Для решения системы нелинейных уравнений (31) можно использовать известные методы решения таких систем. Можно показать, что система (31) имеет единственное решение в случае, когда все R_j, $j = \overline{1,m}$, достаточно малы.

Библиографический список

1. *Салимов Р. Б.* Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 60–64.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 113–179.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 495 с.

УДК 517.956.2

РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ЗАДАЧИ ПУАССОНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

С. Л. Семенов

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа
E-mail: sergo_7@list.ru

Устанавливается разрешимость в классическом смысле задачи Пуассона для оператора Лапласа на двумерных стратифицированных множествах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения.

Solvability of Poisson's Problem for Laplace Operator on Two Dimensional Stratified Sets in Usual Sense

S. L. Semenov

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis
E-mail: sergo_7@list.ru

Solvability of Poisson's problem for Laplace operator on two dimensional stratified sets is established in usual sense.

Key words: differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сложных физических систем часто сводится к исследованию уравнений на стратифицированных множествах (связных объединениях многообразий — стратов различной размерности). Например, задача о малых перемещениях механической системы, составленной из струн, мембран и упругих тел, или задача о диффузии в слоистой среде.

Исследование эллиптических дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах активно проводится в настоящее время О. М. Пенкиным. Основные результаты о разрешимости эллиптических уравнений в этой области изложены в работах [1–3]. В них были получены условия слабой разрешимости для уравнений с «жестким» лапласианом и классической разрешимости для уравнений с «мягким» лапласианом. Было установлено, что для существования решений этих уравнений необходимо, помимо наложения ограничений на гладкость коэффициентов, входящих в уравнение, вводить ограничения на структуру стратифицированного множества. Так, в [1] доказано, что существование слабого решения обеспечивается на множествах, удовлетворяющих условию прочности, которое означает, что для каждого страта существует цепочка из стратов, соединяющая его с границей стратифицированного множества, причем размерности соседних стратов цепочки отличаются не больше чем на единицу и сама цепочка содержит только один страт, принадлежащий границе стратифицированного множества. В то же время условие прочности является недостаточным для существования классического решения. С целью установления существования классического решения для уравнения с «мягким» лапласианом было введено более строгое ограничение на структуру множества [2]. Классическая разрешимость обеспечивается на стратифицированном множестве, у которого достаточно малая окрестность любого страта, размерность которого меньше на 2 или более максимальной размерности стратов множества, остается связной, если из этой окрестности изъять сам этот страт. Вопрос же о существовании классического решения для «жесткого» лапласиана пока открыт. В работах [4, 5] устанавливается классическая разрешимость задачи Вентцеля для уравнения Лапласа на области с гладкой границей, что гарантирует существование классического решения для задачи Пуассона для «жесткого» лапласиана на стратифицированном множестве, составленном из двух стратов: гладкой замкнутой поверхности и области, ограниченной этой поверхностью.

В настоящей работе изучается разрешимость задачи Пуассона для «жесткого» лапласиана на стратифицированном множестве. Точнее говоря, изучается классическая разрешимость следующей задачи: Ω — стратифицированное множество, размерности стратов которого не превосходят двух, с непустой границей $\partial\Omega$. На данном множестве рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\triangle U(x) = F(x), \quad x \in \operatorname{int}\Omega, \qquad U|_{x\in\partial\Omega} = \psi.$$

Здесь под $\triangle$ понимается «жесткий» оператор Лапласа, т. е. на каждом страте σ_{ik} размерности i оператор $\triangle$ принимает вид

$$\triangle U(x) = \triangle_i U(x) + \sum_{k:\sigma_{ij}\prec\sigma_{i+1,k}} \frac{\partial}{\partial\nu_{j,k}} U, \quad x \in \sigma_{ij},$$

где $\nu_{j,k}$ означает нормаль к σ_{ij}, направленную внутрь $\sigma_{i+1,k}$, $\triangle_i$ — обычный i-мерный оператор Лапласа. В нуль-мерных стратах требуется непрерывность функции U.

В работе устанавливается классическая разрешимость данной задачи в двумерном случае, при этом, кроме условий налагаемых на гладкость функций F и ψ, на структуру стратифицированного множества налагается требование существования прочной цепочки между двумя любыми стратами и условие, означающее, что каждый одномерный страт σ_{1k}, примыкающий к двумерному страту, является частью замкнутой кривой Γ — границы двумерного страта. При этом если изъять замыкание страта σ_{1k}, то кривая Γ перестанет быть замкнутой.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пространство $L(\Omega)$ — пространство суммируемых функций.

Пространство $C^{m+\lambda}(Q)$, где $(0<\lambda<1)$, $m\in\mathbb{N}$ и Q — компактное подмножество R^n, обозначает пространство функций, имеющих непрерывные производные, вплоть до m-го порядка, и непрерывные, по Гельдеру, с показателем λ производные m-го порядка с нормой

$$\|u\|_{C^{m+\lambda}(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \max_{x\in Q} |D^\alpha u| + \max_{|\alpha|=m} M_\lambda(D^\alpha u),$$

где D^α — оператор дифференцирования для мультииндекса α и $M_\lambda(D^\alpha u)$ — постоянная Гельдера функции $D^\alpha u$.

Пространство $C_0^{m+\lambda}(Q)$ — подпространство $C^{m+\lambda}(Q)$, образованное функциями u такими, что $u(x)|_{x\in\partial Q} = 0$.

Через Ω будем обозначать область в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$.

Под *кусочно-гладкой* $(n-1)$*-мерной поверхностью* будем понимать границу области Ω, $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \partial\Omega_k$, где $\partial\Omega_k$ — гладкая $(n-1)$-мерная поверхность и граница каждой $\partial\Omega_k$ является гладкой $(n-2)$-мерной поверхностью.

Через θ будем обозначать множество точек потери гладкости $\partial\Omega$.

Поверхность будем называть *плоской*, если все ее главные кривизны тождественно равны нулю.

Кусочно-плоской поверхностью будем называть поверхность, если она кусочно-гладкая и $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \partial\Omega_k$, где все $\partial\Omega_k$ — плоские поверхности.

Потенциалом двойного слоя будем называть

$$W\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x)\frac{(\overrightarrow{r}, N_x)}{r^n}\, dS_x \quad \text{при} \quad n>2, \qquad W\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x)\frac{(\overrightarrow{r}, N_x)}{r^2}\, dS_x \quad \text{при} \quad n=2,$$

потенциалом простого слоя —

$$V\rho = \int\limits_{\partial\Omega} \rho(x)\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_x \quad \text{при} \quad n > 2, \qquad V\rho = \int\limits_{\partial\Omega} \rho(x)\ln\frac{1}{r}\,dS_x \quad \text{при} \quad n = 2,$$

где N_x — нормаль к $\partial\Omega$ в точке x, $\overrightarrow{r} = x - y$, $r = \|x - y\|$.

В случаях, когда необходимо подчеркнуть, что значение потенциалов простого и двойного слоев берется в точке y, будем записывать $(V\rho)(y)$ и $(W\rho)(y)$ соответственно.

Черта сверху $\overline{W}\rho$ означает прямое значение, т. е. значение, взятое в точках $\partial\Omega \setminus \theta$. При $y \in \theta$ полагаем $(\overline{W}\rho)(y) = \lim\limits_{\substack{z\to y \\ z\in\partial\Omega\setminus\theta}} (\overline{W}\rho)(z)$. Корректность подобного определения будет показана ниже.

Иногда будем записывать $W_{\partial\Omega}$, чтобы подчеркнуть область интегрирования. Если поверхность кусочно-гладкая, прямое значение в точке излома поверхности понимается в предельном смысле.

Через $G_\Omega\rho$ будем обозначать оператор, заданный интегралом $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial}{\partial\nu}G(x,y)\rho(y)\,dy$, где $G(x,y)$ — функция Грина для оператора Лапласа для множества Ω.

Будем обозначать через Φ оператор, обратный к $-\dfrac{(n-2)\omega_n}{2}I + \overline{W}$ при $n > 2$ и к $-\pi + \overline{W}$ при $n = 2$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ

В этом параграфе приводятся необходимые свойства потенциала двойного слоя, определенного на кусочно-плоской поверхности, и вытекающая из них теорема о нормальных производных.

