и тогда

$$B_rU = \sum_{i\in\{i:\sigma_i\prec\sigma_k\}} \sum_j \int\limits_{\sigma_k} G_k(x,y) I_k(D_r^k, y) \frac{\partial}{\partial\nu_i} \overline{U}_j(y)\, dy.$$

По построению все B_r вполне непрерывны в $F^{2+\lambda}(D_n)$ для $n \leqslant r$, A_r просто непрерывны в $F^{2+\lambda}(D_n)$. Более того, A_r сходится к нулю в $F^{2+\lambda}(D_n)$ при $r\to\infty$. Тогда для каждого n найдется такое r, что операторная норма $\|A_r\|_{F^{2+\lambda}(D_n)} < 1$ и, следовательно, $I + A_r$ обратим. Тогда в силу теоремы 12 непрерывно обратим $I+\Psi$, тем самым доказывая существование решения (7).

Оценки решения задачи (6) вытекают из непрерывной обратимости $I+\Psi$ в $F^{2+\lambda}(\Omega)$ и из того, что $F(x) = \int\limits_{\sigma_{ij}} G_{i,j}(x,y) f(y)\, dy$. $\square$

Библиографический список

1. *Пенкин О. М., Богатов Е. М.* О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 6. С. 874–886.
2. *Nicaise S., Penkin O. M.* Poincare'-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. of Math. Anal. and Appl. 2004. Vol. 296, № 2. P. 504–520.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. 272 с.
4. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1998. Т. 250. С. 203–218.
5. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Исправления к статье «Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов» // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 324. С. 129–130.
6. *Бураго Ю. Д., Мазья В. Г.* Многомерная теория потенциалов и решение краевых задач для областей с нерегулярными границами // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1967. Вып. 3. С. 5–86.
7. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М. : Физматлит, 1953. 415 с.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики : в 2 т. М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1945. Т. 2. 620 с.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 443 с.
10. *Nicaise S., Sanding A. M.* Transmission problems for the laplace and elasticity operators: Regularity and boundary integral formulation // Math. Model and Methods in Appl. Sci. 1999. Vol. 9. P. 855–898.
11. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1107–1113.
12. *Gavrilov A. A., Nicaise S., Penkin O. M.* Poincaré's inequality on stratified sets and applications // Evolution Equations : Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics (Levico Terme, 2000) : Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Basel : Birkhäuser, 2003. Vol. 55. P. 195–213.
13. *Penkin O. M.* About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures (Luminy, 1999). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. / eds. F. Ali Mehmeti, J. von Belov, S. Nicaise. N. Y. : Marcel Dekker, 2001. Vol. 219. P. 183–191.

УДК 517

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ МИНИМУМА ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: shaspoteha@mail.ru

В работе получено необходимое условие экстремума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса.

Ключевые слова: функционал, необходимое условие, интеграл Стилтьеса, производная по мере.

On a Necessary Condition of at Least one Quadratic Functional with an Integral Stieltjes

S. A. Shabrov

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: shaspoteha@mail.ru

In this paper is obtained a necessary condition for an extremum of a quadratic functional with a Stieltjes integral.

Key words: functional, a necessary condition, Stieltjes integral, derivative on the measure.

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено необходимое условие экстремума функционала:

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu''^2_{x\mu}}{2}\,d\mu + \int_0^l \frac{ru'^2_x}{2}\,dx + \int_0^l \frac{u^2}{2}\,dQ - \int_0^l u\,dF, \tag{1}$$

определенного на множестве E — абсолютно непрерывных на $[0;l]$ функций, первая производная которых μ-абсолютно непрерывна на $[0;l]$, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$.

Функция $\mu(x)$, порождающая меру μ, предполагается строго возрастающей на $[0;l]$. Также будем считать, что множество $S(\mu)$ — точек разрыва функции $\mu(x)$, непусто, что является наиболее интересным с точки зрения приложений. На протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия: 1) $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;l]$ изменение; 2) $p(x) > 0$; 3) интеграл $\int\limits_0^l \dfrac{dt}{p(t)}$ конечен; 4) $r(x) \geq 0$ для всех $x \in [0;l]$; 5) $Q(x)$ — не убывает на $[0;l]$.

