An introduction to spectral invariance and its applications // Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston : Birkhäuser, 2010. P. 60–63.
7. *Калужина Н. С.* Медленно меняющиеся функции, периодические на бесконечности функции и их свойства // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–102.
8. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151.
9. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.

УДК 517.518

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА–ПОТАПОВА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

В данной статье мы получаем необходимые и достаточные условия принадлежности функции классам Бесова–Потапова. Используя функции с коэффициентами Фурье по мультипликативным системам класса GM, мы показываем точность некоторых из этих результатов.

Ключевые слова: мультипликативная система, классы Бесова–Потапова, обобщенная монотонность, теорема Харди–Литтлвуда–Пэли.

Necessary and Sufficient Conditions of Belonging to the Besov–Potapov Classes and Fourier Coefficients with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

In this paper we obtain necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Besov–Potapov classes. Using functions with Fourier coefficients with respect to multiplicative systems from the class GM, we show the sharpness of some these results.

Key words: multiplicative system, Besov–Potapov classes, generalized monotonicity, Hardy–Littlewood–Paley theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1, m_j = m_{j-1}p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in Z_j. \tag{1}$$

Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Если $x, y \in [0,1)$ записать в виде (1), то по определению $x \oplus y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется *мультипликативной системой*, или *системой Виленкина*. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L[0,1)$ (см. [1, §1.5]). Поэтому можно определить коэффициенты Фурье и частичную сумму Фурье формулами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}_+; \qquad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме Харди–Литтлвуда–Пэли (см. [2, гл. 6, теорема 6.3.2]) для $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2} \leq C\|f\|_p^p, \qquad 1 < p \leq 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2} + |\hat{f}(0)|^p \geq C\|f\|_p^p, \qquad p \geq 2, \tag{3}$$

где $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ — норма в пространстве $L^p[0,1), 1 \leq p < \infty$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0,\ k \geq n\}$ и $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Определим модуль непрерывности $\omega^*(f,t)_p$ при $1 \leq p < \infty$ равенством $\omega^*(f,t)_p = \sup\limits_{0<h<t} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p$. Далее будем обозначать $\omega^*\left(f, 1/m_n\right)_p$ через $\omega_n(f)_p$. Имеет место важное неравенство А. В. Ефимова [1,§10.5] для $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p < \infty$,

$$E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2E_{m_n}(f)_p, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Пусть $\phi(t)$ — измеримая положительная функция на $[0,1)$ такая, что $\phi(t) \in L[\delta,1)$ при всех $0 < \delta < 1$. Введем две последовательности: $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$ формулами $\beta(n) = \int_{1/(n+1)}^{1} \phi(t)\,dt$ при $n \in \mathbb{N}$, $\beta(0) = 1$, и $\alpha(n) = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \phi(t)\,dt$ при $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать также $\mu(n) = \int_{1/m_n}^{1/m_{n-1}} \phi(t)\,dt$. Для $p, \theta \in [1,\infty)$ определим пространство

$$B\left(\theta,p,\phi\right) = \left\{ f \in L^p[0,1) : \|f\|_{\theta,p,\phi} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 \phi(t)\left(\omega^*\left(f,t\right)_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta} dt < \infty \right\}.$$

Далее считаем, что $\phi(t)$ удовлетворяет δ_2-условию

$$\int_{\delta/2}^{\delta} \phi(t)dt \leq C\int_{\delta}^{2\delta} \phi(t)dt \leq C\int_{\delta}^{1} \phi(t)dt, \quad \delta \in (0,1/2), \quad C > 0. \tag{5}$$

Если $p_n \leq P \leq 2^a$, $n \in \mathbb{N}$, то из δ_2-условия вытекает неравенство

$$\mu(n+1) \leq \int_{2^{-a}/m_n}^{1/m_n} \phi(t)\,dt \leq \sum_{j=1}^{[a]+1} C^j \int_{1/m_n}^{2/m_n} \phi(t)\,dt \leq A(C)\mu(n). \tag{6}$$

