}(a) = y^{(r)}(b) = 0$, $r = k+1, ..., 2k+1$, тогда при $p = \overline{0, k-2}$ $\left\| \left(G_\xi^{(p+2)}\right)_\eta^{(p+2)}(x,x) \right\|_C \neq 0$.

Доказательство следует из соотношения

$$\left\| \left(G_\xi^{(p)}\right)_\eta^{(p)}(x,x) \right\|_C^{1/2} = \sup\{\left\| u^{(p)}(x) \right\|_C : u(x) \in M_2^{k+1}[a,b]\},\ p = 0,1,...k,$$

полученного в [6]. Для произвольного k рассмотрим функцию $u(x) = x^k \in M_2^{k+1}$. Заметим, что $\left\| u^{(p)} \right\|_C \neq 0$, следовательно, $\left\| \left(G_\xi^{(p)}\right)_\eta^{(p)}(x,x) \right\|_C \neq 0,\ p = \overline{0,k}$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Следующая теорема даёт решение задачи Колмогорова–Никольского.

Теорема 1. Имеют место асимптотические по α при $\alpha \to 0$ представления:

$$\Delta_1^{(k)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{R_{k\,k}}\,\alpha^{1/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad (16)$$

$$\Delta_1^{(k-1)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{R_{k\,k-1}}\,\alpha^{3/2} + O(\alpha^{5/2}), \quad (17)$$

$$\Delta_1^{(k-2)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{Q_{k\,k-2}}\,\alpha^{2} + O(\alpha^{3}), \quad (18)$$

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{Q_{k\,p}}\,\alpha^2 + O(\alpha^4), \quad p=\overline{0,k-3}, \tag{19}$$

где

$$R_{k\,k} = \frac{(-1)^k A_k}{2(k+1)} - 2(k!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{[k-\frac{k}{2}]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^k \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{n+k} C_k^n C_{4k-2n+2}^k}{(4k-2n-2s+3)} \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i}{(2k+1-i)!\,i!\,(2(k-n)+i+1)}, \tag{20}$$

$$R_{k\,k-1} = \frac{(-1)^{k+1} A_k}{12(k+1)(k+2)} - \frac{A_k^2}{k(k+1)^2} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} -$$
$$-2((k-1)!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]} (-1)^{s+k} C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n C_{4k-2n+2}^{k-1}}{4k-2n-2s+5} \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i}{(2k+1-i)!\,i!\,(2(k-n)+i+1)}, \tag{21}$$

$$Q_{k\,p} = \frac{(-1)^p\, 2A_k^2}{(p+1)(p+2)} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \cdot \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \cdot \left\| \left(G_\xi^{(p+2)}\right)_\eta^{(p+2)}(x,x) \right\|, \tag{22}$$

$R_{k\,k}, R_{k\,k-1}, Q_{k\,p}$ отличны от нуля.

Доказательство основано на представлениях (5), (6) и (7).

Применив формулу бинома Ньютона, запишем ядро оператора $T_{\alpha k}$ в виде $p=\overline{0,k-2}$,

$$K_{\alpha k}(x,\xi) = \begin{cases} a_k \sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n \alpha^{2n} \left(\xi - x\right)^{2(k-n)}, & \xi \in [x-\alpha, x+\alpha] \\ 0, \ \xi \in [a, x-\alpha] \cup [x+\alpha, b], & \end{cases} \tag{23}$$

тогда

$$\frac{\partial^p K_{\alpha k}(x,\xi)}{\partial x^p} = \begin{cases} a_k\, p! \sum_{n=0}^{[k-\frac{p}{2}]} (-1)^{n+p} C_k^n C_{2(k-n)}^p \alpha^{2n} \left(\xi - x\right)^{2(k-n)-p}, & \xi \in [x-\alpha, x+\alpha] \\ 0, \ \xi \in [a, x-\alpha] \cup [x+\alpha, b]. & \end{cases} \tag{24}$$

