УДК 539.3+514.4

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ КРАЕВ ОБОЛОЧКИ

Л. В. Бессонов

Старший преподаватель кафедры прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lexx@sgu.ru

В статье исследуется модель Кармана для случая прямоугольной в плане оболочечной конструкции с жестким закреплением краев. Построена ортонормированная система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Решение модельной задачи получено методом В. В. Петрова — методом последовательного возмущения параметров — с использованием построенной системы базисных функций. Приведены решения с опорными промежуточными результатами для оболочечной конструкции, исполненной из катанного дюралюминия.

Ключевые слова: оболочечная конструкция, численный эксперимент, модель Кармана, метод последовательного возмущения параметров.

В работе впервые предложено использование ортонормированной системы функций, удовлетворяющей граничным условиям жесткого закрепления оболочечной конструкции, при расчёте напряжённо-деформированного состояния методом последовательного возмущения параметров [1–3]. На каждом шаге линеаризации исходной нелинейной задачи используется метод Бубнова – Галёркина, который в отличие от приводимых ранее в работе [4] вычислениях использует ортонормированную систему, удовлетворяющую граничным условиям, что позволяет повысить скорость вычислений.

Результаты вычислений говорят о том, что в случае оболочечной конструкции с жестким закреплением по краям не наблюдается потери устойчивости конструкции в целом. Стоит отметить, что ранее этот факт был теоретически получен в работе [5].

Проиллюстрируем указанный во введении метод на примере геометрически нелинейной модели Кармана для прямоугольной в плане оболочки с жёстким закреплением краёв:

$$\begin{cases} D\Delta^2 W - L(W,F) - \Delta_k F = q, \\ \dfrac{1}{E}\Delta^2 F = -\dfrac{1}{2}L(W,W) - \Delta_k W, \\ W|_\Gamma = F|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial W}{\partial \bar\eta}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \bar\eta}\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, определяемая по формуле $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (ν — коэффициент Пуассона), Δ — оператор Лапласа, $L(W,F) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ — отражает гауссову кривизну деформированной серединной поверхности оболочки, $\Delta_k = k_y\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, k_x и k_y характеризуют кривизну поверхности оболочки вдоль соответствующих осей, q — величина нормальной нагрузки, W — функция прогиба, F — функция усилий, E — модуль Юнга.

На практике характеристику решений нелинейной модели (1) получают на основании решений системы нелинейных уравнений, которые получаются путём приведения уравнений (1) к безразмерному виду. Переход от системы (1) к системе уравнений в безразмерном виде осуществляется путём следующей замены переменных:

$$x = L\overline{x}, \qquad y = R\overline{y}, \qquad W = H\overline{w}, \qquad F = EH^2\overline{F}, \qquad k_y = \overline{K_y}\frac{EH^4}{L^2R^2}\overline{q},$$

$$\overline{q} = \overline{q}_1\overline{K}_y^2, \qquad \lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Как показано в [6], соответствующая система уравнений в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^2\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)= \\ =\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+K_y\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+qK_y^2, \\ \left(\dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^2\dfrac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-K_y\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w=\dfrac{\partial w}{\partial x}=F=\dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \ \text{ при } \ x=0,\ x=1. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что в системе (2) используются те же обозначения для искомых функций и параметров, что и в системе (1). Будем считать в дальнейшем, что параметры кривизны $K_x = 0$, $K_y = 15$, коэффициент соотношения сторон $\lambda = 2$, а коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, что соответствует катанному дюралюминию [7].