Для 2π-периодических функций аналогичные $B\left(\theta,p,\phi\right)$ классы функций изучались М. К. Потаповым [3, 4]. При $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$ они соответствуют классическим пространствам Бесова $B_{p\theta}^r$. Изучаемые здесь классы введены С.С.Волосивцом [5]. Необходимые и достаточные условия принадлежности функции пространствам $B_{p\theta}^r$ в терминах коэффициентов Фурье были найдены М. К. Потаповым и М. Беришей [6]. Эти результаты были перенесены на обобщенные пространства Бесова–Потапова М. Беришей [7–9]. Целью нашей работы является изучение условий принадлежности функций пространствам $B\left(\theta,p,\phi\right)$ и $B\left(\theta,H,\phi\right)$ в терминах коэффициентов Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$. При этом для рядов Фурье с коэффициентами класса GM, введенного С. Ю. Тихоновым [10], получаются более точные оценки, позволяющие установить неулучшаемость ряда общих результатов.

По определению $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq Ca_n$. Как показано в [10], класс GM содердит в себе класс $RBVS$ последовательностей, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq Ca_n$, и класс квазимонотонных последовательностей QM, удовлетворяющих условию $a_n n^{-\tau} \downarrow$ при некотором $\tau > 0$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 принадлежит L. Leindler [11] и является обобщением неравенства Харди–Литтлвуда [12, теорема 346].

Лемма 1. *Пусть $a_n \geq 0$ и $\lambda_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$. 1) при $p \geq 1$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^p a_n^p.$$

2) *при* $0 < p < 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \geq 9^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Будем говорить, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \geq 0$, квазиубывает, если $Ca_n \geq a_i$ при $n \leq i \leq 2n$. Как показал С. Ю. Тихонов [10], последовательности класса GM удовлетворяют этому условию. Поэтому если $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in GM$, то $\{(\hat{f}(i))^p i^{p-2}\}_{i=0}^{\infty}$ является квазиубывающей.

Будем называть последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти возрастающей степени γ, если при всех $n \geq m$ верно неравенство $Cn^{\gamma}\lambda_n \geq m^{\gamma}\lambda_m$. В [13] установлена

Лемма 2. 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квазиубывает,* $\lambda_n > 0$. *Тогда при* $0 < p < 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \left(n\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right).$$

2. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квазиубывает,* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— почти возрастающая последовательность степени* $\gamma \in (0,1)$ *и одновременно* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квазиубывает. Тогда при* $p \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \geq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1) *при* $2 \leq p < \infty$ *имеем* $E_n(f)_p \leq C \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^p i^{p-2} \right)^{1/p}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) *при* $1 < p \leq 2$ *имеем* $E_n(f)_p \leq E_n(f)_2 = \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^2 \right)^{1/2}$, *если ряд справа сходится;*

3) *при* $2 \leq p \leq \infty$ *имеем* $E_n(f)_p \geq E_n(f)_2 = \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^2 \right)^{1/2}$;

4) *при* $1 < p \leq 2$ *имеем* $E_n(f)_p \geq C \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^p i^{p-2} \right)^{1/p}$.

Доказательство. Все утверждения леммы 3 вытекают либо из теоремы Харди–Литтлвуда–Пэли либо из формулы $E_n^2(f)_2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$, верных для произвольной ортонормированной системы.

Лемма 4. *Пусть* $1 \leq p, \theta < \infty, f \in L^p[0,1)$. *Тогда*

$$C_1 \sum_{i=m_1}^{\infty} \alpha(i) E_i(f)_p^{\theta} \leq \int_0^1 \phi(t) \left(\omega^*(f,f)_t\right)^{\theta} dt \leq C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) E_i(f)_p^{\theta}. \tag{7}$$

Доказательство. Результат леммы 4 легко следует из следствия 2 работы [5].

Лемма 5. ([14, гл. 4, §4.3]) *Пусть* $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $|D_n(x)| \leq \min(n, N/x)$, $x \in (0,1)$, *и, как следствие,* $\|D_n\|_p \leq Cn^{1-1/p}$ *при* $1 < p < \infty$.