Первая производная в равенстве (1) понимается в классическом смысле, вторая — в следующем смысле: $v(x)$ называется μ-производной функции $u(x)$, если для всех $x \in [0;l] \setminus S(\mu)$ справедливо равенство $u(x) - u(0) = \int\limits_0^x v(s)\,d\mu(s)$. Мы принимаем следующее соглашение для функции $\varphi(x)$, принадлежащей $BV[0;l]$ — пространству функций ограниченной на $[0;l]$ вариации: если для некоторой внутренней точки η отрезка $[0;l]$ справедливо равенство $\varphi(\eta - 0) = \varphi(\eta + 0)$, то $\varphi(\eta)$ равно $\varphi(\eta - 0)$ $(= \varphi(\eta + 0))$, т. е. $\varphi(x)$ непрерывна в точке η.

Все интегралы в (1) понимаются по Лебегу – Стилтьесу, причем все кроме первого существуют и по Риману – Стилтьесу.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Задача минимизации функционала (1) на множестве E возникает при моделировании малых деформаций растянутых шарнирно сочлененных стержней, в точках шарнирного соединения прикреплена пружина, реагирующая на поворот, когда (1) описывает потенциальную (полную) энергию системы.

Если $u_0 \in E$ дает минимум функционалу (1), то, следуя схеме Лагранжа, первая вариация

$$\int_0^l pu_0{}''_{x\mu}\,dh'_x + \int_0^l ru_0{}'_x h'_x\,dx + \int_0^l u_0 h\,dQ - \int_0^l h\,dF = 0 \tag{2}$$

для любой $h \in E$. Третий интеграл на основании результатов работы [1] допускает запись

$$\int_0^l u_0 h\,dQ = \int_0^l h\,d\alpha,$$

где $\alpha(x) = \int\limits_0^l u_0\,dQ$ $(x \notin S(Q))$. После интегрирования по частям интеграла $\int\limits_0^l h\,d(\alpha - F)$ равенство (2) принимает вид

$$\int_0^l pu_0{}''_{x\mu}\,dh'_x + \int_0^l (ru_0{}'_x - \alpha + F)\,h'_x\,dx = 0$$

(внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как $h \in E$). Вводя в рассмотрение абсолютно непрерывную на $[0;l]$ функцию $\beta(x) = \int\limits_0^x ((ru_0{}'_x)(s) - \alpha(s) + F(s))\,ds$ и интегрируя $\int\limits_0^l \beta'_x h'_x\,dx$ по частям, имеем:

$$\int_0^l \left(pu_0{}''_{x\mu} - \beta\right)\,dh'_x = 0 \tag{3}$$

(внеинтегральные слагаемые снова равны нулю в силу принадлежности h множеству E).

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $A(x) \in BV[0;l]$; *для любой* $h \in E$ *интеграл* $\int\limits_0^l A(x)\, dh'_x$ *равен нулю. Тогда* $A(x)$ *есть линейная функция.*

Доказательство вполне стандартно (см. [2]). Для любых C_1 и C_2 интеграл $\int\limits_0^l (C_1 + C_2 x)\, dh'_x$ равен нулю, поэтому вполне очевидно существование таких C_1 и C_2, что функция

$$h(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^t (A(s) - C_1 - C_2 s)\ ds\, dt$$

принадлежит E. Для этой функции мы будем иметь равенство $\int\limits_0^l (A(x) - C_1 - C_2 x)^2\, dx = 0$, из которого с учетом нашей договоренности и следует утверждение леммы. □