Построим линейно независимую систему функций, определенных в области $D = [0,1] \times [0,1]$ и удовлетворяющих граничным условиям задачи Коши (2). С этой целью введём следующую вспомогательную функцию:

$$\phi(x,y) = (xy(x-1)(y-1))^2.$$

Определим систему функций $\{p_{i,j}(x,y)\}$ следующим образом:

$$\mathscr{P} = \{p_{i,j}(x,y) : p_{i,j}(x,y) = \phi(x,y)x^i y^j\}, \qquad i \in \mathbb{N}_+, \qquad j \in \mathbb{N}_+.$$

Обозначим через $\mathscr{P}_k$ подмножество $\mathscr{P}$, состоящее из $p_{i,j}$, где $i = \overline{0,k-1}$, $j = \overline{0,k-1}$.

Выполним процедуру понижения размерности мультииндекса. Сведём мультииндекс (i,j) системы функций $\mathscr{P}_k$ к одномерному индексу m. Для этого в качестве первого элемента возьмём новую систему функций $p_{0,0}(x,y)$. Считая, что $\mathscr{P}_k$ — квадратная матрица порядка k, будем брать угловые миноры этой матрицы, исключая из них элементы, уже находящиеся в новой системе. Таким образом, новая система образуется из серий элементов $\mathscr{P}_k$. В таблице отмечены номера серий, в которые попадают исходные элементы $\mathscr{P}_k$. Для определенности внутри серии будем упорядочивать элементы сначала по убыванию номера столбца, а затем по возрастанию номера строки. Образованную в результате систему функций с непрерывной нумерацией по одномерному индексу обозначим $\mathscr{R}_k$.

$i \backslash j$	1	2	3	$\cdots$	k
1	1	2	3	$\cdots$	k
2	2	2	3	$\cdots$	k
3	3	3	3	$\cdots$	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
k	k	k	k	$\cdots$	k

Легко видеть, что система функций $\mathscr{R}_k$ является линейно независимой в области, ограниченной Γ для любого произвольного целого k. Действительно, каждая функция r_k представляет собой произведение двух элементов линейно независимых систем функций.

При построении приближённого решения задачи (2) ограничимся системой полиномок $\mathscr{R}_3$. Выполним процедуру понижения размерности мультииндекса для $\mathscr{P}_3$ и запишем получившиеся функции системы $\mathscr{R}_3$ в явном виде:

$$\begin{aligned}
r_0(x,y) = p_{0,0}(x,y) &= x^4y^4 - 2x^4y^3 + x^4y^2 - 2x^3y^4 + 4x^3y^3 - 2x^3y^2 + x^2y^4 - 2x^2y^3 + x^2y^2,\\
r_1(x,y) = p_{0,1}(x,y) &= x^4y^5 - 2x^4y^4 + x^4y^3 - 2x^3y^5 + 4x^3y^4 - 2x^3y^3 + x^2y^5 - 2x^2y^4 + x^2y^3,\\
r_2(x,y) = p_{1,0}(x,y) &= x^5y^4 - 2x^5y^3 + x^5y^2 - 2x^4y^4 + 4x^4y^3 - 2x^4y^2 + x^3y^4 - 2x^3y^3 + x^3y^2,\\
r_3(x,y) = p_{1,1}(x,y) &= x^5y^5 - 2x^5y^4 + x^5y^3 - 2x^4y^5 + 4x^4y^4 - 2x^4y^3 + x^3y^5 - 2x^3y^4 + x^3y^3,\\
r_4(x,y) = p_{0,2}(x,y) &= x^4y^6 - 2x^4y^5 + x^4y^4 - 2x^3y^6 + 4x^3y^5 - 2x^3y^4 + x^2y^6 - 2x^2y^5 + x^2y^4,\\
r_5(x,y) = p_{1,2}(x,y) &= x^5y^6 - 2x^5y^5 + x^5y^4 - 2x^4y^6 + 4x^4y^5 - 2x^4y^4 + x^3y^6 - 2x^3y^5 + x^3y^4,\\
r_6(x,y) = p_{2,0}(x,y) &= x^6y^4 - 2x^6y^3 + x^6y^2 - 2x^5y^4 + 4x^5y^3 - 2x^5y^2 + x^4y^4 - 2x^4y^3 + x^4y^2,\\
r_7(x,y) = p_{2,1}(x,y) &= x^6y^5 - 2x^6y^4 + x^6y^3 - 2x^5y^5 + 4x^5y^4 - 2x^5y^3 + x^4y^5 - 2x^4y^4 + x^4y^3,\\
r_8(x,y) = p_{2,2}(x,y) &= x^6y^6 - 2x^6y^5 + x^6y^4 - 2x^5y^6 + 4x^5y^5 - 2x^5y^4 + x^4y^6 - 2x^4y^5 + x^4y^4.
\end{aligned}$$

