МЕХАНИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ФИЗИЧЕСКИ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ МЕТОДОМ ТИМОШЕНКО

А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет
Email: denjgy0706@yandex.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара системы ступенчатого и однородного стержней о жесткую преграду при неудерживающих связях путем решения волнового уравнения методом Даламбера. На основе закона сохранения энергии методом Тимошенко рассчитывается величина критической сжимающей нагрузки, в соответствии с которой, далее рассчитывается величина критической предударной скорости, приводящая к потере устойчивости рассматриваемой стержневой системы.

Ключевые слова: удар, устойчивость, моделирование, скорость, деформация.

Mathematical Modelling of Loss of Stability of System of Step and Homogeneous Cores at Blow about the Rigid Barrier Tymoshenko'S Method

A. A. Bityurin

Mathematical modeling of longitudinal elastic central blow of system of step and homogeneous cores about a rigid barrier is carried out, at not holding communications by a solution of the wave equation by Dalamber's method. On the basis of the law of conservation of energy by Tymoshenko's method the size of critical compressing loading according to which, the size of critical pretonic speed leading to loss of stability of considered rod system further pays off.

Key words: blow, stability, modeling, speed, deformation.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, которая в дальнейшем сохраняет своё постоянное значение, ранее была решена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским [1]. Позднее проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мгновенно сжатого бесконечного упругого стержня методом малых возмущений [2], а также исследование потери устойчивости полубесконечного упругого стержня [3]. В работах [3, 4] В. И. Малым предложен подход для исследования потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания при ударе полубесконечного упругого стержня телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью. Несмотря на довольно пристальное внимание к этой проблеме советских и зарубежных исследователей, вплоть до конца 70-х годов прошлого века, и многочисленные исследования, многое осталось не решенным. Не сложилось однозначной методики расчета кусочно-неоднородных стержневых систем на устойчивость при продольном ударе. При этом о вездесущности данной проблемы при проектировании огромнейшего числа машин и механизмов, архитектурных сооружений, в процессе эксплуатации которых возникают всякого рода динамические взаимодействия, говорить не имеет смысла.

Выполнение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального [5] уравнения четвёртого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальной прогибью. Недостатком такого подхода является очевидная трудность математического решения, сопряженная с громоздкими математическими выкладками, а также удовлетворительная сходимость результатов математического моделирования и экспериментальных данных лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики, связанная с накоплением погрешности вычислений в ходе проведения математических операций. Задача о потере устойчивости ступенчатых стержней при ударе в перечисленных работах, а также в работах [1–7] не рассматривалась.

Ниже приводится подход для расчета критической предударной скорости ступенчатого физически однородного стержня, имеющего три участка различной длины и площади поперечных сечений [5]. Решением волнового уравнения методом Даламбера с применением графоаналитического метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, с помощью которой рассчитывается величина эквивалентной продольной сжимающей нагрузки. В работе [8] значение критической сжимающей нагрузки, действующей на ступенчатый стержень, рассчитывалось с помощью формулы Эйлера [9, 10]. Более точное решение поставленной задачи можно получить с помощью динамических или энергетических методов расчета [5], основанных на законе сохранения энергии. В данной работе задача нахождения величины критической сжимающей силы решается методом Тимошенко [5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Рассмотрена модель продольного удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна l_1, конечного участка l_2, масса обоих участков m_1. Длина и масса третьего участка, представляющего из себя отдельный стержень, равны соответственно $l_3 = l - (l_1 + l_2)$ и m_2. V_0 — предударная скорость стержневой системы, l — общая ее длина. Все участки состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [8, 11, 12].

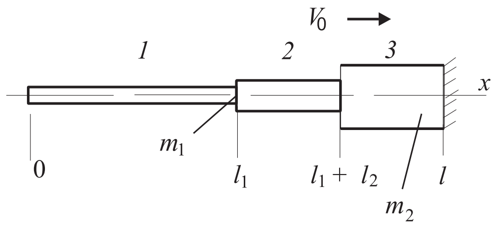

Рис. 1. Схема удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду при неудерживающих связях

Движение поперечных сечений участков стержня описывается волновым дифференциальным уравнением, составленным для каждого из участков в отдельности [8, 11, 12]:

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $u_i(x,t)$ — продольное перемещение поперечного сечения участка i, x — координата сечения, t — время, a — скорость распространения продольной волны деформации. Для решения уравнения (1) методом Даламбера задаются необходимые начальные и граничные условия [8, 11, 12].