Заметим, что

$$\sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l^s = \begin{cases} 0, \quad s = 0,1,\dots,2k+1,2k+3,\dots,4k+3, \\ (-1)^k \cdot 2(k+1), \quad s = 2k+2, \\ 2(k+1), \quad s = 4k+4. \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя (23) и (7) в (6), разлагая экспоненциальные функции в ряды, подсчитывая интегралы, учитывая (25) и выделяя главные части асимптотик по α, получаем

$$g(x,\xi,\alpha) = (-1)^{k+1} \left(\frac{A_k}{2} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^{k} \frac{(\xi - x)^{2(k-i)} \alpha^{2i+1}}{(2(k-i))!\,(2i+1)!\,(k-n+i+1)} + \right.$$
$$+ \frac{A_k (-1)^{k+1}}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n e^{\lambda_m \xi - \lambda_l x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1} \alpha^{2i}}{(2i)!\,(2(k-n)+2i+1)} + \tag{26}$$
$$\left. + A_k \sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i (\xi - x)^{2(k-n)+2(k+1)} \alpha^{2n}}{(2k+1-i)!\,i!\,(2(k-n)+i+1)\alpha^{2k+1}} \pm \frac{(\xi - x)^{2k+1}}{2(2k+1)!} \right) +$$
$$+ O\left((\xi - x)^{4k+3}\right) + O\left((\xi - x)^{4k+1}\alpha^2\right) + \dots + O\left(\alpha^{4k+3}\right),$$

знак «+» соответствует $\xi < x$; знак «–» – $\xi > x$; тогда

$$\frac{\partial^p g(x,\xi,\alpha)}{\partial x^p} = (-1)^{k+1} \left(\frac{A_k}{2} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^p\, p!\,(\xi - x)^{2(k-i)-p} C_{2(k-i)}^p \alpha^{2i+1}}{(2(k-i))!\,(2i+1)!\,(k-n+i+1)} + \right.$$

$$
+\frac{A_k(-1)^{k+1}}{2(k+1)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n e^{\lambda_m\xi-\lambda_l x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_l^{2i+1+p}\alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)}+
$$

$$
+A_k\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{(-1)^{i+p}p!(\xi-x)^{2(k-n)+2(k+1)-p}C_{4k-2n+2}^{p}\alpha^{2n}}{(2k+1-i)!i!(2(k-n)+i+1)\alpha^{2k+1}}\pm \tag{27}
$$

$$
\left.\pm\frac{(-1)^p(\xi-x)^{2k+1-p}}{2(2k+1-p)!}\right)+O\left((\xi-x)^{4k+3-p}\right)+O\left((\xi-x)^{4k+1-p}\alpha^2\right)+\ldots+O\left(\alpha^{4k+3-p}\right),
$$

а

$$
\left.\frac{\partial^{2p}g(x,\xi,\alpha)}{\partial x^p\partial\xi^p}\right|_{\xi=x}=\frac{(-1)^{k+1}A_k}{2}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+p}C_k^n\alpha^{2(k-p)+1}}{(2(k-p)+1)!(2k-n-p+1)}+
$$

$$
+\frac{A_k}{2(k+1)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n e^{(\lambda_m-\lambda_l)x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_m^p\lambda_l^{2i+1+p}\alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)}+ \tag{28}
$$

$$
+O\left(\alpha^{2(2k-p)+3}\right).
$$

Раскладывая в ряд Тейлора экспоненциальную функцию, получим

$$
\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}e^{\lambda_m\xi-\lambda_l x}(\xi-x)^{2(k-s)-p}d\xi=e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_m^j\alpha^{j+2(k-s)-p+1}(1+(-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)}. \tag{29}
$$

Подставляя (24), (27) и (28) в (5) и учитывая (29), имеем:

$$
(\Delta_1^{(p)})^2=R_{k\,p}\alpha^{2k-2p+1}+\max_{a\le x\le b}H_{k\,p\alpha}(x)+O(\alpha^{4k-2p+3}), \tag{30}
$$