Проведём процесс ортогонализации Гильберта – Шмидта для $\mathscr{R}_3$, а затем нормализацию построенных таким образом многочленов:

$$\widehat{\mathscr{R}}_3 = \left\{\hat{r}_m(x,y) : \hat{r}_m(x,y) = \frac{\tilde{r}_m(x,y)}{\|\tilde{r}_m(x,y)\|_{L_2}},\ \tilde{r}_0(x,y) = r_0,\ \tilde{r}_m(x,y) = r_m - \sum_{j=0}^{m-1} \langle r_m, r_j\rangle r_m(x,y)\right\}, \quad (3)$$

где $\langle \cdot,\cdot\rangle$ обозначает

$$\langle u,v\rangle = \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y)v(x,y)dxdy}{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(x,y)v(x,y)dxdy}. \quad (4)$$

Система функций $\widehat{\mathscr{R}}_3$ является ортонормированной. В формулах (3) и (4) двойной интеграл по области D заменён на повторный по отрезкам $[0;1]$ соответствующих координатных осей, так как несложно видеть, что многочлены r_m удовлетворяют теореме Тонелли – Фубини.

Выпишем полученную систему функций $\widehat{\mathscr{R}}_3$ в явном виде:

$$\hat{r}_0(x,y) = 630x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2,$$
$$\hat{r}_1(x,y) = 1260\sqrt{11}(x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_2(x,y) = 1260\sqrt{11}(x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_3(x,y) = 27720x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 13860x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 -$$
$$-13860x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 6930x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2,$$
$$\hat{r}_4(x,y) = 2772\sqrt{65}(x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_5(x,y) = 5544\sqrt{715}(x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 - x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 -$$
$$-\frac{1}{2}x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{5}{44}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_6(x,y) = 2772\sqrt{65}(x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_7(x,y) = 5544\sqrt{715}(x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 -$$
$$-x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{5}{44}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2),$$
$$\hat{r}_8(x,y) = 792792x^4y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 792792x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 180180x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 -$$
$$-792792x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 + 792792x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 180180x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 +$$
$$+180180x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 180180x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 40950x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2.$$

Используем систему $\widehat{\mathscr{R}}_3$ для нахождения приближённого решения модельной задачи (2) методом Бубнова – Галёркина. Запишем систему равенств (5), полученную на основании ортогональности функций, определённых уравнениями системы (2), и функций $\hat{r}_m(x)$, $m = 0,\ldots,8$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \lambda^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \right. \\ \left. -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - K_y\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - qK_y^2\right]\hat{r}_m(x,y)\,dx\,dy = 0, \\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \lambda^2\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) + \right. \\ \left. +\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + K_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\hat{r}_m(x,y)\,dx\,dy = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив в систему равенств (5) приближённое решение в виде

$$w_9(x,y) = \sum_{m=0}^{8} a_m\hat{r}_m(x,y), \qquad F_9(x,y) = \sum_{m=0}^{8} b_m\hat{r}_m(x,y), \quad (6)$$

и вычислив соответствующие двойные интегралы, получим систему 18 нелинейных алгебраических уравнений с 18 неизвестными коэффициентами разложения (6).