Приведем в удобном для дальнейшего исследования виде формулировки классических результатов из теории потенциалов (см., например, [6, 7]). Начнем с предельных теорем для потенциалов. Классическая формулировка имеет следующий вид:

Теорема 1 [7, с. 65] **.** *Пусть Ω — область в R^n с границей, являющейся поверхностью Ляпунова, $\rho \in C(\partial\Omega)$. Потенциал двойного слоя непрерывен в $\overline{\Omega}$ и на $\partial\Omega$ принимает значения*

$$W\rho = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при} \quad n > 2, \qquad W\rho = -\pi\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при} \quad n = 2,$$

где ω_n — площадь n-мерного шара.

Распространение данного результата на поверхности с нерегулярной границей установлено в [6], где условие Ляпунова для поверхности заменено на

$$\sup_{\xi\in\partial\Omega}\{\operatorname{var}\omega(\xi, \partial\Omega\setminus\xi) : \xi \in \partial\Omega\} < \infty.$$

Здесь $\omega(\xi, \partial\Omega\setminus\xi)$ — функция, показывающая телесный угол, под которым видно множество $\partial\Omega\setminus\xi$ из точки ξ. Строгое ее определение дается в [6]. Кусочно-плоская поверхность удовлетворяет данному условию. Вопрос о существовании предельных значений потенциала для поверхностей с нерегулярной границей был исследован в [6]. Формулировка теоремы о предельных значениях потенциала двойного слоя по сравнению со случаем поверхности Ляпунова внешне изменений не претерпит. Но в случае кусочно-плоской поверхности под прямым значением в точках излома поверхности понимается уже предел, полученный при стремлении точки по плоским $(n-1)$-мерным кускам поверхности. Эти пределы, полученные при стремлении к одной точке по разным плоским $(n-1)$-мерным кускам поверхности, будут совпадать, т. е. имеет место теорема

Теорема 2 [6]. *Пусть $\rho \in C(\partial\Omega)$ и заданы потенциалы двойного и простого слоя на кусочно-гладкой поверхности. Тогда потенциал двойного слоя непрерывен в $\overline{\Omega}$ и на $\partial\Omega$ принимает значения*

$$W\rho = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho + \overline{W}\rho \quad \text{при} \quad n > 2, \qquad W\rho = -\pi\rho + \overline{W}\rho \quad \text{при} \quad n = 2$$

и оператор $\overline{W}$ действует из $C(\partial\Omega)$ в $C(\partial\Omega)$ непрерывно.

Рассмотрим теперь вопрос представления решения задачи Дирихле для оператора Лапласа в виде потенциала двойного слоя, заданного на кусочно-плоской поверхности.

В [6] устанавливается следующая теорема.

Теорема 3 [6]. *Пусть Ω — область в R^n и $\partial\Omega$ удовлетворяет условиям*

$$\sup_{\xi\in\partial\Omega}\{\operatorname{var}\omega(\xi,\partial\Omega\setminus\xi):\xi\in\partial\Omega\}<\infty,$$

$$\limsup_{r\to 0}\{\operatorname{var}(\omega(\xi,S\cap B_r(\xi))):\xi\in\partial\Omega\}<\frac{\omega_n}{2}, \tag{1}$$

где ω_n — площадь n-мерного шара. Тогда уравнения

$$-\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho+\overline{W}\rho=f \quad \text{при} \quad n>2, \qquad -\pi\rho+\overline{W}\rho=f \quad \text{при} \quad n=2$$

разрешимы в $C(\partial\Omega)$ относительно ρ единственным образом.

К сожалению, условию (1) удовлетворяют не все поверхности с кусочно-плоской границей. Тем не менее для дальнейших исследований будет достаточно следующей теоремы о представлении решения задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Теорема 4. *Пусть Ω — область в R^n с кусочно-плоской границей. Тогда существует конечное множество областей с кусочно-плоской границей $\{\Omega_i\}_{i=0}^m$, что $\Omega=\bigcup\limits_{i=0}^m\Omega_i$, и любое решение задачи Дирихле для оператора Лапласа представимо в виде потенциала двойного слоя на каждом Ω_i.*

Доказательство. Для представления решения задачи Дирихле достаточно выполнения для границы области условия (1), но оно удовлетворяется лишь в том случае, если все плоские куски границы образуют углы, меньшие π. В случае если плоские куски границы образуют угол больше π, область Ω можно представить в виде конечного объединения областей Ω_i с углами, меньшими π, и кусочно-плоской границей, что для любых двух точек $x\in\Omega$ и $y\in\Omega$ найдется цепочка попарно пересекающихся множеств Ω_{i_k} такая, что $x\in\Omega_{i_0}$, $y\in\Omega_{i_m}$ и $\Omega_{i_{k-1}}\cap\Omega_{i_k}\neq\varnothing$ $k=0,1,\dots m$. Решение на объединении множеств строится при помощи альтенирующего процесса Шварца [8, с. 296–302], результатом применения которого становится отыскание граничных условий на $\partial\Omega_i\setminus\partial\Omega$ для каждого множества Ω_i, при котором решение задачи Дирихле на области Ω_{i_1} будет совпадать с решением задачи Дирихле для области Ω_{i_2} на их пересечении. Каждая область Ω_i удовлетворяет (1), и решение представимо в виде потенциала двойного слоя на ней. □

Установим теперь теоремы о непрерывности производных. С этой целью введем в рассмотрение функциональное пространство.

Пусть дано замкнутое множество $\Gamma\in R^n$, $n>0$, причем $\partial\Gamma$ — кусочно-гладкая поверхность и дана последовательность открытых множеств $\{D_i\}_{i=1}^\infty$, что ∂D_i — гладкая поверхность, $D_1\subset D_2\subset D_3\ldots\subset\Gamma$ и $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^\infty D_i}=\Gamma$, $1>\lambda>0$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда определим пространство $E^{k+\lambda}(\Gamma)=$ $=\{\phi:\phi\in C(\Gamma),\phi\in C^{k+\lambda}(D_i)\quad i=1,2,3\ldots\}$ с топологией, заданной системой полунорм

$$p_0(\phi)=\|\phi\|_{C(\Gamma)},\qquad p_i(\phi)=\|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)}\quad i=1,2,\ldots\quad.$$

Построение самой топологии описывается в [9, с. 33–38]. В частности, локальную базу топологии в нулевой точке образуют множества типа $\{x:p_i(x)<\varepsilon\}$ для всякого ε.

Пространство $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$ определяется так же как и $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ с заменой $C(\Gamma)$ на $C_0(\Gamma)$: $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)=\{\phi:\phi\in C_0(\Gamma),\phi\in C^{k+\lambda}(D_i)\quad i=1,2,3\ldots\}$.

Теорема 5. *Пусть Ω — область с кусочно-плоской границей в R^n, Γ — плоская $(n-1)$-мерная поверхность и $\Gamma\subset\Omega$. Тогда оператор Φ действует непрерывно из $C(\Omega)\cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$ в $C(\Omega)\cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что оператор Φ действует непрерывно из $C(\Omega)\cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$ в $C(\Omega)\cap C^{m+\lambda}(D_i)$ для всякого i. Это тривиально следует из нулевой кривизны границы, поскольку

$$(\overline{W}_\Omega\rho)(x)=(\overline{W}_{\Omega\setminus\Gamma}\rho)(x)\quad x\in\Gamma,$$

т. е. $\overline{W}_\Omega\rho$ гладка на Γ, и нормы производных стремятся к нулю вместе с максимумом ρ. □

Лемма 1. *Пусть Λ — кусочно-плоская $(n-1)$-мерная незамкнутая поверхность в R^n и Γ — плоская $(n-1)$-мерная поверхность такова, что $\Lambda \cap \Gamma$ является $(n-2)$-мерной плоской поверхностью и Γ пересекается под углами, отличными от 0 и 2π. Тогда оператор $\dfrac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda$ действует непрерывно из $\mathrm{C}(\Lambda)$ в $L(\Gamma)$, где ν — нормаль к Γ.*

Доказательство. В точках, не лежащих на Λ, можно записать

$$\frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \rho = \int\limits_\Lambda \rho(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{(\overrightarrow{r}, N_x)}{r^n}\, dS_x = \int\limits_\Lambda \rho(x) \left(\frac{(\nu, N_x)}{r^n} - \frac{n(\overrightarrow{r}, N_x)(\overrightarrow{r}, \nu)}{r^{n+2}} \right) dS_x,$$

тогда

$$\|\frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \rho\|_{L(\Gamma)} \leqslant \|\rho\|_{C(\Lambda)} M \int\limits_{\Gamma\times\Lambda} \frac{1}{r^n}\, dx\, dy.$$

Так как поверхности $(n-1)$-мерные, то последний интеграл сходится при $n > 2$. Следовательно, в случае $n > 2$ оператор $\dfrac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda$ действует непрерывно из $C(\Lambda)$ в $L(\Gamma)$.