где

$$
R_{k\,p}=(-1)^{k+1}\left(2\,(p!)^2A_k^2\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n C_{4k-2n+2}^p}{6k-2n-2s-2p+3}\times\right.
$$

$$
\times\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{(-1)^i}{(2k+1-i)!i!(2(k-n)+i+1)}+p!A_k^2\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\times
$$

$$
\times\sum_{i=0}^{[k-\frac{p}{2}]}\frac{1}{(2i+1)!(k-n+i+1)(2(k-i)-p)!(4k-2s-2i-2p+1)}- \tag{31}
$$

$$
\left.-\frac{p!A_k}{2(2k+1-p)!}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2k-s-p+1}-\frac{A_k}{2(2(k-p)+1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+p}C_k^n}{2k-n-p+1}\right)\equiv
$$

$$
\equiv(-1)^{k+1}(I_1+I_2+I_3+I_4),
$$

$$
H_{k\,p\alpha}(x)=(-1)^{k+1}\left(\frac{p!A_k^2}{2(k+1)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\times\right.
$$

$$
\times\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_l^{2i+1+p}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_m^j\alpha^{2i+j-p}}{j!(j+2(k-s)-p+1)}\times
$$

$$
\times(1+(-1)^{j-p})-\frac{A_k}{2(k+1)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\times \tag{32}
$$

$$
\left.\times\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+p}C_k^n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_l^{2i+1+p}\lambda_m^p\alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)}\right)\equiv(-1)^{k+1}(J_1+J_2).
$$

Заметим, что по лемме 6 при $m = k - p + 1$ в (31)

$$I_3 = -\frac{p!A_k}{2(2k+1-p)!}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2k-s-p+1} = -\frac{p!A_k(p+1)...(2k-p+1)(-1)^p}{2(2k+1-p)!(2k-2p+1)!}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2k-n-p+1} = \frac{A_k}{2(2(k-p)+1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+p} C_k^n}{2k-n-p+1} = I_4.$$

Учитывая это, рассмотрим в (31) R_{k_p} при $p = k$ и $p = k - 1$.

Пусть $p = k$. По лемме 4 $I_3 = I_4 = -\dfrac{A_k}{2(k+1)}$.

$$I_2 = A_k^2\sum_{s=0}^{[k-\frac{k}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+1} + k!A_k^2\sum_{s=0}^{[k-\frac{k}{2}]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\sum_{i=1}^{[k-\frac{k}{2}]}\frac{1}{(2i+1)!(k-n+i+1)(k-2i)!(2k-2s-2i+1)} \equiv I_{21} + I_{22}.$$

В I_{21} сумма по s по лемме 4 равна $\dfrac{(-1)^k}{2A_k}$, а сумма по n по лемме 5 при $m = 1$ равна $\dfrac{(-1)^k}{2A_k}$, следовательно, $I_{21} = \dfrac{A_k}{2(k+1)}$. Рассмотрим I_{22}. Пусть $k = 2t$, а $j = t - i$, тогда при $i = 1,\ldots,t$, $j = t - 1,\ldots,0$ и $\displaystyle\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{k}{2}\right]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^k}{2(k-s)-2i+1} = \sum_{s=0}^{t}\frac{(-1)^s C_{2t}^s C_{2(2t-s)}^{2t}}{2t-2s+2j+1} = 0$. Это вытекает из доказательства леммы 2 при $p = k$. Аналогично при $k = 2t - 1$ сумма по s равна нулю. Следовательно, $I_{22} = 0$ и $I_2 = I_{21} = \dfrac{A_k}{2(k+1)} = -I_3$ по лемме 4, то есть $R_{kk} = I_1 + I_2 - 2I_2 = I_1 - I_2$, откуда следует (20).