Более простым в плане вычислений является метод последовательного возмущения параметров, который сводит решение нелинейной системы уравнений (2) к последовательному решению ряда линейных систем уравнений. Разобьём параметр q на сумму параметров q_n:

$$\sum q_n = q, \quad \text{где} \quad \|q_n\| \leq 0,05.$$

Для получения функции прогиба и функции усилий на n-м шаге будем решать линейную систему уравнений, полученную в результате линеаризации системы (2) в точке (w^{n-1}, F^{n-1}). Подставляя выражения

$$w = w^n - w^{n-1} = \sum_{k=0}^{8} a_k \hat{r}_k(x), \qquad F = F^n - F^{n-1} = \sum_{k=0}^{8} b_k \hat{r}_k(x), \tag{7}$$

в систему равенств

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left[\dfrac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\dfrac{1}{\lambda^2} \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left(\dfrac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial x^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dfrac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial y^2} \right) - \right. \\ - \left(\dfrac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\dfrac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial x \partial y} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dfrac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial x \partial y} \right) - \\ \left. -K_y \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - q_n K_y^2 \right] \hat{r}_m(x,y)\, dx\, dy = 0, \\ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left[\left(\dfrac{1}{\lambda^2} \dfrac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \dfrac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \dfrac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + \left(\dfrac{\partial^2 w_0^{(n-1)}}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2 w_0^{(n-1)}}{\partial x^2} \right) - \right. \\ \left. - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \hat{r}_m(x,y)\, dx\, dy = 0 \end{cases}$$

и вычисляя соответствующие двойные интегралы, получим систему 18 линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k и b_k разложения (7). В явном виде эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 228.97a_0 + 65.636a_2 - 16.409a_6 + 17.639a_8 + 180.0b_0 - 145.12b_6 - 7.875 = 0, \\ -180.0a_0 - 11.0a_4 + 145.12a_6 + 2430.0b_0 + 696.58b_2 - 174.14b_6 + 187.2b_8 = 0, \\ 1603.9a_1 - 74.752a_7 + 180.0b_1 - 145.12b_7 = 0, \\ -180.0a_1 + 11.0a_3 - 17.737a_5 + 145.12a_7 + 17022.0b_1 - 793.33b_7 = 0, \\ 65.636a_0 + 6361.9a_2 + 17.639a_6 - 165.18a_8 + 180.0b_2 - 145.12b_8 - 3.628 = 0, \\ -180.0a_2 + 17.737a_4 + 145.12a_8 + 696.58b_0 + 67518.0b_2 + 187.2b_6 - 1753.1b_8 = 0, \\ 382.75a_3 + 7.2929a_5 + 660.0b_3 = 0, \\ 11.0a_1 - 660.0a_3 - 17.737a_7 + 4062.0b_3 + 77.398b_5 = 0, \\ 1950.7a_4 + 660.0b_4 = 0, \\ -11.0a_0 + 17.737a_2 - 660.0a_4 + 17.737a_6 - 28.6a_8 + 20702.0b_4 = 0, \\ 7.2929a_3 + 7007.8a_5 + 660.0b_5 = 0, \\ -17.737a_1 - 660.0a_5 + 28.6a_7 + 77.398b_3 + 74372.0b_5 = 0, \\ -16.409a_0 + 17.639a_2 + 785.28a_6 - 83.139a_8 - 145.12b_0 + 1404.0b_6 - 3.628 = 0, \\ 145.12a_0 + 17.737a_4 - 1404.0a_6 - 174.14b_0 + 187.2b_2 + 8334.0b_6 - 882.33b_8 = 0, \\ -74.752a_1 + 2652.3a_7 - 145.12b_1 + 1404.0b_7 = 0, \\ 145.12a_1 - 17.737a_3 + 28.6a_5 - 1404.0a_7 - 793.33b_1 + 28148.0b_7 = 0, \\ 17.639a_0 - 165.18a_2 - 83.139a_6 + 8173.1a_8 - 145.12b_2 + 1404.0b_8 - 1.6714 = 0, \\ 145.12a_2 - 28.6a_4 - 1404.0a_8 + 187.2b_0 - 1753.1b_2 - 882.33b_6 + 86739.0b_8 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решая получившуюся СЛАУ (8), определим функции w^k и F^k.

