УДК 517.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ КОНТИНУАЛЬНОГО ЗАМКНУТОГО U-МНОЖЕСТВА

И. С. Юрченко

Юрченко Ирина Сергеевна, ассистент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, hamsterchik@mail.ru

В данной работе рассматривается система характеров на группе Виленкина и изучаются множества единственности (U-множества) для рядов по системе характеров группы Виленкина. Доказывается достаточное условие для U-множества на группе Виленкина и строится континуальное замкнутое множество единственности на группе Виленкина для произвольной образующей последовательности.

Ключевые слова: множества единственности, замкнутое континуальное множество, группа Виленкина.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-76-79

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что счетное множество является U-множеством для системы Уолша на модифицированном отрезке $[0,1]^*$. Этот результат справедлив и для системы Виленкина на группе Виленкина, причем доказательство полностью повторяет доказательство для системы Уолша. Н. А. Бокаев [2] доказал достаточное условие для того, чтобы множество было U-множеством для системы Виленкина на $[0,1]^*$. Также Н. А. Бокаев [3] показал, что если у образующей последовательности существует ограниченная в совокупности подпоследовательность, то для системы Виленкина существует континуальное замкнутое U-множество на $[0,1]^*$. Там же было доказано, что если $p_n = n+2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то континуальное замкнутое множество также существует. Покажем, что данные результаты справедливы для системы характеров на группе Виленкина для любой образующей последовательности.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность простых чисел. По последовательности (p_k) построим последовательность (m_k) следующим образом: $m_0 = 1$, $m_{k+1} = p_k m_k$. Рассмотрим группу G, состоящую из бесконечных последовательностей $G = \{(x_k)_{k=0}^{\infty} : \ x_k = \overline{0, p_k - 1}\}$. Определим на группе G операцию $\oplus$ следующим образом:

$$x \oplus y \stackrel{\mathrm{df}}{=} (x_k \oplus y_k)_{k=0}^{\infty}, \qquad x_k \oplus y_k = (x_k \oplus y_k) \operatorname{mod} p_k.$$

Символом $\ominus$ будем обозначать операцию, обратную к $\oplus$. Группу G с такими операциями называют *группой Виленкина*. Очевидно, что $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$.

Элементы $g_n = (0, 0, \ldots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \ldots)$ образуют базисную систему в G, т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p_n - 1}$. Смежные классы $G_n \oplus h$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathscr{K}$. Равенство $\mu(G_n \oplus h) = 1/m_n$ определяет на $\mathscr{K}$ меру, которая может быть продолжена по схеме Каратеодори. В результате получается мера, совпадающая с мерой Хаара на борелевских подмножествах G. По мере μ по схеме Лебега строится абсолютно сходящийся интеграл, инвариантный относительно сдвига.

Определение 1. Пусть $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{m_{k+1}} \in \mathbb{N}_0$, $n_k = \overline{0, p_k - 1}$, $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G$, $z_k = \overline{0, p_k - 1}$. Функции $r_k(z) = e^{2\pi i z_k / p_k}$ назовем *функциями Радемахера*. Функции $V_n(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$ назовем *функциями Виленкина* на группе G.

Функции Виленкина $V_n(z)$ являются характерами группы Виленкина G и образуют ортонормированную систему в $L_2(G)$.

Определение 2. Множество $E \in G$ называется U-множеством для системы характеров $\{V_n(x)\}$, если из сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x) \tag{1}$$

к нулю всюду вне E следует, что $c_n = 0$ при всех n.

Теорема 1. *Множество $E \in G$ будет U-множеством для системы характеров $\{V_n(x)\}$, если для него найдется последовательность функций $F_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, обладающая свойствами:*

1. $F_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{s_k} \gamma_n^{(k)} V_n(x)$, причем

а) $\sum\limits_{n=0}^{s_k} |\gamma_n^{(k)}| \leqslant B < \infty$;

б) $|\gamma_0^{(k)}| \geqslant A > 0$;

в) $\gamma_n^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, $n \geqslant 2$.

2. $F_k(x) = 0$ на E, кроме, быть может, точек множества $\mathscr{E}_k \subset E$, про которое заранее известно, что оно является U-множеством для системы $\{V_n(x)\}$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится к нулю вне E. Покажем, что $c_n = 0$ при всех n.