Пусть $p = k - 1$. По лемме 4 $I_3 = I_4 = \dfrac{A_k}{3!(k+1)(k+2)}$. Рассмотрим $I_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{0} + \sum_{i=1}^{1} + \sum_{i=2}^{\left[k-\frac{k-1}{2}\right]}$. По лемме 5

$$\sum_{i=0}^{0} = \frac{A_k^2}{k(k+1)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3}\times\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+1} = \frac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2}\sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3}.$$

В $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} = \frac{A_k^2}{3!}\sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+1}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+2}$ сумма по s по лемме 4 и по определению A_k равна $\dfrac{(-1)^{k+1}}{2A_k}$, а сумма по n по лемме 5 равна $\dfrac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}$, то есть $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} = -\frac{A_k}{2\cdot 3!(k+1)(k+2)} = -I_3 = -I_4$. Аналогично, как и $\displaystyle\sum_{i=1}^{\left[k-\frac{k}{2}\right]}$ при $p = k$ $\displaystyle\sum_{i=2}^{\left[k-\frac{k-1}{2}\right]} = 0$. Следовательно, $I_2 = \dfrac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2}\displaystyle\sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} - I_3$.

Таким образом, $R_{k\,k-1} = I_1 + \dfrac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2}\displaystyle\sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} + I_3$, откуда следует (21).

Преобразуем $H_{kp\alpha}(x)$ из (32). Рассмотрим отдельно первое слагаемое J_1. Все слагаемые суммы по j при $j < p$ равны нулю по лемме 2. При $j = p$ по лемме 4 и определению A_k имеем:

$$\frac{A_k^2\cdot 2}{2(k+1)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_l^{2i+1+p}\lambda_m^p\alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} =$$
$$= \frac{(-1)^p A_k}{2(k+1)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)}c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\times\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_l^{2i+1+p}\lambda_m^p\alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} = -J_2.$$

Слагаемые при $j = p + 2q - 1$, где q – натуральное число, равны нулю, так как $(1+(-1)^{j-p}) = 1+ +(-1)^{p+2q-1-p} = 0$, поэтому

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{\lambda_m^j \alpha^{2i+j-p}(1+(-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{p+2j}\alpha^{2i+2j}}{(2j+p)!(2j+2(k-s)+1)} = \frac{\lambda_m^{p+2}\alpha^{2i+2}}{(2+p)!(2(k-s)+3)} + O(\alpha^{2i+4}).$$

Заметим также, что из вида функции $G(\xi,\eta)$ (7) имеем:

$$(G_\xi^{p+2})_\eta^{p+2}(\xi,\eta)\Big|_{\substack{\xi=x\\ \eta=x}} = \frac{(-1)^p}{4(k+1)}\left(\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\lambda_l^{p+3}\lambda_m^{p+2} \pm \sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l^{2p+5}\right),$$

причем в последней сумме степень λ_1 нечетная, следовательно, по (25) эта сумма равна нулю, то есть

$$(G_\xi^{p+2})_\eta^{p+2}(\xi,\eta)\Big|_{\substack{\xi=x\\ \eta=x}} = \frac{(-1)^p}{4(k+1)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml}\cdot e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\lambda_l^{p+3}\lambda_m^{p+2}. \tag{33}$$

Таким образом,

$$H_{kp\alpha}(x) = \frac{(-1)^{k+1}p!A_k^2}{k+1}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{k}(-1)^n C_k^n \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_l^{2i+1+p}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^{p+2j}\alpha^{2i+2j}}{(2j+p)!(2j+2(k-s)+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}A_k^2}{2(k+1)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{(p+1)(p+2)(2(k-s)+3)}\sum_{l=1}^{2(k+1)}\sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml}e^{x(\lambda_m-\lambda_l)}\times \tag{34}$$

$$\times\lambda_l^{p+3}\lambda_m^{p+2}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3}\alpha^4 + O(\alpha^6) = \frac{2(-1)^{k+p+1}A_k^2}{(p+1)(p+2)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3}\left(\left(G_\xi^{p+2}\right)_\eta^{p+2}(\xi,\eta)\right)\Big|_{\substack{\xi=x\\ \eta=x}}\cdot\alpha^4 + O(\alpha^6) \equiv \tilde{Q}_{kp}(x)\alpha^4 + O(\alpha^6).$$