Доказательство для случая $n = 2$ проведем редукцией 3-мерного случая. Без ограничения общности можно полагать, что Λ и Γ пересекаются в одной точке x_0, иначе разобьем Γ на несколько отрезков. Пусть дана кривая Λ, продолжим ее до замкнутой ломаной кривой $\widetilde{\Lambda}$ так, что Γ попадет внутрь области, ограниченной $\widetilde{\Lambda}$, и продолжим на нее ρ без увеличения нормы. Зафиксируем отрезок $[0, h]$ и рассмотрим цилиндр $\widetilde{\Lambda} \times [0, h]$. Возьмем функцию $f(x, z) = (W_{\widetilde{\Lambda}}\rho)(x)$, $x \in \widetilde{\Lambda}$ и $z \in [0, h]$. Тогда $f(x, z)$ гармонична внутри области $\widetilde{\Lambda} \times [0, h]$ и существует ψ такая, что $W_{\widetilde{\Lambda}\times[0,h]}\psi = f$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\widetilde{\Lambda}\times[0,h]}\psi \right\|_{L(\Gamma)} \leqslant M_1 \|\psi\|_{C(\widetilde{\Lambda}\times[0,h])} = M_1 \|W_{\widetilde{\Lambda}}\rho\|_{C(\widetilde{\Lambda})} \leqslant M_2 \|\rho\|_{C(\widetilde{\Lambda})} \leqslant M_2 \|\rho\|_{C(\Lambda)}.$$

В то же время, по построению

$$\int\limits_{\Gamma\times[0,h]} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\widetilde{\Lambda}\times[0,h]}\psi \right| dxdz = h \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\widetilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\phi \right| dx + h \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \phi \right| dx.$$

Если x_0 не является одним из концов кривой Λ, то $\left\| \dfrac{\partial}{\partial \nu} W_{\widetilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\phi \right\|_{C(\Gamma)} < M_3 \|\phi\|_{C(\Lambda)}$. Если же x_0 — конец кривой Λ, то в случае продления ϕ константой $\phi(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0 снова имеем $\left\| \dfrac{\partial}{\partial \nu} W_{\widetilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\phi \right\|_{C(\Gamma)} < M_3 \|\phi\|_{C(\Lambda)}$. Отсюда при достаточно малых h

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \phi \right\|_{L(\Gamma)} < M \|\phi\|_{C(\Lambda)}.$$

□

В [7, с. 91–95] была приведена формула, выражающая частные производные потенциала двойного слоя, с дифференцируемой плотностью ρ в случае трехмерного пространства. Ее двумерный аналог выводится абсолютно так же и имеет следующий вид: пусть $\rho \in C^{1+\lambda}(\Omega)$, тогда в случае замкнутой кривой Ω

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W\rho = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} V \cos(N, x_i) \mathcal{D}_{y_i}\rho + W \mathcal{D}_{y_j}\rho$$

и в случае незамкнутой кривой

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W\rho = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} V \cos(N, x_i) \mathcal{D}_{y_i}\rho + W \mathcal{D}_{y_j}\rho + v \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial_{y_1}} \Big|_A^B,$$

где $\mathcal{D}_{y_i}\rho(y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial \rho_i} v \right) - \dfrac{\partial}{\partial \nu} \rho \cos(N, y_i)$, скобки означают, что взято предельное значение, N — нормаль к кривой и точки A и B — концы кривой Ω. Отметим, что $\mathcal{D}_{y_i}\rho(y)$ вычисляется для некоторого продления ρ с кривой Ω в ее окрестность, но не зависит от способа продления.

Далее, когда рассматривается функция ϕ из $E_0(\Gamma)$ на Γ_1, $\Gamma \subset \Gamma_1$ считаем ϕ доопределенной нулем.

Теорема 6. *Пусть Ω — область в R^2 с кусочно-плоской границей, Γ — отрезок, $\Gamma \subset \partial\Omega$, ν — нормаль к Γ. Оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$ действует непрерывно из $E_0(\Gamma)$ в $L(\Gamma)$. Пусть $D \subset \Gamma$ и ∂D — гладка, тогда оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$ действует непрерывно из $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$ в $C^{2+\lambda}(D)$, где $0 < \lambda < 1$. Оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$ доопределяется до оператора $\widetilde{A}$, действующего из $C_0(\Gamma)$ в $L(\Gamma)$ и из $C_0(\Gamma)$ в $C^\lambda(D)$ непрерывно.*

Доказательство. Запишем оператор в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho = \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_1 + \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_2 + \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_3,$$

где $(I-\overline{W})^{-1}\rho_1 \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$ и равно нулю на Γ, $(I-\overline{W})^{-1}\rho_2$ — гладкая на $\partial\Omega$ функция, равная $(I-\overline{W})^{-1}\rho$ на $\partial\Gamma$ и $\|(I-\overline{W})^{-1}\rho_2\|_{C^{2+\lambda}(\partial\Omega)} < M\|(I-\overline{W})^{-1}\rho\|_{C(\partial\Omega)}$, где M не зависит от ρ, $(I-\overline{W}^{-1})\rho_3 \in E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$.

Для полного доказательства теоремы достаточно показать выполнение утверждений для каждого из слагаемых. Для $(I-\overline{W})^{-1}\rho_1$ утверждение о непрерывности в пространство L справедливо ввиду теоремы 1. Остальные 2 пункта теоремы для ρ_1 очевидны.

Рассмотрим $(I-\overline{W})^{-1}\rho_2$. Обозначим $v = (I-\overline{W})^{-1}\rho_2$. Выбирая оси координат так, что ось x_1 совпадет с нормалью к Γ, представление производной двойного потенциала примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\overline{W}v = \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{W}v = -\sum\frac{\partial}{\partial x_j}V_{\Omega\setminus\Gamma}(\cos(N,x_j)\mathcal{D}_{y_j}v) + W_{\Omega\setminus\Gamma}\mathcal{D}_{y_1}v.$$

Здесь в выражениях для $\mathcal{D}_{y_j}v(y)$ в качестве функции v берется ее продление в некоторой окрестности каждого плоского участка границы $\partial\Gamma$ по нормали тождественным образом, т. е. $\mathcal{D}_{y_j}v(y) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}v$. Отсюда следует непрерывность $\dfrac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_2$ в $L(\Gamma)$ и в $C^\lambda(D)$, а также существование и непрерывность продления оператора.

Наконец рассмотрим $(I-\overline{W})^{-1}\rho_3$. Отметим, что во внутренних точках D существуют нормальные производные у Wv, поскольку v имеет непрерывные, по Гельдеру, производные [7, с. 91–95]. Положим сначала, что $(I-\overline{W})^{-1}\rho_3$ — гладкая функция. Снова возвращаясь к представлению производной потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью, на этот раз на незамкнутой поверхности получим

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\overline{W}v = v\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial_{y_1}}\bigg|_A^B = 0,$$

где A и B — концы отрезка Γ. Ввиду плотности гладких функций в пространстве непрерывных функций получаем справедливость всех трех утверждений. □

Теорема 7. *Пусть Ω — область в R^2 с кусочно-плоской границей, Γ — отрезок, $\Gamma \subset \partial\Omega$, ν — нормаль к Γ. Оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$ действует непрерывно из $E_0(\Gamma)$ в $L(\Gamma)$. Пусть $D \subset \Gamma$ и ∂D — гладка, тогда оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$ действует непрерывно из $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$ в $C^{2+\lambda}(D)$, где $0 < \lambda < 1$.*

Оператор $\dfrac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$ может быть доопределен до оператора $\widetilde{A}$, действующего из $C_0(\Gamma)$ в $L(\Gamma)$ и из $C_0(\Gamma)$ в $C^{2+\lambda}(D)$, непрерывно.

Доказательство. Доказательство следует из установленного в теоремах 4 и 6 представления решения задачи Дирихле. □

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАССОНА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Приведем определение стратифицированного множества.