Лемма 6. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда при* $n \leq i \leq 2n$ *справедливо неравенство* $a_n \geq Ca_i$. *Как следствие, для* $n \in [m_k, m_{k-1})$ *имеем* $C_1 a_{m_k} \geq a_n \geq C_2 a_{m_{k+1}}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано С. Ю. Тихоновым [10]. Для доказательства второго утверждения отметим, что если $[\log_2 N] = b$, то $n/m_k \leq 2^{b+1}$ и $a_{m_k} \geq C^{b+1} a_n$. Аналогично, $a_n \geq C^{b+1} a_{m_k}$. Лемма доказана.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^p i^{p-2}$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{i=i}^{\infty} a_i \chi_i(x)$ *является рядом Фурье функции* $f \in L^p[0,1)$ *и имеют место оценки*

$$E_n(f)_p \leq C \left(n^{1-1/p} a_n + \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$n^{1-1/p}a_n + E_n(f)_p \geq C \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

При $p \geq 2$ можно убрать $n^{1-1/p}a_n$ в правой части (8), *а при $1 < p \leq 2$ это выражение можно убрать из левой части* (9).

Для доказательства используется лемма 6 и аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, доказанный C. Watari [15] (ср. с доказательством теоремы 1 в [16]).

Сформулируем достаточные условия принадлежности функции классу Бесова–Потапова $B(\theta, p, \phi)$.

Теорема 2. *1. Пусть $2 \leq p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$, $\theta \geq 1$.*

а) если $\theta/p \geq 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta - 2\theta/p} < \infty$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

б) если $\theta/p \leq 1$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

2. пусть $1 < p \leq 2$, $f \in L^p[0,1)$, $\theta \geq 1$;

а) если $\theta \geq 2$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/2} \beta(k)^{\theta/2} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

б) если $\theta \leq 2$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$.

Доказательство. 1. Пусть $p \geq 2$. Используя пункт 1) леммы 3 и лемму 1, получаем при $\theta/p \geq 1$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha(k) \right)^{\theta/p} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p} = C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} (\beta(k))^{\theta/p} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}.$$

При $\theta/p \leq 1$ применяем неравенство Йенсена и меняем порядок суммирования. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \alpha(k) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p}.$$

С помощью леммы 4 получаем в обоих случаях $f \in B(\theta, p, \phi)$.

2. Используя пункт 2) леммы 3 и лемму 1 при $\theta/2 \geq 1$, находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^2 \right)^{\theta/2} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/2} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right)^{\theta/2} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} = C \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/2} (\beta(k))^{\theta/2} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}.$$

При $\theta/2 \leq 1$ применяем неравенство Йенсена и меняем порядок суммирования. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \alpha(k) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta}.$$

С помощью леммы 4 получаем $f \in B(\theta, p, \phi)$. Теорема доказана.

Для $\phi(t) = t^{-\beta}, \beta > 1$ имеем $\alpha(k) \asymp k^{\beta-2}$, а $\beta(k) \asymp k^{\beta-1}$. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha(k) = O(n\alpha(n))$ и $n\alpha(n) = O\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha(k) \right)$. Будем использовать далее оба этих условия.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$, $\theta \geq 1$ *и* $\phi(t)$ *такова, что* $\beta(k) \leq Ck\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для* $f \in B(\theta, p, \phi)$ *достаточными являются следующие условия:*

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-\theta/p} < \infty$ *при* $p \geq 2$ *и* $\theta/p \geq 1$*;*

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p+1} < \infty$ *при* $p \geq 2$ *и* $0 < \theta/p \leq 1$*;*

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta/2} < \infty$ *при* $1 < p \leq 2$ *и* $\theta \geq 2$*;*

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k < \infty$ *при* $1 < p \leq 2$ *и* $1 \leq \theta \leq 2$.

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$, $\theta \geq 1$ *и* $\phi(t) = t^{-\theta r-1}, r > 0$. *Тогда для* $f \in B(\theta,p,\phi)$ *достаточными являются следующие условия:*

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1+r-1/p)-1} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$ *при* $p \geq 2$ *и* $\theta/p \geq 1$*;*

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-2/p)} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$ *при* $p \geq 2$ *и* $0 < \theta/p \leq 1$*;*

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1/2+r)-1} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$ *при* $1 < p \leq 2$ *и* $\theta \geq 2$*;*

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta r} \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$ *при* $1 < p \leq 2$ *и* $1 \leq \theta \leq 2$.