В случае удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду возникает ряд трудностей в определении критической ударной нагрузки, вызывающей потерю устойчивого состояния, поскольку в данном случае в процессе удара функция относительной продольной деформации $\tilde{e}$ будет кусочно-линейная [8, 11, 12].

Пусть в момент времени $T = t_i$ построена диаграмма относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}$ для начального участка произвольного многоступенчатого стержня (рис. 2). Величину продольной силы P_i на рассматриваемом участке, в соответствии с законом Гука [9, 10] и при использовании данных диаграмм, можно представить в виде

$$P_i = EA\frac{V_0}{a}(\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}). \qquad (2)$$

Для определения эквивалентной продольной нагрузки, приложенной в торце рассматриваемого участка ступенчатого стержня (рис. 3) можно воспользоваться зависимостью, представленной в [10]:

$$P_{\text{экв}} = \left[P_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + P_2 \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \cdots + P_i \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + P_n \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]. \tag{3}$$

В формулах (2) и (3) E — модуль упругости, A — площадь поперечного сечения, $\tilde{\varepsilon}_i$ — относительная продольная деформация на i-м отрезке данного участка многоступенчатого стержня, b_1, b_2, b_i, b_n — координаты приложения продольных сил P_i на этом участке.

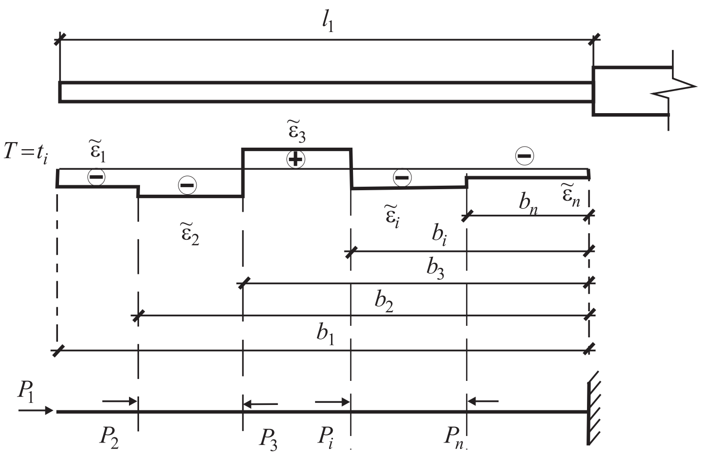

Рис. 2. Начальный участок произвольного многоступенчатого стержня

Рис. 3. Схема приложения эквивалентной продольной нагрузки

Расчет величины критической ударной нагрузки осуществляется методом Тимошенко [5]. Сумма потенциальной энергии деформации и изменения потенциала нагрузки представляет собой полную энергию упругой системы Э, которая представляется в виде

$$Э = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \tag{4}$$

где l — длина рассматриваемого участка, M — изгибающий момент, вызванный действием внешней продольной силы P и прогибом участка v в сечении с координатой x [5].

Учитывая, что при продольном изгибе потенциальная энергия деформации равна работе внешней сжимающей нагрузки, находим значение критической продольной силы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l \frac{m^2 dx}{EI}}, \tag{5}$$

m — единичный момент, отвечающий силе $P = 1$.

При возможном отклонении стержня от равновесного положения первая вариация от полной энергии должна быть равна нулю: $\delta\,Э = 0$. Примем, что изогнутая ось стержня в случае потери устойчивости может быть представлена в виде ряда

$$v = f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + \cdots + f_n\gamma_n = \sum_{i=1}^{i=n} f_i\gamma_i. \tag{6}$$

Здесь под y_i понимаются функции x, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи [5]. Подставим (6) в выражение для полной энергии (4). Тогда полная энергия окажется зависящей от параметров f_i .