Стратифицированным множеством мы называем подмножество Ω пространства $\mathbb{R}^d$, представленное в виде объединения

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{d(\Omega)} (\bigcup_{j=1}^{n(k)} \sigma_{kj}) \tag{2}$$

— конечного числа многообразий без края (стратов), σ_{kj} — подмногообразий пространства $\mathbb{R}^d$. Здесь $d(\Omega)$ — максимальная размерность входящих в Ω стратов, а $n(k)$ — количество стратов размерности k.

В обозначении σ_{kj} первый индекс показывает размерность страта, а второй — его номер при автономной, как это видно из (2), нумерации стратов данной размерности k; если первый или второй индексы являются арифметическими выражениями, мы будем использовать запятую для отделеления первого индекса от второго. Будем писать $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$, если $k > l$, и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj}$. Здесь $\partial\sigma_{kj}$ означает границу страта σ_{kj} в упомянутой выше топологии; легко видеть, что она равна разности $\overline{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$. Черта над буквой, как всегда, означает замыкание. Дополнительно предполагаем, что все σ_{ij} — плоские поверхности.

Приведем еще одно определение, необходимое для описания стратифицированных множеств.

Пусть дано стратифицированное множество Ω. Будем говорить, что страты σ_{ki} и σ_{mj} соеденены прочной цепочкой стратов $\sigma_{k_1 i_1}, \sigma_{k_2 i_2}, \ldots, \sigma_{k_p i_p}$, если выполнены следующие условия:

1) $\sigma_{k_1 i_1} = \sigma_{ki}$ и $\sigma_{k_p i_p} = \sigma_{mj}$;

2) для любого $1 \leqslant q \leqslant 1 - p$ либо $\sigma_{k_q i_q} \prec \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$, либо $\sigma_{k_q i_q} \succ \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$;

3) $|k_{q+1} - k_q| = 1$ для любого $1 \leqslant q \leqslant 1 - p$.

Отметим, что в определение не включается никаких ограничений о принадлежности стратов к границе стратифицированного множества.

Как было установлено в [1], разрешимость задачи Дирихле для оператора Лапласа на стратифицированном множестве зависит не только от гладкости многообразий, составляющих множество, и гладкости функций, входящих в состав уравнения, но и от структуры самого стратифицированного множества. С этой целью было введено понятие прочного стратифицированного множества, означающее, что любой страт можно соединить с некоторым граничным стратом σ_{mj} прочной цепочкой, причем все входящие в нее страты, кроме σ_{mj}, не являются граничными.

Так, в [3, с. 237] было высказано в качестве гипотезы достаточности для классической разрешимости условие «усиленной прочности», которое означает, что любые два страта могут быть соеденены прочной цепочкой стратов, причем только крайние страты цепочки могут принадлежать границе стратифицированного множества.

Мы на структуру множества будем налагать следующие требования:

1) любые два страта могут быть соеденены прочной цепочкой стратов;

2) для каждого страта σ_{ij} выполняется условие: если найдется страт $\sigma_{i+1,m}$, что $\sigma_{ij} \prec \sigma_{i+1,m}$, то $\partial\sigma_{i+1,m}$ является замкнутой поверхностью, ограничивающей $\sigma_{i+1,m}$, в то время как $\partial\sigma_{i+1,m} \setminus \sigma_{ij}$ замкнутой поверхностью не является. Обозначим через $P(\sigma_{ij}, \sigma_{i+1,m})$ поверхность, ограничивающую $\sigma_{i+1,m}$.

Иными словами, второе условие означает, что если страт примыкает к страту размерности на 1 больше, то он является частью поверхности, ограничивающей этот страт старшей размерности, либо, с учетом первого условия, страт не примыкает к стратам большей размерности. Существенным является и то, что граница $(i+1)$-мерного страта должна являться i-мерной поверхностью (многообразием).

Отметим также, что первое условие включает в себя условие прочности. Действительно, мы можем соединить любой страт прочной цепочкой с некоторым граничным. Если внутри цепочки содержатся граничные страты, то для удовлетворения условию прочности достаточно укоротить цепочку до первого встретившегося в ней граничного страта.

Далее будем рассматривать стратифицированные множества, удовлетворяющие введенным выше ограничениям на структуру множества, все страты которых плоские и имеют размерности не больше 2.

Приведем соображение, на основе которого строится доказательство существования решения задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа на стратифицированном множестве. Пусть решение существует, тогда его сужение на каждый страт будет являться решением задачи Пуассона для классического оператора Лапласа с краевым условием Дирихле на границе страта. Мы же будем решать обратную задачу, т. е. построим функцию, являющуюся на каждом страте решением задачи Пуассона для классического оператора Лапласа, при этом функции, задающие краевые условия Дирихле, будем подбирать таким образом, что на границах стратов будут выполняться условия трансмиссии. Данное соображение приводит к необходимости точного описания топологии функциональных пространств, которым принадлежат решения классической задачи Пуассона на области с кусочно-гладкой границей в зависимости от гладкости их сужений на границу области.

Основной проблемой является тот факт, что решение задачи Дирихле для классического оператора Лапласа, заданной на множестве с кусочно-плоской границей, может не иметь первых производных в угловых граничных точках, даже в случае гладкости на границе. Поэтому топология функциональных пространств вводится с учетом этих угловых особенностей. Отметим также, что в [10] было показано, что функция, гармоничная на стратифицированном множестве, может не иметь первых производных в угловых точках стратов, даже если эти точки не принадлежат границе стратифицированного множества.

В предыдущем параграфе были даны определения пространств $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ и $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$. По сути, эти пространства включают функции, имеющие непрерывные, по Гельдеру, производные k-го порядка во внутренних точках Γ. Аналогично вводится пространство $LE^{k+\lambda}(\Gamma) = \{\phi : \phi \in L(\Gamma), \phi \in C^{\lambda}(D_i), i = 1, 2 \ldots\}$ с топологией

$$p_0(\phi) = \|\phi\|_{L(\Gamma)}, \qquad p_i(\phi) = \|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Далее определяется пространство функций, имеющих непрерывные производные в каждой точке Γ, за исключением заранее определенного подмножества $\partial\Gamma$.

Пусть дано замкнутое множество $\Gamma \in R^n$, $n > 0$, причем $\partial\Gamma$ — кусочно-гладкая замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность, кусочно-гладкая поверхность $\Lambda \subset \partial\Gamma$ и дана последовательность замкнутых множеств $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, что ∂B_i — гладкая $(n-1)$-мерная поверхность, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots \subset \Gamma$, $\partial B_i \cap \Lambda = \varnothing$, $\partial B_i \cap \partial\Gamma \neq \varnothing$, $\partial B_1 \cap \partial\Gamma \subset B_2 \cap \partial\Gamma \subset \ldots \subset \partial\Gamma$ и $\overline{\partial\Gamma \setminus \Lambda} = \overline{\bigcup_i^{\infty}(\partial B_1 \cap \partial\Gamma)}$, $1 > \lambda > 0$, $1 > \lambda' > 0$. Тогда определим пространство $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Gamma, \Lambda) = \{\phi : \phi \in E^{2+\lambda}(\Gamma), \phi \in C^{1+\lambda'}(B_i), i = 1, 2, 3 \ldots\}$ с топологией заданной системой полунорм:

$$p_0(\phi) = \|\phi\|_{C(\Gamma)}, \qquad p_i(\phi) = \|\phi\|_{C^{2+\lambda}(D_i)} + \|\phi\|_{C^{1+\lambda'}(B_i)} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 8. *Пространства* $E^{k+\lambda}(\Gamma)$, $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Gamma, \Lambda)$, $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$, $LE^{\lambda}(\Gamma, \Lambda)$ *полные.*

Доказательство. Приведем доказательство полноты $E^{k+\lambda}(\Gamma)$. Доказательства для остальных пространств проводится аналогично. Пусть ϕ_n — фундаментальная последовательность в $E^{k+\lambda}(\Gamma)$, т. е. для каждой окрестности нуля V существует N такое, что из $n_1 > N$ и $n_2 > N$ следует $\phi_{n_1} - \phi_{n_2} \in V$. В частности, это означает фундаментальность ϕ_n в $C(\Gamma) \bigcap C^{k+\lambda}(D_i)$, поскольку множество $\{\phi : \|\phi\|_{C(\Omega)} + \|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)} < \varepsilon\}$ является окрестностью нуля в $E^{k+\lambda}(\Gamma)$, т. е. существует ψ_i, к которой ϕ_n сходится. В силу $C(\Gamma) \bigcap C^{k+\lambda}(D_i) \subset C(\Gamma) \bigcap C^{k+\lambda}(D_{i+1}) \subset \ldots$ (здесь имеется в виду топологическое вложение пространств) последовательность ψ_i стационарна в $C(\Gamma)$ и $\psi_i \in C^{k+\lambda}(D_i)$, т. е. $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi$ в поточечном смысле и $\psi \in C^{k+\lambda}(D_i)$. $\square$

Далее распространим эти пространства на стратифицированные множества.