Теперь получим необходимые условия принадлежности пространству $B(\theta, p, \phi)$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty, \theta \geq 1, f \in B(\theta, p, \phi)$. *Тогда*

а) при $1 < p \leq 2$ *и* $\theta/p \geq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k) \left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$*;*

б) при $1 < p \leq 2$ *и* $\theta/p \leq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p}\beta(k)^{\theta/p}|\hat{f}(k)|^{\theta}k^{\theta-2\theta/p}$*;*

в) при $p \geq 2$ *и* $\theta \geq 2$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}$*;*

г) при $p \geq 2$ *и* $\theta \leq 2$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/2}\beta(k)^{\theta/2}|\hat{f}(k)|^{\theta}$.

Доказательство. а. Применим пункт 4) леммы 3 и неравенство Йенсена. Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} =$$

$$= C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \alpha(k) |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p}.$$

б. Используя пункт 4) леммы 3 и пункт 2) леммы 1, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \geq$$

$$\geq 9^{-1} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} |\hat{f}(k)|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}.$$

в. Применим пункт 3) леммы 3 и неравенство Йенсена. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^2 \right)^{\theta/2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \alpha(k) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) \left|\hat{f}(i)\right|^{\theta}.$$

г. Используя пункт 3) леммы 3 и пункт 2) леммы 1, находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E_k(f)_p^{\theta} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left|\hat{f}(i)\right|^2\right)^{\theta/2} \geq 9^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)^{1-\theta/2}\beta(k)^{\theta/2}\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}.$$

С помощью леммы 4 завершаем доказательство теоремы.

Следствие 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $\theta\geq 1$, $\phi(t)$ *такова, что* $\beta(k)\geq Ck\alpha(k)$, $k\in\mathbb{N}$, *и* $f\in B(\theta,p,\phi)$. *Тогда*

а) при $1<p\leq 2$ *и* $\theta/p\geq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta-2\theta/p+1}\alpha(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

б) при $1<p\leq 2$ *и* $0<\theta/p\leq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta-\theta/p}\alpha(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

в) при $p\geq 2$ *и* $\theta/2\geq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\alpha(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

г) при $p\geq 2$ *и* $0<\theta/2\leq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta/2}\alpha(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}$.

Следствие 4. *Пусть* $1<p<\infty$, $\theta\leq 1$, $\phi(t)=t^{-\theta r-1}$, $r>0$, $f\in B(\theta,p,\phi)$. *Тогда*

а) при $1<p\leq 2$ *и* $\theta/p\geq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-2/p)}|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

б) при $1<p\leq 2$ *и* $0<\theta/p\leq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-1/p)-1}|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

в) при $p\geq 2$ *и* $\theta/2\geq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta r}|\hat{f}(k)|^{\theta}$;

г) при $p\geq 2$ *и* $0<\theta/2\leq 1$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1/2+r)}|\hat{f}(k)|^{\theta}$.

Теперь получим аналогичные теореме 2 оценки для функций с коэффициентами Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ класса GM.

Теорема 4. *Пусть* $1<p<\infty$, $\theta\geq 1$, $f\in L^p[0,1)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty}\in GM$. *Для включения* $f\in B(\theta,p,\phi)$ *достаточными являются следующие условия:*

а) $p\geq 2$, $\theta/p\geq 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(k))^{1-\theta/p}(\beta(k))^{\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta}k^{\theta-2\theta/p}; \tag{10}$$

б) $p\geq 2$, $0<\theta/p\leq 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\hat{f}(k))^{\theta}k^{\theta-\theta/p-1}(k\alpha(k)+\beta(k)); \tag{11}$$

в) $1<p\leq 2$, $\theta/p\geq 1$ *и сходятся ряды* (10) *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)(\hat{f}(k))^{\theta}k^{\theta-\theta/p}; \tag{12}$$

г) $1<p\leq 2$, $0<\theta/p\leq 1$ *и сходятся ряды* (11) *и* (12).