Вариации $\delta\,Э$ можно представить при этом как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров f_i [5]:

$$\delta Э = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta\,Э}{\delta f_i} \delta f_i.$$

Так как рассматриваемые изогнутые состояния являются равновесными, то вариация должна быть равна нулю [5]:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta Э}{\delta f_i} \delta f_i = 0. \tag{7}$$

Но вариации δf_i можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство (7) будет иметь место, если каждый из множителей при δf_i будет равен нулю [5]:

$$\frac{\delta Э}{\delta f_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Энергия в соответствии с (4) должна являться квадратичной функцией параметров f_i. Подставляя выражение (6) в формулу (5), получим значение критической сжимающей силы $P_{\text{кр}}$. Сравнивая значение этой силы с величиной, найденной по формуле (3), получим значение критической предударной скорости.

Представим упругую линию рассматриваемого участка ступенчатого стержня (см. рис. 1) в случае потери устойчивости в первом приближении в виде отрезка квадратной параболы [5]

$$v = fx^2. \tag{8}$$

Координата x отсчитывается от границы между первым и вторым участками ступенчатого стержня (см. рис. 1).

Изгибающий момент в сечении, лежащем на расстоянии x от границы между этими участками, будет равен $[-P(v_l - v)]$, где через v_l обозначено отклонение свободного торца первого участка.

Нетрудно убедиться в том, что это выражение удовлетворяет геометрическим граничным условиям, прогиб v и угол поворота dv/dx обращаются в нуль для точки $x = 0$.

Вычислим величину критической сжимающей силы по формуле (5) в пределах первого участка стержня, учитывая, что единичный момент $m = f(l_1^2 - x^2)$ [5]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int\limits_0^l 4f^2x^2dx}{\int\limits_0^{l_1} \dfrac{f^2(l_1^2 - x^2)dx}{EI}} = 2.5\frac{EI}{l_1^2}. \tag{9}$$

В соответствии с (9) находим выражение для критической предударной скорости, учитывая, что для круглого поперечного сечения $J_{\min} = \pi d^4/64$:

$$V_0 < V_{\text{кр}} = \frac{2,5d^2a}{16l_1^2}\left[\tilde{\varepsilon}_1\left(\frac{b_1}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1)\left(\frac{b_2}{l_1}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2)\left(\frac{b_3}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3)\left(\frac{b_i}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i)\left(\frac{b_n}{l_1}\right)\right]^{-1}. \tag{10}$$

ПРИМЕР

Рассмотрим продольный удар о жесткую преграду ступенчатого физически однородного стержня, длина начального участка которого $l_1 = 0.6l$, длины второго и третьего участков равны $l_2 = l_3 = 0.2l$. Соотношение площадей соседних участков $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3 = 0.5$. На основе решения дифференциального уравнения (1) и с применением метода характеристик [11] построена диаграмма относительной продольной деформации (рис. 4).

Анализируя диаграмму, можно сделать вывод, что максимальное значение деформации имеет место на первом участке ступенчатого стержня при $t = 0.8l/a$ (на отрезке $0.2l < x < 0.6l$ $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -1.77$), а также при $t = 2,6l/a$ (на отрезке $0 < x < 0.2l$ $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -0.93$, $0.2l < x < 0.4l$ $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -1.69$, $0.4l < x < 0.6l$ $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -0.31$). Следовательно, в данные моменты времени при достижении предударной скорости некоторого критического значения первый участок и весь ступенчатый стержень могут потерять устойчивость.

Для расчета критической предударной скорости воспользуемся методом Тимошенко. Учитывая жесткую связь первого участка со вторым в сечение $X = L_1$ и его свободный торец, представим уравнение упругой линии в форме (8) в соответствии с геометрическими граничными условиями. Далее, используя данные диаграммы (рис. 4) и зависимость (10), и учитывая $L_1 = 0.6L$, получим при $t = 0.8l/a$ значение критической предударной скорости: $V_{\text{кр}} = 0.55d^2a/(l)^2$. При $t = 2,6l/a$ критическая предударная скорость будет равна $0.39d^2a/(l)^2$. Таким образом, потеря устойчивости ступенчатого стержня возможна при $t = 0.8l/a$, поскольку в этот момент времени может быть достигнуто критическое значение продольной сжимающей нагрузки при данном значении предударной скорости $V_{\text{кр}}$.