Сначала отметим, что для стратифицированных множеств функциональное пространство может определяться как для всего множества Ω, так и отдельно для всех стратов. Например, пространство непрерывных функций можно определить как множество непрерывных на всем Ω функций и как множество функций, непрерывных на каждом страте. Поэтому везде будем придерживаться первого варианта при определении пространств на всем Ω, в противном случае будем указывать постратно принадлежность функциональным пространствам.

Пусть Ω – стратифицированное множество, $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda' < 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда определим пространства $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Omega, \partial\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\Omega), \quad \phi \in E^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{1j}),\ \phi \in E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\overline{\sigma}_{2j}, \overline{\partial\Omega} \cap \overline{\partial\sigma_{2j}})\}$, $E^{k+\lambda}(\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\Omega), \phi \in E^{k+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})\}$ и $C^{\lambda}(\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\overline{\sigma}_{ij})\}$.

Как оговаривалось ранее, $C^\lambda(\Omega)$ не подразумевает непрерывности функции на всем Ω, а означает постратную непрерывность по Гельдеру.

Согласно [3] жестким оператором Лапласа на стратифицированном множестве Ω называется следующий дифференциальный оператор:

$$\triangle U(x) = \triangle_i U(x) + \sum_{k:\sigma_{i,j}\prec\sigma_{i+1,k}} \frac{\partial}{\partial \nu_{j,k}} U, \quad x \in \sigma_{ij},$$

где $\nu_{j,k}$ — нормаль к σ_{ij}, направленная внутрь $\sigma_{i+1,k}$, $\triangle_i$ — обычный i-мерный оператор Лапласа. В нуль-мерных стратах требуется непрерывность функции U.

Постановка задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа схожа с задачей для обычного оператора Лапласа.

Пусть Ω — стратифицированное множество с непустой границей $\partial\Omega$, $1 > \lambda > 0$, $F \in C^\lambda(\Omega)$, $\psi \in C(\partial\Omega)$. Классическим решением задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа называется функция U, для которой определен жесткий оператор Лапласа в каждой точке Ω и удовлетворяющая в поточечном смысле дифференциальным соотношениям

$$\triangle U(x) = F(x), \quad x \in \operatorname{int}\Omega, \qquad U|_{x\in\partial\Omega} = \psi. \tag{3}$$

Основным результатом работы является доказательство достаточности условия, наложенного на структуру стратифицированного множества для существования решения задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа в случае размерности стратов, не превосходящих 2, в классе функций $E^{2+\lambda,1+\lambda}(\Omega,\partial\Omega)$.

С целью замены уравнения (3) интегральным введем в рассмотрение операцию продления функции, определенной на одном страте, на все стратифицированное множество.

Теорема 9. *Пусть дано стратифицированное множество Ω, некоторый страт Γ и $\phi \in C_0(\Gamma)$. Тогда существует продление $\overline{\phi}$ на все Ω, представимое на каждом страте σ_{lm} в виде*

$$G_{\sigma_{lm}} A_{l,m}\phi, \tag{4}$$

где $A_{l,m}$ — нулевой оператор, если $\sigma_{lm} \not\prec \sigma_{ij}$, действует непрерывно из $C_0(\overline{\Gamma})$ в $C(\overline{\partial\sigma_{lm}})$ и из $E_0^{n+\lambda_1}(\overline{\Gamma})$ в $E^{n+\lambda_1}(\overline{\partial\sigma_{lm}})$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda_1' < \lambda_1 < 1$, если $\sigma_{ij} \prec \sigma_{lm}$.

Доказательство. Пусть $\phi \in C_0(\overline{\Gamma})$ и Γ — страт размерности i. В качестве доопределения ϕ на страты, примыкающие к Γ, будем брать функцию, представляющую собой решение классической задачи Дирихле для оператора Лапласа, где краевое условие на Γ приравнено ϕ.

Опишем процедуру доопределения. Согласно условию на структуру стратифицированного множества либо старт Γ не примыкает к стратам большей размерности и тогда ϕ доопределяется нулем на все Ω, либо Γ примыкает к стратам размерности $i+1$. Положим $\Gamma \prec \sigma_{i+1,k}$ и $i > 0$. В этом случае доопределим ϕ нулем на $P(\Gamma,\sigma_{i+1,k})$, на все страты размерности которых не превосходят i. На произвольном страте $\sigma_{i+1,k}$ рассмотрим функцию $f = G_{\sigma_{i+1,k}}\phi$. Ввиду того что $f(x) = \phi(x)$, $x \in P(\Gamma,\sigma_{i+1,k})$, f является продлением ϕ на $\sigma_{i+1,k}$. В случае $i = 0$ страт $\sigma_{i+1,k}$ является отрезком, и в качестве оператора $G_{\sigma_{i+1,k}}\phi$ будем обозначать оператор, ставящий в соответствие значению в точке Γ линейную функцию, равную нулю на $\partial\sigma_{i+1,k}\setminus\Gamma$, т. е. оператор, разрешающий задачу Дирихле на отрезке, в одном конце которого граничное условие равно нулю. Далее таким же образом ϕ доопределяется на все страты размерностей, больших i.

Представление продленной функции ϕ следует из построения, заметим лишь, что если Γ не примыкает к некоторому страту σ_{lj}, то оператор А в этом случае равен нулю, если же Γ примыкает к σ_{lj}, то оператор A является суперпозицией операторов типа G, определенных на стратах различной размерности. Поэтому с учетом того, что размерность стратов не превосходит 2, оператор A действует из $C_0(\overline{\Gamma})$ в $C(\overline{\partial\sigma_{lj}})$ и из $E_0^{n+\lambda_1}(\overline{\Gamma},\partial\Omega)$ в $E^{n+\lambda_1'}(\overline{\partial\sigma_{lm}},\partial\Omega)$ непрерывно в силу теоремы 7. □

Теперь заменим задачу (3) другим операторным уравнением. Рассмотрим стратифицированное множество Ω и будем обозначать через $U_{i,j}$ функцию из $E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$ при $i \leqslant 1$ и $E_0^{2+\lambda,1+\lambda'}(\overline{\sigma}_{2j},\partial\Omega)$. Решение задачи (3) будем искать в виде суммы продлений $U_{i,j}$ на Ω. Положим $U = \sum\limits_{i,j}\overline{U}_{i,j}$ и подставив в (3) с учетом (4) получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} U_{l,m}+\sum_{k:\sigma_{lm}\prec\sigma_{l+1,k}}\sum_{i,j}\int\limits_{\sigma_{lm}}G_{l,m}(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{m,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy=F(x),\quad x\in\overline{\sigma}_{lm},\quad \sigma_{lm}\notin\partial\Omega,\\ U_{l,m}+\sum_{(i,j)\neq(l,m)}\overline{U}_{i,j}(x)=\phi_{l,m}(x),\quad x\in\overline{\sigma}_{lm},\quad \sigma_{lm}\in\partial\Omega, \end{gathered}\tag{5}$$

где $\phi_{l,m}\in C_0(\overline{\sigma}_{lm})$ и сумма всех продлений $\phi_{i,j}$ на страт σ_{lm} равна $\phi|_{x\in\sigma_{lm}}$. Данные преобразования были осуществлены формальным образом и для их строгого обоснования потребуется приведенная ниже лемма.