Доказательство. а. В этом случае применим результат пункта а) теоремы 2.

б. Пользуясь леммой 2 и оценкой 1) леммы 3, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E_k(f)_p^{\theta} \leq C_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\hat{f}(i)\right)^p i^{p-2}\right)^{\theta/p} \leq$$

$$\leq C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{f}(k)\right)^{\theta}k^{\theta-2\theta/p}k^{\theta/p-1}\left(k\alpha(k)+\beta(k)\right) \leq C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{f}(k)\right)^{\theta}k^{\theta-\theta/p-1}\left(k\alpha(k)+\beta(k)\right).$$

С помощью леммы 4 заключаем, что $f\in B\left(\theta,p,\phi\right)$.

в. В силу неравенства (8) имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E_k(f)_p^{\theta} \le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)\left(\sum_{i=k}^{\infty}(\hat{f}(i))^p i^{p-2}\right)^{\theta/p} + C_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta} = I_1 + I_2. \tag{13}$$

Сходимость I_2 следует из условия. Ряд I_1 аналогично пункту а) теоремы 2 оценивается через (10). Поэтому левая часть (13) сходится.

г. Снова рассмотрим неравенство (13). К I_1 применяем лемму 2 аналогично пункту б), а сходимость ряда I_2 вытекает из условия. Осталось применить лемму 4.

Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in L^p[0,1)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty} \in GM$, $\phi(t)$ *такова, что* $\beta(k) \le Ck\alpha(k)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta}$, *то* $f \in B(\theta,p,\phi)$.

Доказательство. Ряды (10) и (11) с помощью неравенства $\beta(k) \le Ck\alpha(k)$ мажорируются рядом (12).

Следствие 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in L^p[0,1)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$, $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-1/p)-1}(\hat{f}(k))^{\theta}$ *следует, что* $f \in B(\theta,p,\phi)$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in B(\theta,p,\phi)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty} \in GM$. *Тогда*

а) если $1 < p \le 2$, $0 < \theta/p \le 1$, *то сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)^{1-\theta/p}\beta(k)^{\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta}k^{\theta-2\theta/p}; \tag{14}$$

б) если $1 < p \le 2$, $\theta/p \ge 1$, *а* $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *является почти возрастающей степени* $\gamma \in (0,1)$ *и квазиубывающей, то сходится ряд* (14);

в) если $p \ge 2$, $0 < \theta/p \le 1$, *а* $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *квазиубывает, то сходится ряд* (14);

г) если $p \ge 2$, $\theta/p \ge 1$, *а* $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *является почти возрастающей степени* $\gamma \in (0,1)$ *и квазиубывающей, то сходится ряд* (14).

Доказательство. а. Используем результат пункта б) теоремы 6.

б. Используя пункт 2) леммы 7 и пункт 2) леммы 3, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E_k(f)_p^{\theta} \ge C_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)\left(\sum_{i=k}^{\infty}(\hat{f}(i))^p i^{p-2}\right)^{\theta/p} \ge C_2\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(k))^{1-\theta/p}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha(i)\right)^{\theta/p}\times$$

$$\times\left((\hat{f}(k))^p k^{p-2}\right)^{\theta/p} = C_2\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(k))^{1-\theta/p}(\beta(k))^{\theta/p}\left((\hat{f}(k))^p k^{p-2}\right)^{\theta/p}.$$

В случаях в) или г) применяем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\hat{f}(i)\right)^p i^{p-2}\right)^{\theta/p} \le C_3\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E_k(f)_p^{\theta} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}\left(\hat{f}(k)\right)^{\theta}\right), \tag{15}$$

вытекающее из неравенства (9). Если $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$, то из ортогональности системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, неравенства Гельдера и леммы 9 получаем