В результате итерационного процесса получаем соответствующую функцию прогиба, например:

$$w_9^{(8)}(x,y) = 909.63x^4y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 909.59x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 1155.2x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ -909.57x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 + 908.85x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 1154.8x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \\ +234.96x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 234.62x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 448.8x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2.$$

В процессе вычислительного эксперимента было выяснено, что величина отклонений приближённых решений, полученных в результате использования системы $\mathscr{R}_3$ и $\mathscr{R}_4$ отличаются на величину не превосходящую 10^{-5}. Рассматривая системы $\mathscr{R}_n$ и соответствующие приближённые решения нелинейной модели (2) при больших значениях n, можно заключить, что при жёстком закреплении краёв оболочечной конструкции не наблюдается потери устойчивости оболочки в целом. Этот факт был теоретически обоснован в работе [5]. Следует заметить также, что предложенная в данной работе методика нахождения функции прогиба применима не только для прямоугольных в плане оболочечных конструкций.

Библиографический список

1. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 118 с.
2. *Кузнецов В. В., Петров В. В.* Использование метода возмущённой области интегрирования при решении нелинейных краевых задач теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 176–178.
3. *Петров В. В., Овчинников И. Г., Иноземцев В. К.* Деформирование элементов конструкций из нелинейного равномодульного неоднородного материала. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. 160 с.
4. *Шабанов Л. Е.* Вопросы численной реализации метода последовательных возмущений параметров при расчёте оболочечных конструкций : дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.
5. *Кузнецов В. Н.* Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций : дис. … д-ра техн. наук. Саратов, 2000.
6. *Бессонов Л. В.* Численная реализация алгоритма спектрального критерия локальной потери устойчивости оболочечной конструкци // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 7. С. 3–9.
7. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1988. 734 с.

Numerical Implementation of Method of Subsequent Perturbation of Parameters for Computation of Stress-Strain State of a Shell Rigidly Fixed on the Boundaries

L. V. Bessonov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, lexx@sgu.ru

The Karman model for a shell rectangular in the plan with rigid fixation of the boundaries is considered. An orthonormalized system of basis functions satisfying the boundary conditions of the problem is obtained. Linearization of the problem is given and the solution is obtained by the method of subsequent perturbation of parameters due to Vladlen V. Petrov. The solutions including supporting intermediate results for the shell made of rolled duralumin are discussed.

Key words: shell, numerical experiment, the model Karman, method of sequential perturbation of a parameters.

References

1. Petrov V. V. Metod posledovatel'nykh nagruzhenii v nelineinoi teorii plastin i obolochek [Method of successive loadings in nonlinear theory of plates and shells]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1975, 118 p. (in Russian).

2. Kuznecov V. V., Petrov V. V. Ispol'zovanie metoda vozmushchennoi oblasti integrirovaniia pri reshenii nelineinykh kraevykh zadach teorii gibkikh plastin i obolochek [Using the method of perturbed region of integration in the solution of nonlinear boundary value problems of the theory of flexible plates and shells]. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1985, no. 2, pp. 176–178 (in Russian).

3. Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Inozemcev V. K. Deformirovanie elementov konstruktsii iz nelineinogo ravnomodul'nogo neodnorodnogo materiala [The deformation of the structural elements of nonlinear runmodule heterogeneous material]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1988, 160 p.