Обозначим

$$Q_{kp} = \max_{a\le x\le b}\tilde{Q}_{kp}(x) = \frac{2(-1)^{k+p+1}A_k^2}{(p+1)(p+2)}\sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3}\times\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3}\left\|\left(\left(G_\xi^{p+2}\right)_\eta^{p+2}(x,x)\right)\right\|_C.$$

Отсюда и из (31) при достаточно малых α получаем

$$(\Delta_1^{(p)})^2 = R_{kp}\alpha^{2k-2p+1} + Q_{kp}\alpha^4 + O(\alpha^6) + O(\alpha^{4k-2p+3}). \tag{35}$$

В (35) первое слагаемое будет главным при $p = k$ и $p = k - 1$, в остальных случаях ($p = \overline{0,k-2}$, $k = 2,3,\ldots$) главным является второе слагаемое, откуда следуют представления (16) – (19).

Из лемм 7, 8 и 9 следует, что $Q_{kp} \ne 0$. Доказательство отличия от нуля констант R_{kk} и R_{kk-1} приведем позже, поскольку оно опирается на теорию некорректных задач.

2. Пусть теперь функция $f(x)$ задана своим δ-приближением в среднеквадратичной метрике, то есть вместо $f(x)$ нам дана $f_\delta(x)$: $\|f - f_\delta\|_{L_2} < \delta$. Известно [1], что если $f(x)\in C^k[a,b]$, то можно так выбирать согласования параметра регуляризации α с погрешностью δ, что $\left\|T^p_{\alpha(\delta)k}f_\delta - f^{(p)}\right\|_{C_\varepsilon} \to 0$ при $\delta \to 0$ ($p = \overline{0,k}$).

Рассмотрим при $k = 1,2,\ldots,$ $p = \overline{0,k}$ величины

$$\Delta(\delta, T^p_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sup\left\{\left\|T^p_{\alpha k}f_\delta - f^{(p)}\right\|_{C_\varepsilon} : f(x)\in M_2^{k+1}[a,b],\ \|f - f_\delta\|_{L_2} < \delta\right\}, \tag{36}$$

характеризующие погрешность приближения к $f^{(p)}(x)$ при неточном задании функции $f(x)$. Поставим задачу получения точных по порядку оценок величин $\Delta(\delta, T^p_{\alpha k}, M_2^{k+1})$. В [7] эта задача решена для случаев $k = 1$, $p = 0,1$.

Г.В. Хромовой [8] предложен метод нахождения таких оценок, поскольку задачу восстановления функции по среднеквадратичному приближению можно интерпретировать как задачу решения уравнения первого рода с оператором вложения из $C^k[a,b]$ в $L_2[a,b]$ [9]. Согласно этому методу, сначала нужно получить асимптотические представления (4) для $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ и аналогичные представления для $\left\|T_{\alpha k}^p\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} (p=\overline{0,k})$:

$$\left\|T_{\alpha k}^p\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} = \varphi_{2k}^{(p)}(\alpha) + \psi_{2k}^{(p)}(\alpha),\ \psi_{2k}^{(p)}(\alpha) = o(\varphi_{2k}^{(p)}(\alpha)) \text{ при } \alpha \to 0. \quad (37)$$

После следует найти согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ из условий:

$$\varphi_{1k}^{(p)}(\alpha) + \delta\varphi_{2k}^{(p)}(\alpha) \to \inf_\alpha. \quad (38)$$

Найденные выражения $\alpha = \alpha(\delta)$ и представления (4), (37) необходимо подставить в двусторонние оценки:

$$\frac{1}{2}\Phi \le \Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1}) \le \Phi, \text{ где } \Phi = \Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) + \delta\left\|T_{\alpha k}^p\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon}, \quad (39)$$

результатом чего будут точные по порядку δ оценки погрешностей задачи восстановления, имеющие тот же порядок, что и величины $\inf\limits_\alpha \Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1})$ [8].