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\hat{f}(k) = \int_0^1 (f(x) - t_n(x))(D_{2n}(x) - D_n(x))\,dx \le \|f - t_n\|_p\|D_{2n} - D_n\|_{p'} \le C_4 n^{1/p}E_n(f)_p,$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Но для $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$ имеем $n\hat{f}(2n), n\hat{f}(2n-1) = O\left(\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\hat{f}(k)\right)$, откуда легко вывести оценку $\hat{f}(n) = O\left(n^{1/p-1}E_{[n/2]}(f)_p\right)$. Поэтому в силу квазиубывания $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ находим

$$\sum_{k=2}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta} \le C_6\sum_{k=2}^{\infty}\alpha(k)E^{\theta}_{[k/2]}(f)_p \le C_6\sum_{k=2}^{\infty}\alpha([k/2])E^{\theta}_{[k/2]}(f)_p = 2C_6\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(k)E^{\theta}_{k}(f)_p.$$

Поскольку $\hat{f}(1) \le E_1(f)_p$, то в правой части (15) можно опустить вторую сумму. Дальнейшее доказывается аналогично пунктам а) и б).

Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in B(\theta, p, \phi)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty} \in GM$ *и* $\phi(t)$ *такова, что* $\beta(k) \ge Ck\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta}$ *сходится при выполнении одного из следующих условий:*

а) $1 < p \le 2$, $0 < \theta/p \le 1$;

б) $1 < p \le 2$, $\theta/p \ge 1$, $\{\alpha(k)\}_1^{\infty}$ *является почти возрастающей степени* $\gamma \in (0, 1)$ *и квазиубывает;*

в) $p \ge 2$, $0 < \theta/p \le 1$, $\{\alpha(k)\}_1^{\infty}$ *квазиубывает;*

г) $p \ge 2$, $\theta/p \ge 1$, $\{\alpha(k)\}_1^{\infty}$ *является почти возрастающей степени* $\gamma \in (0, 1)$ *и квазиубывает.*

Следствие 8. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$ *и* $\phi(t)$ *такова, что* $\beta(k) \asymp k\alpha(k)$. *Если, кроме того,* $\{\alpha(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *является почти возрастающей степени* $\gamma \in (0, 1)$ *и почти убывает, то условия* $f \in B(\theta, p, \phi)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha(k)k^{\theta-\theta/p}(\hat{f}(k))^{\theta} < \infty$ *равносильны. В частности, для* $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$, *условия* $f \in B(\theta, p, \phi)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\theta(r+1-1/p)-1}(\hat{f}(k))^{\theta} < \infty$ *равносильны.*

Замечание. Помимо критериев следствия 8 можно установить некоторые результаты о неулучшаемости результатов теорем 2 и 3 при более слабых условиях.

Автор выражает признательность С.С.Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М. : Физматгиз, 1958.

3. *Потапов М. К.* О взаимосвязи некоторых классов функций // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 4. С. 361–372.

4. *Потапов М. К.* О вложении и совпадении некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 4. С. 840–860.

5. *Volosivets S. S.* Fourier–Vilenkin series and analogs of Besov and Sobolev classes // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 343–363.

6. *Potapov M. K., Berisha M.* Modules of smoothness and Fourier coefficients of periodic functions of one variable // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1979. Vol. 26(40). P. 215–228.

7. *Бериша М.* О коэффициентах Фурье некоторых классов функций // Glasnik Mat. Ser. II. 1981. Vol. 16(36). P. 75–90.

8. *Бериша М.* Необходимые условия коэффициентов Фурье периодических функций, принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$-классам типа Бесова // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1984. Vol. 35(49). P. 87–92.

9. *Бериша М.* Оценка коэффициентов Фурье функций, принадлежащих классам Бесова // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1985. Vol. 38(52). P. 153–157.

10. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.

11. *Leindler L.* Generalization of inequlities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). 1970. Vol. 31, № 3–4. P. 279–285.

12. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

13. *Leindler L.* Inequalities of Hardy-Littlewood type // Analysis Math. 1976. Vol. 2, № 2. P. 117–123.

14. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

15. *Watari C.* On generalized Walsh–Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 16, № 3. P. 211–241.

16. *Агафонова Н. Ю.* О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 4. P. 247–262.