Тогда локальный множитель равен $\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-\dfrac{\xi_i}{N(\wp)^s}\right)^{-1}$. Отсюда легко видеть, что второй сомножитель в произведении (6) определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 1/2$.

Рассмотрим функцию $f(s)$, определенную первым сомножителем в произведении (6),

$$f(s)=\prod_{\wp}{}'|E-M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1}=\prod_{\wp}{}'\prod_{i=1}^{m}\Big(1-\frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1}=f_1(s)^m, \tag{7}$$

где

$$f_1(s)=\prod_{\wp}{}'\Big(1-\frac{1}{N(\wp)^s}\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Рассмотрим максимальное абелево расширение k_{ab}: $k\subset k_{ab}\subset K$. Известно [1], что если β — простой идеал поля k_{ab}, лежащий над простым идеалом $\wp$ поля k, а $\hat{\beta}$ — простой идеал поля K, лежащий над простым идеалом $\wp$ поля k, то $N_{k_{ab}|k}(\beta)=N_{K|k}(\hat{\beta})=p^f$, т. е. если простой идеал $\wp$ полностью разложим при расширении $k\subset K$, то он полностью разложим и при расширении $k\subset k_{ab}$.

Таким образом, к функции $f_1(s)$ вида (8) применима лемма 1 в случае абелева расширения $k\subset k_{ab}$, т. е.

$$f_1^{mn}(s)=\Psi_1^m(s)Z_{k_{ab}}^m(s), \tag{9}$$

где $\Psi_1(s)$ — целая функция.

В силу (7), (8) и (9) получаем $f(s)^n=\Psi_2(s)Z_{k_{ab}}^m(s)$, где $\Psi_2(s)$ — целая функция.

Отсюда в силу представления L-функции Артина (6) в виде произведения двух сомножителей получаем, что $L^n(s,\chi,K|k)$ является функцией, регулярной во всех точках полуплоскости $\sigma > 1/2$, за исключением точки $s=1$, где она, возможно, имеет полюс n-го порядка.

Отсюда по следствию 1 теоремы Брауэра получаем, что $L(s,\chi,K|k)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 1/2$, а в силу следствия 2 теоремы Брауэра L-функция Артина может иметь полюса только на критической прямой $\sigma = 1/2$. $\square$

Библиографический список

1. *Artin E.* Über eine neue Art von L-Reihen // Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 1923. Vol. 3. P. 89–108.
2. *Хейльброн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел М. : Мир, 1969. С. 310–348.
3. *Brauer R.* On Artin's L-series with general group characters // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 502–514.
4. *Кассел Дж., Фрелих А.* Нормы из неабелевых расширений // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 476.

УДК 517.9

ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет
E-mail: irina.k.post@yandex.ru

В данной работе определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций.

Ключевые слова: банахово пространство, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, теорема Винера, абсолютно сходящийся ряд Фурье, обратимость.

Wiener's Theorem for Periodic at Infinity Functions

I. I. Strukova

In this article banach algebra of periodic at infinity functions is defined. For this class of functions notions of Fourier series and absolutely convergent Fourier series are introduced. As a result Wiener's theorem analog devoted to absolutely convergent Fourier series for periodic at infinity functions was proved.

Key words: Banach space, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Wiener's theorem, absolutely convergent Fourier series, invertibility.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C_\omega(\mathbb{R})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных ω-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Будем говорить, что функция $f \in C_\omega(\mathbb{R})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC_\omega(\mathbb{R})$. Заметим, что $AC_\omega(\mathbb{R})$ является банаховой алгеброй (см. [1]) с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Если функция $f \in AC_\omega(\mathbb{R})$ и $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $1/f \in AC_\omega(\mathbb{R})$, т. е. $1/f(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} b(k) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в [2].

Теорема Винера обобщалась в нескольких направлениях. Отметим теорему Бохнера–Филлипса [3] для функций со значениями в банаховой алгебре, а также статьи [4, 5], в которых теорема Винера была доказана для операторов, матрицы которых имеют абсолютно суммируемые диагонали. Ссылки на исследования, связанные с приложениями результатов, имеются в [6].

В данной статье теорема Винера распространяется на класс периодических на бесконечности функций.

Далее введем множество периодических на бесконечности функций.

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из X в X.

Символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

Символом $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим изометрическую группу операторов (или представление) $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{b,u}$, действующую по правилу

$$(S(\alpha)x)(t) = x(t + \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся или стационарной на бесконечности*, если $(S(\alpha)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Например, функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида $f(t) = \sin \ln(1 + t^2)$ является медленно меняющейся на бесконечности.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$, если $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение периодической на бесконечности функции было предложено А. Г. Баскаковым и использовалось в статье [7].