Теорема 2. Справедливы равенства:

$$\left\|T_{\alpha k}^k\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} = P_{kk}\alpha^{\frac{-2k-1}{2}},\quad \left\|T_{\alpha k}^{k-1}\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} = P_{k\,k-1}\alpha^{\frac{-2k+1}{2}}, \quad (40)$$

$$\left\|T_{\alpha k}^p\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} = P_{kp}\alpha^{\frac{-2p-1}{2}},\ p = \overline{0,k-2}, \quad (41)$$

где

$$P_{kk} = \sqrt{(-1)^k (2k)!\,A_k},$$

$$P_{k\,k-1} = \left((-1)^k A_k k(2k-2)! + \frac{4(2k-1)!\,A_k^2}{k+1} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3}\right)^{1/2},$$

$$P_{kp} = \left(2(p!\,A_k)^2 \sum_{n=0}^{k-p} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1}\right)^{1/2},\ p = \overline{0,k-2}.$$

Доказательство. Известно [1], что

$$\left\|T_{\alpha k}^p\right\|_{L_2 \to C_\varepsilon} = \max_{a+\varepsilon \le x \le b-\varepsilon} \left(\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left(\frac{d^p K_{\alpha k}(x,t)}{dx^p}\right)^2 dt\right)^{1/2}.$$

Применяя (24), получаем

$$\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left(\left(K_{\alpha k}(x,t)\right)_x^{(p)}\right)^2 dt = 2A_k^2 (p!)^2 \sum_{n=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} \alpha^{-2p-1}.$$

Пусть $p = 2t$, $t \ge 1$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} = \sum_{n=0}^{k-t} \sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} C_{2(k-n)}^{2t}}{2(k-n)+2(k-s)-4t+1}.$$

Слагаемые при $n = k - t$: $(-1)^{k-t} C_k^t \sum\limits_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t}}{2(k-s)-2t+1} = 0$, так как эта сумма соответствует случаю $j = 0$ в доказательстве леммы 2. Аналогично обращаются в нуль все суммы слагаемых при $n = k - t - 1, \ldots, n = k - 2t + 1$, соответствующие $j = 1, \ldots, j = t - 1$ в доказательстве леммы 2. Следовательно, $\sum\limits_{n=k-2t+1}^{k-t} = 0$, то $\sum\limits_{n=0}^{k-t} = \sum\limits_{n=0}^{k-2t} = \sum\limits_{n=0}^{k-p}$. Таким образом, при $p = 2t$, $t \ge 1$:

$$\sum_{n=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} = \sum_{n=0}^{k-p} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1}. \quad (42)$$

Аналогично (42) получается для $p = 2t - 1$, $t \ge 1$. При $p = 0$ равенство очевидно. Получаем

$$\left\|T^p_{\alpha k}\right\|_{L_2\to C_\varepsilon} = \left(2A_k^2(p!)^2\sum_{n=0}^{k-p}\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{p}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+s}C_k^nC_k^sC^p_{2(k-s)}C^p_{2(k-n)}}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1}\alpha^{-2p-1}\right)^{1/2},$$

откуда следует (41). Подставляя в это выражение $p = k$ и $p = k - 1$ и применяя лемму 4, получаем (40).

Теорема доказана.

Теорема 3. Справедливы следующие двусторонние оценки:

$$\frac{1}{2}(F_{kp}\delta^{\beta_p} + \Theta_p) \le \Delta(\delta, T^p_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1}) \le F_{kp}\delta^{\beta_p} + \Theta_p,\ p = \overline{0,k}, \tag{43}$$

где

$$\alpha(\delta) = C(k,p)\delta^{\nu_p}$$

$$C(k,k) = \frac{(2k+1)P_{kk}}{\sqrt{R_{kk}}},\ C(k,k-1) = \frac{(2k-1)P_{kk-1}}{3\sqrt{R_{kk-1}}},\ \nu_k = \nu_{k-1} = \frac{1}{k+1},$$

$$C(k,p) = \frac{(2p+1)P_{kp}}{4\sqrt{Q_{kp}}},\ \nu_p = \frac{2}{2p+5},\ p = \overline{0,k-2},$$