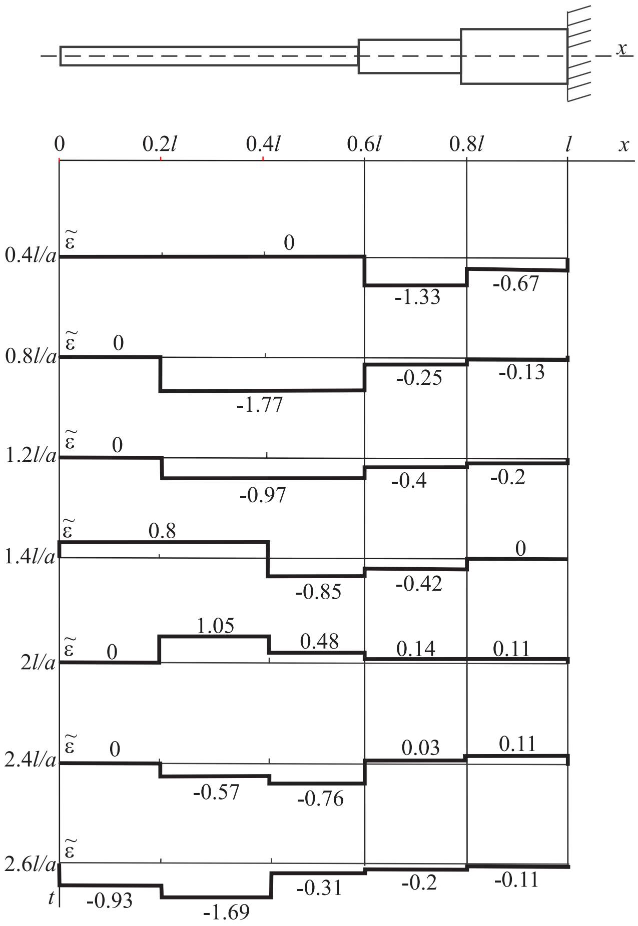

Рис. 4. Диаграмма относительной продольной деформации

ВЫВОД

Используя метод Тимошенко, основанный на законе сохранения энергии, мы получили более простое решение задачи нахождения величины критической сжимающей нагрузки. Однако этот метод по своей точности вычислений не уступает другим энергетическим методам, требующим выполнения значительно большего числа математических процедур. Например, в методе Ритца [5] дополнительно необходимо вычисление производной от продольной силы по параметру f. Далее, приравняв полученное выражение к нулю, можно рассчитать величину критической силы.

Статический метод Эйлера для решения ряда задач на продольный удар стержневых систем часто бывает неприменим, поскольку возникают непреодолимые трудности с определением коэффициента приведения длины.

Библиографический список

1. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 6.

2. *Малый В. И.* Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.

3. *Малый В. И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.

4. *Малый В. И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.

5. *Timoshenko S.* Theory of elastic stability. N.Y., 1936 (*Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. 1-е изд. М. : Гостехиздат, 1946; 2-е изд. М. : Гостехиздат, 1955); *Timoshenko S., Gere J.* Theory of elastic stability. N.Y., 1961.

6. *Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г.* Исследование процесса выпучивания стержней при ударе // Докл. АН СССР. 1966. Т. 2, вып. 10.

7. *Малышев Б. М.* Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.

9. *Дарков А. В., Шпиро Г. С.* Сопротивление материалов. М. : Высш. шк., 2003. 641 с.

8. *Битюрин А. А.* Потеря устойчивости однородного стержня при продольном ударе о стержень, взаимодействующий с жесткой преградой // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2010. Вып. 3, № 30(206). С. 38–44.

10. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1989. 732 с.

11. *Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э.* Распространение волн деформаций в ударных системах. М. : Наука, 1985. 354 с.

12. *Битюрин А. А., Манжосов В. К.* Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. Ульяновск : УлГТУ, 2009. 164 с.