4. Shabanov L. E. *Voprosy chislennoi realizatsii metoda posledovatel'nykh vozmushchenii parametrov pri raschete obolochechnykh konstruktsii*: Diss. kand. fiz.-

mat. nauk [Issues of numerical implementation of the method consistent perturbation parameters when calculating shell designs : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 2005. (in Russian).
5. Kuznecov V. N. *Metod posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov v prilozhenii k raschetu dinamicheskoi ustoichivosti tonkostennykh obolochechnykh konstruktsii* : Diss. kand. tehn. nauk [The method of successive perturbations of the parameters in the application to the calculation of dynamic stability of thin-walled shell structures : Dr. techn. sci. diss.]. Saratov, 2000 (in Russian).
6. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia algoritma spektral'nogo kriteriia lokal'noi poteri ustoichivosti obolochechnoi konstruktsi [Numerical realization of algorithm of spectral criterion of local buckling of shell structures]. *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues : inter-university collection of scientific papers], Saratov, Saratov Univ Press, 2012, iss. 7, pp. 3–9.
7. Pisarenko G. S., Jakovlev A. P., Matveev V. V. Spravochnik po soprotivleniiu materialov [The reference resistance of materials]. Kiev, Naukova dumka, 1988, 734 p.

ON WEAK DISCONTINUITIES AND JUMP EQUATIONS ON WAVE SURFACES IN MICROPOLAR THERMOELASTIC CONTINUA

V. A. Kovalev[1], E. V. Murashkin[2], Yu. N. Radayev[2]

[1]Moscow City Government University of Management Moscow, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, vlad_koval@mail.ru
[2]National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com
[3]Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The present study is devoted to problem of propagating surfaces of weak and strong discontinuities of translational displacements, microrotations and temperature in micropolar (MP) thermoelastic (TE) continua. Problems of propagation of weak discontinuities in type-I MPTE continua are discussed. Geometrical and kinematical compatibility conditions due to Hadamard and Thomas are used to study possible wave surfaces of weak discontinuities. Weak discontinuities are discriminated according to spatial orientations of the discontinuities polarization vectors (DPVs). It is shown that the surfaces of weak discontinuities can propagate exist without weak discontinuities of the temperature field. Second part of the paper is concerned the discussions of the propagating surfaces of strong discontinuities of field variables in type-II MPTE continua. Constitutive relations for hyperbolic thermoelastic type-II micropolar continuum is derived by the field theory. The special form of the first variation of the action integral is used in order to obtained 4-covariant jump conditions on wave surfaces. Three-dimensional form of the jump conditions on the surface of a strong discontinuity of thermoelastic field are derived from 4-covariant form.

Key words: micropolar thermoelasticity, type-I continuum, type-II continuum, weak discontinuity, strong discontinuity, shock wave, longitudinal wave, transverse wave, compatibility condition, jump.

1. PRELIMINARY REMARKS

Problems of micropolar continua take its origin from the classical E. and F. Cosserat's paper [1]. Micropolar (MP) continuum theories include not only translational displacements but also additional degrees of freedom. These degrees of freedom are coupled with changes in reper (three directors) associated with microvolume. Such changes may be described by a rotation vector when reper associated with microvolume are rigid rotated. In contrary to conventional elasticity a continuum with microstucture is described by the asymmetric strain and stress tensors known from many previous discussions. Thus the asymmetric elastic theory is characterized by a comparatively large number of constitutive elastic constants need to be determined from the experimental observations. There are several phenomena (for example, the anomalous piezoelectric effect in quartz, the dispersion of elastic waves, as well as a number of other experimentally observed elastic properties of the pure crystals) being beyond the scope of the conventional thermoelasticity (CTE) and piezoelectroelasticity. That is why a development of complex theories seems to be actual.

The type-I micropolar thermoelastic (MPTE-I) continuum may be described in terms of field formalism, for example, from positions of the Green–Naghdi thermoelasticity (GN-theory). Now such mathematical frameworks of the thermoelastic behavior of solids are rapidly refined [2,3]. They are based on different modifications of the classical Fourier law of heat conduction. The refinements aim at derivations of *hyperbolic* partial differential equations of coupled thermoelasticity. Those are to