По условию 2 $F_k(x) = 0$ на $E \subset G$, следовательно, существует смежный класс $G_{l+1} \oplus a_l g_l \subset G \setminus E$ такой, что $F_k(x) \neq 0$ при $x \in G_{l+1} \oplus a_l g_l$. На смежном классе $G_{l+1} \oplus a_l g_l$ могут быть лишь точки множества $\mathscr{E}_k \subset E$, но $\mu \mathscr{E}_k = 0$, значит, ряд (1) сходится к нулю почти всюду на $G_{l+1} \oplus a_l g_l$. Рассмотрим

$$f(x) \cdot F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x) \cdot \sum_{l=0}^{s_k} \gamma_l^{(k)} V_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{s_k} c_n \gamma_l^{(k)} V_{n \oplus l}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l \oplus n = j} c_n \gamma_l^{(k)} \right) V_j(x).$$

Обозначим

$$a_j^{(k)} = \sum_{l \oplus n = j} c_n \gamma_l^{(k)} = \sum_{l=0}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} = c_j \gamma_0^{(k)} + \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)}.$$

По условию $f(x)$ сходится к нулю вне E, а $F_k(x) = 0$ на $E \setminus \mathscr{E}_k$, причем $\mu \mathscr{E}_k = 0$. Следовательно, $f(x) \cdot F_k(x)$ сходится к нулю вне $\mathscr{E}_k$, которое является U-множеством, значит, для любого j $a_j^{(k)} = 0$.

Таким образом, $c_j \gamma_0^{(k)} + \sum\limits_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} = 0$, т. е.

$$c_j = -\frac{1}{\gamma_0^{(k)}} \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)}.$$

Так как $f(x)$ сходится к нулю, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует номер L такой, что для любого $l > L$ $|c_{j \ominus l}| < \dfrac{\varepsilon_1 A}{2B}$. Обозначим $C = \max\limits_l |c_{j \ominus l}|$. Из условия 1, в) следует, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует номер K такой, что при $k > K$ $|\gamma_l^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon_2 A}{2CL}$. Рассмотрим

$$|c_j| = \frac{1}{\left|\gamma_0^{(k)}\right|} \left| \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| \leqslant \frac{1}{A} \left| \sum_{l=1}^{L} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| + \frac{1}{A} \left| \sum_{l=L+1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{A} \cdot \frac{\varepsilon_2 A}{2CL} \left| \sum_{l=1}^{L} c_{j \ominus l} \right| + \frac{1}{A} \cdot \frac{\varepsilon_1 A}{2B} \left| \sum_{l=L+1}^{s_k} \gamma_l^{(k)} \right| = \frac{\varepsilon_2}{2CL} \cdot C \cdot L + \frac{\varepsilon_1}{2B} \cdot B = \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Следовательно, для любого фиксированного j $|c_j| < \varepsilon$ при достаточно большом k, т. е. для любого j $c_j = 0$.

Теорема доказана.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. *Для системы характеров $\{V_n(x)\}$ на группе Виленкина существует континуальное замкнутое U-множество.*

Доказательство. Множество E будем строить следующим образом.

На первом шаге разбиваем группу $G = G_0$ на смежные классы $G_1 \oplus a_0 g_0$ ранга p_0 и удаляем все смежные классы, кроме двух крайних, для определенности. Полученное множество обозначим $E_0 = G_1 \cup (G_1 \oplus (p_0 - 1) g_0)$. Оставшиеся два смежных класса разбиваем на смежные классы $G_2 \oplus a_1 g_1$ ранга p_1 и удаляем все смежные классы, кроме двух крайних. Получим множество

$$E_1 = G_2 \cup (G_2 \oplus (p_1 - 1) g_1) \cup (G_2 \oplus (p_0 - 1) g_0) \cup (G_2 \oplus (p_1 - 1) g_1 \oplus (p_0 - 1) g_0)$$

и т. д. Получившееся в результате этого процесса множество обозначим E, причем из построения следует, что

$$\mu E_0 = \frac{2}{p_0} = \frac{2}{m_1}, \qquad \mu E_1 = \frac{2^2}{p_0 p_1} = \frac{2^2}{m_2}, \qquad \ldots, \qquad \mu E_{s-1} = \frac{2^s}{p_0 p_1 \ldots p_{s-1}} = \frac{2^s}{m_s}.$$

Если последовательность $\{p_n\}$ содержит бесконечно много $p_n > 2$, то $\mu E_s = \dfrac{2}{p_0} \dfrac{2}{p_1} \ldots \dfrac{2}{p_s} \to 0$ при $s \to \infty$. Следовательно, $\mu E = 0$. В качестве последовательности функций $\{F_s(x)\}$ рассмотрим полиномы вида $F_s(x) = (1 - V_{m_s}(x))(1 - e^{2\pi i/p_s} V_{m_s}(x))$ и проверим выполнение условий теоремы 1.