Лемма 2. *Пусть $G(x,y)$ — функция Грина задачи Пуассона для одномерного оператора Лапласа на отрезке Ω. Тогда оператор, задаваемый формулой $\int\limits_{\Omega}G(x,y)\phi(y)\,dy$, действует из $LE^{\lambda}(\Omega)$ в $C^1(\Omega)$ и из $LE^{k+\lambda}(\Omega)$ в $E^{k+2+\lambda}(\Omega)$ непрерывно, где $1>\lambda>0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Omega=[0,1]$. Покажем сначала непрерывность из $LE^{\lambda}(\Omega)$ в $E^{2+\lambda}(\Omega)$. Пусть $\phi_n\in LE^{\lambda}(\Omega)$ и $\phi_n\to\phi$. Тогда $\int\limits_{\Omega}G(x,y)\phi_n(y)\,dy$ — непрерывная по x функция. Поскольку ϕ_n непрерывна во внутренности Ω, достаточно установить, что $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy=0$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy=\lim_{x\to 0}\int\limits_0^x y(1-x)\phi(y)\,dy+\lim_{x\to 0}x\int\limits_x^1(1-y)\phi(y)\,dy=0.$$

Подобные оценки получаются и для случая $x\to 1$

Непрерывность оператора в $C[0,1]$ следует из равномерной ограниченности функции Грина.

$$\left|\int\limits_0^1 G(x,y)(\phi_n(y)-\phi(y))\,dy\right|\leqslant\int\limits_0^1 G(x,y)|\phi_n(y)-\phi(y)|\,dy\leqslant M\int\limits_0^1|\phi_n(y)-\phi(y)|\,dy.$$

Непрерывность в $C^{k+\lambda}(D_i)$ следует из аналогичного результата для непрерывных на $[0,1]$ функций. Покажем теперь непрерывность из $LE^{\lambda}(\Omega)$ в $C^1(\Omega)$. Пусть $x\in(0,1)$, тогда

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy=\int\limits_0^1\frac{d}{dx}G(x,y)\phi(y)\,dy$$

ввиду непрерывности ϕ. Существование производной в точках 0 и 1 устанавливается непосредственно.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy=\frac{1}{x}\int\limits_0^x y(1-x)\phi(y)\,dy+\int\limits_x^1(1-y)\phi(y)\,dy.$$

Поскольку $y\int\limits_0^y\phi(z)dz$ — абсолютно непрерывна и $\phi(y)=\dfrac{d}{dy}\int\limits_0^y\phi(z)$ почти всюду на $[0,1]$, то первое слагаемое можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x y(1-x)\phi(y)\,dy=\frac{1-x}{x}\left(y\int\limits_0^y\phi(z)dz\Bigg|_0^x-\int\limits_0^x\int\limits_0^y\phi(z)dz\,dy\right),$$

т. е. $\left|\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x y(1-x)\phi(y)\,dy\right|<M\int\limits_0^x|\phi(y)|\,dy$. Откуда следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy=\int\limits_0^1(1-y)\phi(y)\,dy=\lim_{x\to 0}\int\limits_0^1\frac{d}{dx}G(x,y)\phi(y)\,dy.$$

Непрерывность оператора $\int\limits_0^1 G(x,y)\phi(y)\,dy$ в $C^1[0,1]$ вытекает из равномерной ограниченности $dG(x,y)/dx$. □

Теорема 10. *Пусть Ω — стратифицированное множество со стратами, размерностью не больше 2. Тогда если функции $U_{l,m}$ разрешают задачу*

$$U_{l,m} + \sum_{k:\sigma_{lm}\prec\sigma_{l+1,k}} \sum_{ij} \int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{m,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy = F(x), \quad x\in\overline{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm}\notin\partial\Omega,$$

$$U_{l,m} + \sum_{(i,j)\neq(l,m)} \overline{U}_{i,j}(x) = \psi_{l,m}(x), \quad x\in\overline{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm}\in\partial\Omega,$$

где $U_{l,m}\in E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{lm})$, если $\sigma_{lm}\notin\partial\Omega$, $U_{l,m}\in C_0(\overline{\sigma}_{lm})$, если $\sigma_{lm}\in\partial\Omega$, $F\in C^{2+\lambda}(\Omega)$ и $\phi\in C(\partial\Omega)$, то $\sum\limits_{i,j}\overline{U}_{i,j}$ разрешает задачу Пуассона

$$\triangle U(x) = \triangle F(x), \quad x\in\operatorname{int}\Omega, \qquad U|_{x\in\partial\Omega} = \psi,$$

где $\phi_{l,m}\in C_0(\overline{\sigma}_{lm})$ и сумма всех продлений $\phi_{i,j}$ на страт σ_{lm} равна $\phi|_{x\in\sigma_{lm}}$.

Доказательство. В силу теоремы 9 и лемм 2 и 1 оператор $\int\limits_{\sigma_{1m}} G_{l,m}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial\nu_{2,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy$ на стратах единичной размерности определен и непрерывно действует в $E_0(\overline{\sigma}_{1m})$. На двумерных стратах слагаемые типа $\int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial\nu_{l+1,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy$ отсутствуют, так как страты имеют размерность не больше 2. Таким образом, все необходимые производные существуют. Тот факт, что $\sum\limits_{i,j}\overline{U}_{i,j}$ разрешает задачу Пуассона для жесткого оператора Лапласа проверяется непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение. □

Для доказательства тривиальности решения однородной задачи (5) нам потребуется ввести ряд определений, связанных с теорией функций на стратифицированных множествах. Их систематическое изложение и необходимые обоснования содержатся, например, в [3, 11–13].

Пусть Ω стратифицированное множество вложено в R^n. Стратифицированным шаром $B_r(x)$ с центром $x\in\Omega$ радиуса r называется множество $D_r(x)\cap\Omega$, где $D_r(x)$ — шар радиуса r в R^n.

Стратифицированной мерой μ называется такая мера, которая для $\omega\subset\Omega$

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ij}} \mu_{i,j}(\omega\cap\sigma_{ij}),$$

где $\mu_{i,j}$ — мера Лебега, заданная на стратах σ_{ij}, стратифицированного множества Ω.

Пространства $L_\mu(\Omega)$ и $L_\mu^2(\Omega)$ — соответственно пространства суммируемых и суммируемых с квадратом функций по мере μ.

Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство гладких на Ω функций u таких, что $\operatorname{supp} f\subset\operatorname{int}\Omega$.

Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение из $L_\mu^2(\Omega)$.

Пространство $H_{0\mu}^1(\Omega)$ обозначает пополнение $C_0^1(\Omega)$ по норме $\|u\| = \left(\int\limits_{\operatorname{int}\Omega}(\nabla u)^2 d\mu\right)^{1/2}$. Подробное построение этого пространства содержится в [1].

Лемма 3. *Пусть $\{U_{i,j}\}$ — решение однородного уравнения* (5). *Тогда для функции $U=\sum_{i,j}\overline{U}_{i,j}$ и для любой $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ справедливо тождество*

$$(\Delta U,\phi) = (U,\Delta\phi) = 0.$$

Доказательство. Сначала исследуем гладкость U. Ввиду того что рассматриваем однородное уравнение (5) и леммы 2, имеем $u\in C^1(\overline{\sigma}_{1j})\bigcap C^2(D_{i,j})$, где $D_{i,j}$ — любой отрезок вложенный в σ_{1j}. На двумерных стратах имеем только $u\in C(\overline{\sigma}_{2j})\bigcap C^2(B_{i,j})$, где $B_{i,j}$ строится так же как B_i в определении пространства $E^{2+\lambda,1+\lambda'}(\overline{\sigma}_{2j},\Gamma)$, если положить Γ объединением замыканий одномерных стратов, входящих в границу σ_{2j}. Факт непрерывности вторых производных в $B_{i,j}\cap\sigma_{2j}$ следует из того, что $U_{i,j}\in C^{2+\lambda}B_{i,j}\cap\partial\sigma_{2j}$ и модификации теоремы о непрерывности производных потенциала двойного слоя с плотностью, имеющей непрерывные, по Гельдеру, производные [7, с. 123–127] (модификация заключается в применении доказательства теоремы не ко всей поверхности Ляпунова, а только к такой гладкой части кусочно-гладкой поверхности, минимальное расстояние от которой до точек потери гладкости исходной поверхности строго больше нуля). Можно построить функции $\phi_i \in \bigcup_j C(\sigma_{2j})$, что $\phi_i(x) < M\phi$ (M не зависит от i) и

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_i(x) = \phi(x), & x \in \sigma_{ij}, i = 0, 1, \\ \phi_i(x) = \phi(x), & x \in B_{k,j} \subset \sigma_{ij}, \\ \phi_i(x) = 0, & x \in \sigma_{ij} \setminus B_{k+1,j}. \end{cases}$$

Тогда к функциям $\phi_i \nabla U$ и $U \nabla \phi_i$ применима теорема о дивергенции для стратифицированных множеств. Полное обоснование этого очень громоздко, укажем то, что доказательство этой теоремы приведенное [3, с. 225–226] останется справедливым для функций на двумерных стратах, имеющих непрерывные вторые производные, а на одномерных принадлежности классу $C^1(\overline{\sigma}_{1j}) \bigcap C^2(D_{i,j})$, ввиду того что степени гладкости на одномерных стратах достаточно для применения классической теоремы о дивергенции, принимающей вид формулы Ньютона – Лейбница.