Из равенства (3) на основании леммы вытекает тождество

$$pu''_{0x\mu} - \beta(x) \equiv C_1 + C_2 x. \tag{4}$$

Из (4) в силу абсолютной непрерывности функций $\beta(x)$ и $C_1 + C_2 x$ следует абсолютная непрерывность $\left(pu''_{0x\mu}\right)(x)$ на $[0;l]$. Тогда (4) допускает дифференцирование по x:

$$\left(pu''_{0x\mu}\right)'_x(x) - \left(ru'_{0x}\right)(x) + \alpha(x) - F(x) \equiv C_2. \tag{5}$$

В работе [3] показано существование такой функции $\sigma(x)$, которая порождает меру σ, что функции x, $\mu(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ-абсолютно непрерывными на $[0;l]$. Следует отметить, что в равенстве (5) переменная x «пробегает» множество $\overline{[0;l]}_S$, в котором каждая точка ξ множества $S = S(\mu) \cup S(r) \cup S(Q) \cup S(F)$ заменена на упорядоченную пару собственных элементов $\{\xi - 0; \xi + 0\}$, бывшие ранее предельными. Строится это множество следующим образом. На множестве $J_S = [0;l] \setminus S$ введем метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S \neq \emptyset$, то метрическое пространство (J_S, ϱ) очевидно неполно. Стандартное пополнение и дает нам $\overline{[0;l]}_S$.

Вернемся к равенству (5), которое допускает σ-дифференцирование:

$$\left(pu''_{0x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_{0x}\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma. \tag{6}$$

Уравнение (6) определено на множестве $\overline{[0;l]}_\sigma = \overline{[0;l]}_S \bigcup S(\sigma)$, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ уравнение (6) принимает вид

$$\Delta\left(pu''_{0x\mu}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(ru'_{0\mu}\right)'_\sigma + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если* $u_0(x)$ *дает минимум функционалу* (1) *на множестве* E, *то* $u_0(x)$ *принадлежит пространству* $\widetilde{E} \subset E$ *вторая квазипроизводная* $\left(pu''_{0x\mu}\right)(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[0;l]$, $\left(pu''_{0x\mu}\right)'_x$ — σ*-абсолютно непрерывна на* $[0;l]$ *и является решением краевой задачи*

$$\begin{cases} \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = u(l) = u'_x(l) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание. Доказанную теорему можно обобщить и на функционалы более общего вида:

$$\widetilde{\Phi}(u) = \int\limits_0^l \widetilde{F}_1(u''_{x\mu})\, d\mu + \int\limits_0^l \widetilde{F}_2(x, u, u'_x)\, dx.$$

Разрешимость краевой задачи устанавливается стандартным приемом: доказывается ее невырожденность (при описанных выше условиях это очевидно) и строится функция Грина (доказывая изначально разрешимость уравнения в (7) в форме задачи Коши (именно здесь и используется третье условие)).

Следует отметить, что изучать уравнение в (7) можно и с позиций теории обобщенных функций (которое получается после обобщенного дифференцирования уравнения (4)). Однако при использовании этого подхода, во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которая в общем случае неразрешима; во-вторых, даже при решении (в каком-то смысле) первой проблемы удается установить лишь слабую разрешимость уравнения; в-третьих, уравнение с обобщенными коэффициентами рассматривается как равенство функционалов, что делает невозможным применение качественных методов анализа (типа теорем Ролля) решений. Последнее стало возможным при использовании поточечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным [2] в 1999 году, при котором уравнение расценивается как поточечно заданное, т. е. обыкновенное.

Покажем теперь, что при выполнении условий 1)–5) экстремаль $u_0(x)$ (решение краевой задачи) функционала (1) доставляет минимум. В самом деле, вторая вариация функционала $\Phi(u)$ на допустимой экстремале имеет вид

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \frac{1}{2}\int_0^l p{h''_{x\mu}}^2\,d\mu + \frac{1}{2}\int_0^l r{h'_x}^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l h^2\,dQ,$$

которая при всех $h \in E$ принимает неотрицательные значения.

Библиографический список

1. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М. : Физматлит, 2009. 192 с.
2. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.
3. *Шабров С. А.* О μ-регуляризации функции с конечным изменением // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета Воронеж. гос. ун-та. Воронеж, 1999. С. 166–169.