Имеем:

$$F_s(x) = 1 - (1 + e^{2\pi i/p_s}) V_n(x) + e^{2\pi i/p_s} V_{m_n}^2(x),$$

тогда сумма модулей коэффициентов при $V_{m_n}(x)$ имеет следующую оценку:

$$\sum_{n=0}^{\nu_s} |\gamma_n^{(s)}| = 1 + |1 + e^{2\pi i/p_s}| + |e^{2\pi i/p_s}| \leqslant 4 < \infty,$$

а модуль нулевого коэффициента — $|\gamma_0^{(s)}| = 1 > 0$ для любого s. Условие 1, в) очевидно, так как $\gamma_n^{(s)} = 0$ при $s \to \infty$, $n \in N$. Функции $F_s(x) = 0$ на E, так как если x из левого промежутка, то $V_{m_s}(x) = 1$ и первый сомножитель равен 0; если из правого, то $V_{m_s}(x) = e^{2\pi (p_s - 1)/p_s}$, и второй сомножитель равен нулю. В качестве множества $\mathscr{E}_s$ можно взять $\varnothing$.

Если же последовательность $\{p_n\}$ содержит бесконечно много $p_n = 2$, тогда выделим ограниченную в совокупности подпоследовательность $\{p_{n_k} : p_{n_k} = 2\}$ и построим множество E следующим образом.

На первом шаге из группы G_0 убираем промежутки, образованные точками x, в разложении которых $x_{n_0} = 0$, а остальные x_j любые. Оставшееся множество обозначим как E_0. Затем из множества $G \setminus E_0$ убираем промежутки, образованные точками x, в разложении которых $x_{n_1} = 0$, а остальные x_j — любые. Оставшееся множество обозначим как E_1. На k-м шаге из множества $G \setminus E_{k-1}$ убираем промежутки, образованные точками x, в разложении которых $x_{n_k} = 0$, а остальные x_j — любые. Оставшееся множество обозначим как E_k и т. д. Положим $E = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k$, где $E_k = \{x : x_{n_0} = x_{n_1} = \ldots = x_{n_k} = 1\}$. Из построения следует, что

$$\mu E_0 = \frac{1}{m_{n_0}}, \qquad \mu E_1 = \frac{p_{n_0}}{m_{n_1}} = \frac{2}{m_{n_1}}, \qquad \ldots, \qquad \mu E_k = \frac{p_{n_0} p_{n_1} \ldots p_{n_{k-1}}}{m_{n_k}} = \frac{2^k}{m_{n_k}}.$$

Следовательно, $\mu E = 0$.

В качестве последовательности функций $\{F_s(x)\}$ рассмотрим полиномы вида

$$F_s(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{j m_{n_s}}(x)$$

и проверим выполнение условий теоремы 1.

Имеем $F_s(x) = \sum\limits_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{jm_{n_s}}(x)$, тогда сумма модулей коэффициентов при $V_{jm_{n_s}}(x)$ имеет следующую оценку:

$$\sum_{n=0}^{p_{n_s}-1} |\gamma_n^{(s)}| \leqslant \sum_{n=0}^{p_{n_s}-1} 1 = p_{n_s} = 2 < \infty,$$

а модуль нулевого коэффициента — $|\gamma_0^{(s)}| = 1 > 0$ для любого s. Условие 1, в) очевидно, так как $\gamma_n^{(s)} = 0$ при $s \to \infty$, $n \in N$. По построению функции

$$F_s(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{jm_{n_s}}(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} r_{n_s}^j(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} e^{2\pi i \frac{x_k}{p_{n_s}} j} = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} e^{2\pi i \frac{1}{p_{n_s}} j} = 0$$

на E как сумма корней из единицы. В качестве множества $\mathscr{E}_s$ можно взять $\varnothing$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 2. С. 279–300.
2. *Бокаев Н. А.* О множествах единственности для некоторых ортонормированных систем. Деп. в ВИНИТИ 03.08.1983, № 4282-83.
3. *Бокаев Н. А.* Об U-множествах для мультипликативных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1995. № 3. С. 84–86.

On the Existence of Continual Closed U-set

I. S. Yurchenko

Yurchenko Irina Sergeevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, hamsterchik@mail.ru

In this work we consider a system of characters of the Vilrnkin group G and study uniqueness sets for series for system of character of Vilenkin group (in other words, U-sets). We prove a sufficient condition for the U-set on the Vilenkin group and constructed continual closed U-set on the Vilenkin group.

Key words: U-set, continual closed set, Vilenkin group.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00102).

References

1. Shneider A. A. On the uniqueness of expansions in Walsh functions. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1949, vol. 24(66), no. 2, pp. 279–300 (in Russian).
2. Bokaev N. A. *An uniqueness sets for some orthonormal systems*. Preprint in VINITI, 03.08.1983, № 4282-83 (in Russian).
3. Bokaev N. A. An U-sets for multiplicative systems. *Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matem. Mekh.*, 1995, no. 3, pp. 84–86 (in Russian).