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, а множество периодических на бесконечности функций периода ω — символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В случае $X = \mathbb{C}$ для рассматриваемых пространств будем использовать обозначения $C_{b,u}(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_{sl}(\mathbb{R})$, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$.

Отметим, что $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$. Кроме того, $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образуют банаховы алгебры с поточечным умножением, если X — банахова алгебра.

Определение 3. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

а функции $x_n, n \in \mathbb{Z}$, определяемые по формулам

$$x_n(t) = \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}}{\omega} \int\limits_0^{\omega} x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

— *коэффициентами Фурье* функции x. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье функции x абсолютно сходится, если найдутся функции $y_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$ и $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Заметим, что слово «обобщенный» в дальнейшем будет опускаться.

Отметим также, что рассматриваемый ряд Фурье может не сходиться к функции x и понимается как формальный ряд.

Пример 1. Примером функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье является функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ вида

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{n^2} \sin(\alpha_n \ln(1+t^2)) \right) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_n \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Отметим, что функции $f_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по функции f по формуле (2), не совпадают с функциями $y_n : t \mapsto \dfrac{1}{n^2} \sin \alpha_n \ln(1+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, но $f_n - y_n \in C_0(\mathbb{R})$.

Замечание 1. Если $x \in C_\omega(\mathbb{R})$, то ряд Фурье из определения 3 совпадает с обычным рядом Фурье функции x.

Далее будем использовать следующее обозначение: $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что отображение $x \mapsto \mathcal{P}_n x = x_n e_n : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \to C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, является ограниченным оператором с $\|\mathcal{P}_n\| \le 1$. Кроме того, $\mathrm{Im}\,(\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$ для образа $\mathrm{Im}\,(\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n)$ оператора $\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n$ (доказательство приводится в конце параграфа 3), однако операторы $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, не являются проекторами.

До конца этого параграфа символ X будет обозначать банахову алгебру.

Определение 4. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $xy - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}, X)$.

Замечание 2. Непосредственно из определения 4 следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $x = y + x_0$, где $x_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, а функция $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такова, что $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\|_X > 0$. Из определения 4 также следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $A > 0$, что $\inf\limits_{|t|>A} \|x(t)\|_X > 0$.

Нетрудно видеть, что если y_1, y_2 — обратные к $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции, то $y_1 - y_2 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 2. *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратной относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции также абсолютно сходится.*

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ИХ РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра с единицей и ω — положительное число. Рассмотрим действующую в ней ω—периодическую изометрическую сильно непрерывную группу операторов (представление) $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathcal{B}$, обладающую свойствами

$$T(t)(ab) = T(t)a \cdot T(t)b, \qquad T(t)e = e, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где a, b — произвольные элементы из $\mathcal{B}$, а e — единица в алгебре $\mathcal{B}$.

Таким образом, каждый из операторов $T(t), t \in \mathbb{R}$, является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{B}$ и каждая функция $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{B}$, является непрерывной ω-периодической функцией.

Из приведенных свойств следует, что если элемент $a \in \mathcal{B}$ обратим, то

$$e = T(t)e = T(t)(aa^{-1}) = (T(t)a)T(t)a^{-1} = (T(t)a^{-1})T(t)a, \qquad a \in \mathcal{B},$$

и, следовательно, $(T(t)a)^{-1} = T(t)a^{-1}$.

Рассмотрим ряд Фурье (см. [8, с. 64–66]):

$$T(t)a \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

функции $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{B}$, где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ряд $a \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ назовем *рядом Фурье* элемента $a \in \mathcal{B}$, а a_n, $n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* этого элемента.

Если ряд Фурье элемента $a \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т. е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$, то справедливо равенство $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

Лемма 1. *Пусть $a \in \mathcal{B}$. Тогда $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, где a_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье элемента a. Причем операторы P_n, определяемые формулой*

$$P_n a = a_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}\,dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

являются проекторами с $\|P_n\| \le 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in \mathcal{B}$ и зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть a_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье элемента a, определяемые по формуле (5). Тогда для них справедлива следующая цепочка равенств:

$$T(\alpha)a_n = T(\alpha)\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\alpha)T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\alpha+t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$

$$= \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega}\int_\alpha^{\omega+\alpha} T(\tau)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau = \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega}\int_0^\omega T(\tau)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}d\tau = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы показали, что $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем теперь, что операторы P_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой $P_n a = a_n$, являются проекторами, т. е. $P_n^2 = P_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a \in \mathcal{B}$. Тогда

$$P_n a = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$P_n^2 a = P_n(P_n a) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)a_n e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega a_n dt = a_n = P_n a, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем теперь, что $\|P_n\| \le 1$, $n \in \mathbb{Z}$ (при доказательстве используется свойство $\|T(t)\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$).

$$\|P_n\| = \sup_{\|a\|\le 1}\|P_n a\| = \sup_{\|a\|\le 1}\|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\| \le \sup_{\|a\|\le 1}\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \|T(t)a\|dt \le \sup_{\|a\|\le 1}\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \|T(t)\|\|a\|dt \le 1.$$

Лемма доказана.

Для элемента $a \in \mathcal{B}$ рассмотрим оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{B}$ вида $Ax = ax$, $x \in \mathcal{B}$. Оператору A поставим в соответствие ω-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{B}$, определяемую формулой $\Phi_A(t) = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)AT(-t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ назовем *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_n — *коэффициентами Фурье* этого оператора. Определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(n))$, положив $d_A(n) = \|A_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. *Для коэффициентов Фурье A_n, $n \in \mathbb{Z}$, оператора A справедливы представления $A_n x = a_n x, n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{B}$, причем $\|A_n\| = \|a_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Покажем, что $A_n x = a_n x$ для всех $x \in \mathcal{B}$.

Используя формулы (5) и (6), а также тот факт, что операторы $T(t), t \in \mathbb{R}$, образуют гомоморфизм алгебры, получаем

$$A_n x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)AT(-t)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)(aT(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$
$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (T(t)a)T(t)(T(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right)x = a_n x.$$

Для любого $x \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство $\|A_n x\| \le \|a_n\|\|x\|$. Поскольку $a_n = A_n e$ и $\|e\| = 1$, то $\|A_n\| = \|a_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма доказана.

Пусть ряд Фурье оператора A абсолютно сходится, т. е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$. В этом случае функция Φ_A непрерывна в равномерной операторной топологии.

Далее используется следующая

Теорема 3. *Если обратимый оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{B}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратного оператора также абсолютно сходится.*

Данное утверждение следует из теоремы 2 и замечания к ней из работы [3] (см. также [9]).

3. ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Всюду в этом параграфе через X обозначается банахова алгебра с единицей. Ясно, что группа сдвигов S, определенная по формуле (1), в пространстве периодических на бесконечности функций не является периодической.

В дальнейшем символом $\mathcal{B}$ будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, которое становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом:

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}, \qquad \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

В нем построим изометрическую группу операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{B}$, действующую по правилу

$$T(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + C_0(\mathbb{R}, X), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где x — некоторый представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$.

Поскольку $T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{S(\omega)x} = S(\omega)x + C_0(\mathbb{R}, X) = (S(\omega)x - x) + x + C_0(\mathbb{R}, X) = x + C_0(\mathbb{R}, X) = \widetilde{x}$, то представление T является ω-периодическим.

Кроме того, из сильной непрерывности представления S следует сильная непрерывность представления T.

В терминах группы T принадлежность класса $\widetilde{x}$ алгебре $\mathcal{B}$ будет означать, что $T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$.

Ряд Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, являющейся представителем класса $\widetilde{x}$, имеет вид

$$x(\tau) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(\tau) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau},$$

где коэффициенты Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются по формуле (2), а среднее x_0 имеет вид

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Коэффициенты Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладают следующим свойством: $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Вначале покажем, что среднее x_0 функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Возьмем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ и покажем, что $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из леммы 1 следует, что для класса $\widetilde{x}_0$, содержащего функцию x_0, справедливо равенство $T(\alpha)\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0$, т. е. x_0 обладает свойством $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В силу произвольности выбора числа $\alpha \in \mathbb{R}$ из определения медленно меняющейся на бесконечности функции получаем, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь докажем это свойство для коэффициентов Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$, функции x. Обозначив $y(t) = x(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем, что $S(\omega)y - y \in C_0(\mathbb{R}, X)$, т. е. $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Тогда среднее функции y, определяемое формулой

$$y_0(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau, \qquad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Сравнивая последнюю формулу с формулой (2), получаем, что $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Итак, у нас имеется фактор-алгебра $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующая в ней ω-периодическая сильно непрерывная изометрическая группа операторов (представление) T, определяемая формулой (8).

Представлению T поставим в соответствие его ряд Фурье:

$$T(t)\widetilde{x} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{P_n}\widetilde{x} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{x} \in \mathcal{B}.$$

Коэффициенты Фурье представления T имеют вид

$$\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)\widetilde{x}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

На представителях рассматриваемых классов имеем

$$(P_n x)(\tau) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(t)x)(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = x_n(\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau},$$

где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2).

Из формулы (5) непосредственно следует, что коэффициенты Фурье представления T обладают следующим свойством: $\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть x — представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$. Тогда последнее равенство означает, что $\widetilde{P_n x} = \widetilde{x_n}$, т. е. $P_n x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу того что $\widetilde{P_n}$ являются проекторами, справедливо равенство $\widetilde{P_n}^2 \widetilde{x} = \widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\widetilde{P_n^2 x} = \widetilde{x_n}$, т. е. $P_n^2 x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $P_n^2 x - P_n x \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $\operatorname{Im}(P_n^2 - P_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$.

Если ряд Фурье класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т. е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{x_n}\| < \infty$, то из свойств нормы в фактор-пространстве следует, что в этом случае можно найти такие представители y_n классов $\widetilde{x_n}$, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Заметим, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда обратим класс $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$, ее содержащий. Это утверждение непосредственно вытекает из определения 4.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Теперь для получения основного результата в качестве алгебры $\mathcal{B}$ рассмотрим фактор-алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, а в качестве представления $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{B}$ рассмотрим ω-периодическую группу изометрических операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{B}$, определяемую по формуле (8).

Покажем, что группа T обладает свойствами (4).

С использованием формул (7) и (8) получаем, что

$$T(t)(\widetilde{x}\widetilde{y}) = T(t)(\widetilde{xy}) = \widetilde{S(t)(xy)} = S(t)xS(t)y + C_0(\mathbb{R}, X) = (T(t)\widetilde{x})\,T(t)\widetilde{y}, \quad x \in \widetilde{x}, \quad y \in \widetilde{y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т. е. для группы T свойство (4) действительно выполняется.

Рассмотрим оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{B}$ следующего вида:

$$A\widetilde{x} = \widetilde{a}\widetilde{x}, \qquad \widetilde{a} \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Оператору A поставим в соответствие ω-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{B}$, определяемую формулой $\Phi_A(t) = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, для рассматриваемого оператора справедлива теорема 3.

Приступим к доказательству теоремы 2. Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующую в ней ω-периодическую изометрическую группу операторов T, определяемую по формуле (8).

По обратимой функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, объявленной в условиях теоремы, построим класс $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, который также будет обратим. Обозначив обратный класс символом $\widetilde{b}$, получаем, что $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{1}$.

Введем в рассмотрение оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{B}$, определяемый формулой (9). Это оператор умножения на элемент $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, причем он обратим. Его обратный оператор имеет вид $B\widetilde{x} = \widetilde{b}\widetilde{x}$, $\widetilde{b} \in \mathcal{B}$.

Для оператора A справедлива теорема 3, и, значит, ряд Фурье класса $\widetilde{b}$ абсолютно сходится. Тогда можно найти такой представитель b класса $\widetilde{b}$, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, и его ряд Фурье абсолютно сходится: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|b_n\|_\infty < \infty$. Теорема доказана.

Расшифровкой теоремы 2 является следующая

Теорема 4. *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и ее ряд Фурье абсолютно сходится, то существует функция $b \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, такая, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00276).

Библиографический список

1. *Кахан Ж. П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М. : Мир, 1976. 203 с.

2. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. : Физматлит, 1963. 256 с.

3. *Bochner S., Fillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings // Ann. of Math. 1942. № 3. P. 409–418.

4. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.

5. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.

6. *Groechenig K.* Wiener's lemma : theme and variations.

An introduction to spectral invariance and its applications // Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston : Birkhäuser, 2010. P. 60–63.

7. *Калужина Н. С.* Медленно меняющиеся функции, периодические на бесконечности функции и их свойства // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–102.

8. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151.

9. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.

УДК 517.518

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА–ПОТАПОВА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

В данной статье мы получаем необходимые и достаточные условия принадлежности функции классам Бесова–Потапова. Используя функции с коэффициентами Фурье по мультипликативным системам класса GM, мы показываем точность некоторых из этих результатов.

Ключевые слова: мультипликативная система, классы Бесова–Потапова, обобщенная монотонность, теорема Харди–Литтлвуда–Пэли.

Necessary and Sufficient Conditions of Belonging to the Besov–Potapov Classes and Fourier Coefficients with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

In this paper we obtain necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Besov–Potapov classes. Using functions with Fourier coefficients with respect to multiplicative systems from the class GM, we show the sharpness of some these results.

Key words: multiplicative system, Besov–Potapov classes, generalized monotonicity, Hardy–Littlewood–Paley theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1, m_j = m_{j-1}p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in Z_j. \tag{1}$$

Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Если $x, y \in [0,1)$ записать в виде (1), то по определению $x \oplus y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется *мультипликативной системой*, или *системой Виленкина*. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L[0,1)$ (см. [1, §1.5]). Поэтому можно определить коэффициенты Фурье и частичную сумму Фурье формулами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}_+; \qquad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$