Далее, повторяя вывод первой формулы Грина для стратифицированных множеств [3, с. 241–242], получаем два тождества

$$\int\limits_{\operatorname{int}\Omega} U \Delta \phi_i d\mu = -\int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \nabla \phi_i \nabla U d\mu,$$

$$\int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \phi_i \Delta U d\mu = -\int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \nabla \phi_i \nabla U d\mu - \int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \{\phi_i, (\nu, \nabla U)\} d\mu,$$

где $\{\phi_i, (\nu, \nabla U)\}$ — сумма скачков функции ϕ_i при переходе со стратов $\sigma_{i+1,j}$ на страт σ_{ik}, $\sigma_{i+1,j} \succ \sigma_{ik}$, а ν — нормаль к страту σ_{ik}, направленная внутрь σ_{ij}. Устремляя i к бесконечности, получаем

$$\lim_{i \to \infty} \int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \{\phi_i, (\nu, \nabla U)\} d\mu = 0,$$

ввиду того что $\phi_i(x) < M\phi$ и $\phi_i(x) \to \phi$ почти всюду. Учитывая, что $\Delta U = 0$ почти всюду на Ω, получаем окончательно

$$\int\limits_{\operatorname{int}\Omega} U \Delta \phi_i d\mu = \int\limits_{\operatorname{int}\Omega} \phi_i \Delta U d\mu = 0. \qquad \square$$

Лемма 4. *Однородное операторное уравнение* (5) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $\{U_{i,j}\}$ являются решением однородной задачи (5). Обозначим $U = \sum_{i,j} \overline{U}_{i,j}$. В [1] была установлена слабая разрешимость задачи Пуассона для уравнения Лапласа. Но в силу того что частные производные U не обязаны принадлежать $L^2_\mu(\Omega)$, мы не можем утверждать, что U будет слабым решением. Тем не менее мы можем рассматривать U как решение в смысле обобщенных функций. Более того с силу леммы 3 имеем $(\Delta v, \varphi) = (v, \Delta\varphi) = 0$, где $v, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Положим, что $U(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \operatorname{int}\Omega$. Без ограничения общности можно полагать, что $U(x_0) = 1$, в противном случае необходимо умножить U на соответствующее число. Так как U — непрерывная функция, то существует стратифицированный шар $B_r(x_0)$, внутри которого $U(x) > 1/2$. Пусть f такая функция, что $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} f \subset B_r(x_0)$ и $f(x) \geqslant 0$. Тогда существует слабое решение $\Delta v = f$, $v \in H^1_{0\mu}(\Omega)$. Так как $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $H^1_{0\mu}(\Omega)$ по норме пространства $L^2_\mu(\Omega)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\|\Delta\overline{v}_\varepsilon - f\|_{L^2_\mu(\Omega)} < \varepsilon$, где $\overline{v}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда получаем

$$(U, \Delta\overline{v}_\varepsilon) = (U, f) - (U, \Delta\overline{v}_\varepsilon - f) = 0.$$

С одной стороны, имеем $(U, f) \geqslant \dfrac{1}{2}\|f\|_{L_\mu(\Omega)}$, с другой, $(U, \Delta\overline{v}_\varepsilon - f) < \varepsilon\|U\|_{L^2_\mu(\Omega)}$, что при малом ε дает противоречие. Таким образом, $U \equiv 0$.

Положим теперь, что некоторое $U_{i,j}$ отлично от нуля. Если страт нуль-мерный, то противоречие получаем сразу из того, что на нуль-мерном страте отлично от нуля по построению только одно слагаемое $U_{i,j}$. Если страт не нуль-мерный, то в силу того что $U_{k,m}(x)=0$ при $x\in\partial\sigma_{km}$, имеем

$$\sum_{i,j}\overline{U}_{i,j}(x)\Big|_{x\in\sigma_{ij}}=\sum_{l<i,j}\overline{U}_{l,j}(x)+U_{i,j}(x)=0,\qquad U_{i,j}(x)=-\sum_{l<i,j}\overline{U}_{l,j}(x).$$

Так как все продления $\overline{U}_{l,j}$ по построению — гармонические функции на стратах, на которые они были доопределены, то $U_{i,j}$ гармонична в σ_{ij}, а так как $U_{i,j}(x)|_{x\in\partial\sigma_{ij}}\equiv 0$, то $U_{i,j}\equiv 0$. □

Теперь приведем теорему, описывающую условия разрешимости операторных уравнений в пространствах с топологией заданной счетной системой полунорм.

Теорема 11. *Пусть дано замкнутое множество $\Omega\subset R^n$ и замкнутые множества D_i такие, что $D_1\subset D_2\subset\ldots\subset\Omega$ и $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}D_i}=\Omega$. Пусть даны $E(\Omega)$ и $F(\Omega)$ — банаховы пространства функций, действующих из Ω в R^1, $\|\cdot\|_{F(\Omega)}\geqslant M\|\cdot\|_{E(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{F(D_1)}\leqslant M_2\|\cdot\|_{F(D_2)}\leqslant\ldots\leqslant M_i\|\cdot\|_{F(D_i)}\leqslant\ldots$ Если оператор A действует из $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ в $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ непрерывно, операторное уравнение $(I+A)\psi=0$ имеет только тривиальное решение и оператор A допускает представление $A=L_i+B_i$, где $I+L_i$ непрерывно обратим в $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$, оператор B_i вполне непрерывно действует из $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$ в $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$ и оператор L_i+B_i непрерывно действует из $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$ в $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$, тогда $I+A$ непрерывно обратим в $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$*

Доказательство. Сделаем следующие преобразования

$$(I+A)\psi=f\quad\Rightarrow\quad(I+L_i+B_i)\psi=f\quad\Rightarrow\quad(I+(I+L_i)^{-1}B_i)\psi=(I+L_i)^{-1}f.$$

Оператор $(I+L_i)^{-1}B_i$ компактно действует из $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$. Оператор $I+(I+L_i)^{-1}B_i$ обратим в $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$, так как оператор L_i+B_i из $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$ в $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ действует непрерывно и $\ker(I+L_i+B_i)=\ker(I+(I+L_i)^{-1}B_i)=\{0\}$. Возьмем множество ψ_i как решения уравнений

$$(I+(I+L_i)^{-1}B_i)\psi=(I+L_i)^{-1}f.$$

Снова в силу непрерывности оператора L_i+B_i из $E(\Omega)\bigcap F(D_i)$ в $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ имеем $\psi_i\in E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$, так как $f\in E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ и в силу единственности решения $\psi_1=\psi_2=\ldots$ в пространстве $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$. Таким образом, существует $(I+A)^{-1}$. Непрерывность его следует из полноты $E(\Omega)\bigcap\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(D_i)$ и теоремы об открытом отображении для топологических векторных пространств [9, с. 58–60]. □

Теперь сформулируем в виде теоремы основной результат работы.

Теорема 12. *Пусть дано стратифицированное множество Ω, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) все страты плоские и размерность каждого не превосходит 2;

2) $\partial\Omega\neq\varnothing$;

3) любые два страта могут быть соеденены прочной цепочкой стратов;

4) если страт σ_{1m} такой, что $\sigma_{1j}\prec\sigma_{2m}$, то $\partial\sigma_{2m}$ является замкнутой кривой, содержащей σ_{1j}, а $\partial\sigma_{2m}\setminus\sigma_{1j}$ замкнутой кривой не является.

Тогда задача Пуассона для жесткого оператора Лапласа

$$\triangle U(x)=f(x),\quad x\in\operatorname{int}\Omega,\qquad U|_{x\in\partial\Omega}=\psi,\tag{6}$$

где $1>\lambda>0$, $f\in C^{\lambda}(\Omega)$, $\psi\in C(\partial\Omega)$, разрешима единственным образом в классе функций $E^{2+\lambda,1+\lambda'}(\Omega,\partial\Omega)$ и решение представляется в виде $U=\sum\limits_{i,j}\overline{U}_{i,j}$, где $U_{i,j}\in E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$ для $i\leqslant 1$ и

$E_0^{2+\lambda,1+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij}, \partial\Omega)$ *для* $i = 2$, *если* $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$ *и* $U_{i,j} \in C_0(\overline{\sigma}_{ij})$, *если* $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$. *Функции* $U_{i,j}$ *являются решением следующего операторного уравнения:*

$$U_{l,m}(x) + \sum_{k:\sigma_{l,k} \prec \sigma_{lm}} \sum_{i,j} \int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{m,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy = F(x), \quad x \in \sigma_{lm}, \sigma_{lm} \notin \partial\Omega, \quad F \in C^{2+\lambda}(\sigma_{lm}),$$

$$U_{l,m}(x) + \sum_{(i,j)\neq(l,m)} \overline{U}_{i,j}(x) = \phi(x), \quad x \in \sigma_{lm}, \sigma_{lm} \in \partial\Omega, \tag{7}$$

и для решения U *задачи* (6) *имеет место оценка норм*

$$\|U\|_{C(\Omega)} \leqslant M\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N\|f\|_{C(\Omega)}, \qquad \|U\|_{C^{2+\lambda}(D_k^{i,j})} \leqslant M_k\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N_k\|f\|_{C^\lambda(\Omega)},$$

$$\|U\|_{C^{1+\lambda}(B_k^{2,j})} \leqslant M_k\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N_k\|f\|_{C^\lambda(\Omega)},$$

где множества $D_k^{i,j} \subset \sigma_{ij}$ *и* $B_k^{2,j} \subset \sigma_{2j}$ *взяты из определений пространств* $E^{2+\lambda}(\sigma_{ij})$ *и* $E^{2+\lambda,1+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij}, \partial\Omega)$.

Доказательство. Достаточно в силу теоремы 10 доказать разрешимость задачи (7). Заметим, что на стратах σ_{lm}, не примыкающих к стратам большей размерности и не являющихся граничными, после применения к ним оператора Лапласа операторные уравнения примут вид

$$\triangle U_{l,m} = \triangle F(x),$$

и тем самым их можно исключить из рассмотрения, выразив $U_{l,m}$ через функцию Грина. Рассмотрим страт $\sigma_{lm} \notin \partial\Omega$. В силу представления (4) для $\overline{U}_{i,j}$, теоремы 7, если $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$, или леммы 1, если $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$, и леммы 2 получаем, что операторы, заданные формулой $\int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{l-1,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy$, действуют непрерывно из $E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$ в $E_0^{4+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$. Введем последовательность непрерывных на σ_{lm} функций $I_{l,m}(D_k, y)$, равных 1 на D_k и равных 0 на $\sigma_{lm} \setminus D_{k+1}$, и рассмотрим оператор, задаваемый формулой

$$\int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)I_{l,m}(D_k,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{m,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy.$$

В силу теоремы 7 существует его продолжение на $C_0(\overline{\sigma}_{ij})\bigcup C^{2+\lambda}(D_p)$.

Далее, оператор $\int\limits_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y)I_{l,m}(D_k,y)\frac{\partial}{\partial\nu_{l-1,k}}\overline{U}_{i,j}(y)\,dy$ действует из $C_0(\overline{\sigma}_{ij})$ в $C_0(\overline{\sigma}_{lm})$ вполне непрерывно, в силу того что оператор, порождаемый функцией Грина, вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций. Полная непрерывность в $E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$ следует из компактности вложения $C^4(\Gamma)$ в $C^3(\Gamma)$. В довершении отметим, что непосредственными выкладками показывается для функции Грина одномерного оператора Лапласа, что последовательность операторов $\int\limits_{\Gamma} G_{l,m}(x,y)I_{l,m}(D_k,y)\psi(y)\,dy$ сходится к $\int\limits_{\Gamma} G_{l,m}(x,y)\psi(y)\,dy$ в $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$. Тогда перенумеруем все страты одним индексом k вместо двойного и определим пространство $F(\Omega)$ как прямое произведение пространств $E_0^{2+\lambda}(\overline{\sigma}_{ij})$, если $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$ и $C_0(\overline{\sigma}_{ij})$, если $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$. D_r^k будет обозначать $D_r \subset \sigma_k$. Пространство $F(\Omega)$ является полным. Через $F^{2+\lambda}(D_r)$ будем обозначать пространство, образованное прямым произведением пространств $C_0(\sigma_k)$ и $C^{2+\lambda}(D_r^k)$, если $\sigma_k \notin \partial\Omega$, взятых по всем k. Пространство $F^{2+\lambda}(D_r)$ является банаховым. Уравнения (7) запишутся в виде

$$\rho + \Psi\rho = F,$$

где $\Psi\rho = A_r\rho + B_r\rho$ и $\rho = (U_1, U_2, \ldots, U_t)$. Если $\sigma_k \in \partial\Omega$, то $A_r = 0$, и имеем $B_rU = \sum\limits_{i\neq r,} \overline{U}_i$. Если $\sigma_k \notin \partial\Omega$, то получаем уравнения

$$A_rU = \sum_{i\in\{i:\sigma_i\prec\sigma_k\}} \sum_j \int\limits_{\sigma_k} G_k(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_i}\overline{U}_j(y)\,dy - \sum_{i\in\{i:\sigma_i\prec\sigma_k\}} \sum_j \int\limits_{\sigma_k} G_k(x,y)I_k(D_r^k,y)\frac{\partial}{\partial\nu_i}\overline{U}_j(y)\,dy,$$

и тогда

$$B_r U = \sum_{i \in \{i : \sigma_i \prec \sigma_k\}} \sum_j \int_{\sigma_k} G_k(x,y) I_k(D_r^k, y) \frac{\partial}{\partial \nu_i} \overline{U}_j(y)\, dy.$$

По построению все B_r вполне непрерывны в $F^{2+\lambda}(D_n)$ для $n \leqslant r$, A_r просто непрерывны в $F^{2+\lambda}(D_n)$. Более того, A_r сходится к нулю в $F^{2+\lambda}(D_n)$ при $r \to \infty$. Тогда для каждого n найдется такое r, что операторная норма $\|A_r\|_{F^{2+\lambda}(D_n)} < 1$ и, следовательно, $I + A_r$ обратим. Тогда в силу теоремы 12 непрерывно обратим $I + \Psi$, тем самым доказывая существование решения (7).

Оценки решения задачи (6) вытекают из непрерывной обратимости $I + \Psi$ в $F^{2+\lambda}(\Omega)$ и из того, что $F(x) = \int\limits_{\sigma_{ij}} G_{i,j}(x,y) f(y)\, dy$. $\square$

Библиографический список

1. *Пенкин О. М., Богатов Е. М.* О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 6. С. 874–886.
2. *Nicaise S., Penkin O. M.* Poincare'-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. of Math. Anal. and Appl. 2004. Vol. 296, № 2. P. 504–520.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. 272 с.
4. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1998. Т. 250. С. 203–218.
5. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Исправления к статье «Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов» // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 324. С. 129–130.
6. *Бураго Ю. Д., Мазья В. Г.* Многомерная теория потенциалов и решение краевых задач для областей с нерегулярными границами // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1967. Вып. 3. С. 5–86.
7. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М. : Физматлит, 1953. 415 с.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики : в 2 т. М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1945. Т. 2. 620 с.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 443 с.
10. *Nicaise S., Sanding A. M.* Transmission problems for the laplace and elasticity operators: Regularity and boundary integral formulation // Math. Model and Methods in Appl. Sci. 1999. Vol. 9. P. 855–898.
11. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1107–1113.
12. *Gavrilov A. A., Nicaise S., Penkin O. M.* Poincaré's inequality on stratified sets and applications // Evolution Equations : Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics (Levico Terme, 2000) : Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Basel : Birkhäuser, 2003. Vol. 55. P. 195–213.
13. *Penkin O. M.* About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures (Luminy, 1999). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. / eds. F. Ali Mehmeti, J. von Belov, S. Nicaise. N. Y. : Marcel Dekker, 2001. Vol. 219. P. 183–191.

УДК 517

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ МИНИМУМА ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: shaspoteha@mail.ru

В работе получено необходимое условие экстремума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса.

Ключевые слова: функционал, необходимое условие, интеграл Стилтьеса, производная по мере.

On a Necessary Condition of at Least one Quadratic Functional with an Integral Stieltjes

S. A. Shabrov

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: shaspoteha@mail.ru

In this paper is obtained a necessary condition for an extremum of a quadratic functional with a Stieltjes integral.

Key words: functional, a necessary condition, Stieltjes integral, derivative on the measure.