$$\beta_k = \frac{1}{2k+2},\ \beta_{k-1} = \frac{3}{2k+2},\ \beta_p = \frac{4}{2p+5},\ p = \overline{0,k-2},$$

$$F_{kk} = (2k+2)P_{kk}^{\beta_k}\left(\frac{\sqrt{R_{kk}}}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2k+2}},\ F_{kk-1} = (2k+2)\left(\frac{P_{kk-1}}{3}\right)^{\beta_k}\left(\frac{\sqrt{R_{kk-1}}}{2k-1}\right)^{\frac{3(2k-1)}{2k+2}},$$

$$F_{kp} = (2p+5)\left(\frac{P_{kp}}{4}\right)^{\beta_p}\left(\frac{\sqrt{Q_{kp}}}{2p+1}\right)^{\frac{2p+1}{2p+5}},\ p = \overline{0,k-2},$$

$$\Theta_p = O(\delta^{\gamma_p}),\ p = \overline{0,k}$$

$$\gamma_k = \frac{7}{2k+2}, \gamma_{k-1} = \frac{5}{2k+2}, \gamma_{k-2} = \frac{6}{2k+1}, \gamma_p = \frac{8}{2p+5},\ p = \overline{0,k-3},$$

$R_{kk}, R_{kk-1}, Q_{kp}\ (p = \overline{0,k-2}), P_{kp}(p = \overline{0,k})$ определены в теоремах 1 и 2. Оценки $\Delta(\delta, T^k_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1})$ и $\Delta(\delta, T^{k-1}_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1})$ являются оптимальными по порядку.

Доказательство. При получении оценок в утверждении теоремы применяется метод Хромовой. Асимптотические представления (4) и (37) для величин $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ и $\left\|T^p_{\alpha k}\right\|_{L_2\to C_\varepsilon}(p = \overline{0,k})$ даются в теоремах 1 и 2. Из условия (38) получаем согласования параметра регуляризации α с погрешностью исходных данных δ: при $p = k$:

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{(2k+1)P_{kk}\delta}{\sqrt{R_{kk}}}\right)^{\frac{1}{k+1}},\ P = k-1:\ \alpha(\delta) = \left(\frac{(2k-1)P_{kk-1}\delta}{3\sqrt{R_{kk-1}}}\right)^{\frac{1}{k+1}},\ p = \overline{0,k-2}:\ \alpha(\delta) = \left(\frac{(2p+1)P_{kp}\delta}{4\sqrt{Q_{kp}}}\right)^{\frac{2}{2p+5}}.$$

Подставляя полученные выражения в (39), имеем (43).

Известно, что метод регуляризации А.Н. Тихонова на классах, задаваемых в виде $M = BS_R$, где B – вполне непрерывный оператор, S_R – шар в некотором гильбертовом пространстве с радиусом R, является оптимальным по порядку [10]. Поскольку класс функций $M_2^{k+1}[a,b]$ указанного вида, где B – оператор вложения из $W_2^{k+1}[a,b]$ в $C_\varepsilon^k[a,b]$, а $R = 1$, то утверждение справедливо и в нашем случае.

Сравнивая оценки, полученные в задаче восстановления функции и ее производных методом Тихонова [8], с оценками (43) получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теперь покажем, что константы R_{kk} и R_{kk-1} из теоремы 1 отличны от нуля. Предположим противное: $R_{kk} = R_{kk-1} = 0$. Тогда величины $\Delta(\delta, T^{k}_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1})$ и $\Delta(\delta, T^{k-1}_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1})$ будут иметь порядок меньший, чем $\alpha^{1/2}$ в первом и $\alpha^{3/2}$ во втором случаях. Аналогично, как и в доказательстве теоремы 3, выбирая соответствующие согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ и подставляя их в двусторонние оценки (39), придем к порядкам $\Delta(\delta, T^{p}_{\alpha(\delta)k}, M_2^{k+1})$ $(p = k, k-1)$, меньшим оптимальных, что противоречит определению оптимальности и последнему утверждению теоремы 3.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Библиографический список

1. *Хромова Г.В.* О дифференцировании функций, заданных с погрешностью//Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз.сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1984. Вып. 6. С. 53–58.

2. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций. М.: Наука, 1977. 508 с.

4. *Хромова Г.В., Шишкова Е.В.* О скорости сходимости приближений функции вместе с её производной // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2003. Вып. 5. С. 136–138.

5. *Чебышев П.Л.* Полн. собр. соч. М.; Л., Изд-во Академии Наук СССР 1946. Т . 1. С. 433.

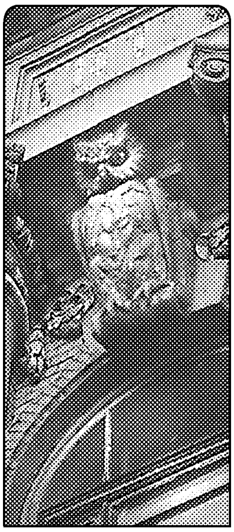
6. *Хромова Г.В.* О верхних гранях норм функций и их производных // Вестн. Моск. ун-та. 1998. № 2. С. 45–47.

7. *Шишкова Е.В.* О точных по порядку оценках погрешностей в задаче восстановления функции вместе с ее производной // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2003. Вып. 2. С.99–102.

8. *Хромова Г.В.* Оценки погрешностей приближенных решений уравнений первого рода в равномерной метрике// Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов. 1998. 237 с.

9. *Хромова Г.В.* Задача восстановления и уравнения первого рода //Дифференциальные уравнения и вычисл. математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1976. Вып. 6, ч. 1. С.83–87

10. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория нелинейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ–ПОЛОСЫ

П.Ф.Недорезов

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики

Рассматривается вибрационный изгиб толстой пластинки-полосы при произвольном закреплении краев. В качестве исходных приняты уравнения трехмерной теории вязкоупругости, записанные в перемещениях. Понижение размерности краевой задачи выполняется методом сплайн-коллокации. Одномерная краевая задача решается численно методом дискретной ортогонализации. Отмечены некоторые новые эффекты, которые не могут быть описаны в рамках классической теории Кирхгофа.

Application of a Spline-Collocation Method to the Problems of Thick Viscoelastic Plate-Strip Vibrations

P.F. Nedorezov

Vibratory bend of a thick plate-strip with arbitrary edge fixing is considered. The equations of 3D viscoelastic theory in displacements are accepted as governing equations. Boundary problem dimensions reduction is realized with spline-collocation method. 1D boundary problem is solved numerically using discrete orthogonalization method. New effects that cannot be explained with the classic Kirhgof theory are mentioned.

Рассматриваются установившиеся колебания бесконечной в направлении y пластинки конечной ширины a и толщины h под действием распределенной по плоскости $z = -h/2$ нагрузки интенсивности $q(x,t)$

$$Af = Mf + g(x)\int_0^{\pi} f(t)v(t)\,dt,\ Mf = \int_0^{x} M(x,t)f(t)\,dt,\ 0 \le x \le \pi. \quad (1)$$

Предполагается, что способы закрепления краев $x = 0$ и $x = a$ в направлении оси y остаются неизменными. Тогда $v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, а остальные компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) не зависят от y.

Зависимости между ненулевыми компонентами напряжений и малых деформаций (механические свойства материала считаются независящими от температуры) определяются соотношениями линейного закона вязкоупругости

$$\sigma_x = A\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\left((1-\nu)\frac{\partial u(x,z,\tau)}{\partial x} + \nu\frac{\partial w(x,z,\tau)}{\partial z}\right)d\tau$$
$$(x \Leftrightarrow z;\ u \Leftrightarrow w; \nu = \text{const}),$$
$$\tau_{xz} = \frac{1}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\left(\frac{\partial u(x,z,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,z,\tau)}{\partial x}\right)d\tau, \quad (2)$$
$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z),$$

где обозначено $A = 1/(1+\nu)(1-2\nu)$.

Все характеристики НДС пластинки, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде