



УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В КРУГОВОМ ДИСКЕ, ЗАГРУЖЕННОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

В. М. Мирсалимов¹, Н. М. Калантарлы²

¹Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, mir-vagif@mail.ru

²Кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, nailyak1975@gmail.com

Рассматривается изотропный диск радиуса R , нагруженный на контуре двумя сосредоточенными силами P , приложенными в точках $z_1 = R$ и $z_2 = -R$. Предложена модель зарождения трещины в круговом диске, основанная на рассмотрении зоны процесса трещинообразования. Полагается, что зона процесса трещинообразования представляет собой слой конечной длины, содержащий материал с частично нарушенными связями между отдельными структурными элементами. Получены соотношения для определения критического значения внешней нагрузки, при которой происходит появление трещины.

Ключевые слова: круговой диск, зона ослабленных межчастичных связей материала, силы сцепления, зарождение трещины.

ВВЕДЕНИЕ

В современных машинах и агрегатах, паровых и газовых турбинах, в компрессорах и других устройствах широко используются круговые диски. Диски подвергаются нагрузкам, вызывающим в них сложное напряженное состояние. Задача о трещинообразовании в конструкциях и изделиях является важной проблемой теории прочности [1–3]. В [2, 3] предложена модель зарождения трещины с силами сцепления в наиболее нагруженных, но пока целостных областях деформируемого тела. Эта модель начального разрушения использовалась при расчете различных конструкций [4–9], при различных силовых и термосиловых воздействиях. В работе [9] предложена модель зарождения трещины в покрытии на упругом основании. В [10] разработана расчетная модель, в рамках которой описывается трещинообразование в барабане тормозного механизма при торможении автомобиля, и исследуется влияние малых отклонений от прямолинейной формы зоны ослабленных межчастичных связей материала на зарождение трещины в барабане. Статьи [11–18] посвящены исследованию трещинообразования в композиционных материалах и адгезионных соединениях. Для инженерной практики исследование вопросов трещинообразования имеет важное значение. К настоящему времени практически отсутствуют исследования по зарождению трещины в круговых дисках. Разработка расчетных моделей процесса трещинообразования в дисках представляет собой актуальную проблему механики материалов. Разработка методов исследования трещинообразования будет способствовать повышению работоспособности дисков, обоснованному выбору конструктивных параметров дисков на стадии проектирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим изотропный круговой диск радиуса R , нагруженный на контуре сосредоточенными удельными (отнесенными к толщине диска) силами P/h , приложенными в точках $z_1 = R$, $z_2 = -R$. Задачу рассматриваем как квазистатическую в постановке плосконапряженного состояния. По мере нагружения кругового диска в процессе эксплуатации силовой нагрузкой в диске будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем [3] как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа этих связей и размеры зоны предразрушения, в которой осуществляется взаимодействие берегов зоны ослабленных межчастичных связей, зависит от вида материала. Зародышевая трещина моделируется зоной предразрушения связями между берегами, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Так как указанная зона (прослойка перенапряженного материала) мала по сравнению с остальной частью диска, ее можно мысленно удалить [3], заменив разрезом,



поверхности которого взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. В исследуемом случае появление трещины представляет собой процесс перехода зоны предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Размер зоны ослабленных межчастичных связей материала при этом заранее неизвестен и подлежит определению.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в диске. В центре зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$, ось x_1 которой совпадает с зоной ослабленных межчастичных связей материала и образует угол α_1 с осью $(\theta = 0)$ (рис. 1). При действии внешних нагрузок на диск в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, будут возникать нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные усилия. Величины этих напряжений заранее неизвестны и также подлежат определению.

Граничные условия на берегах зоны предразрушения будут иметь вид

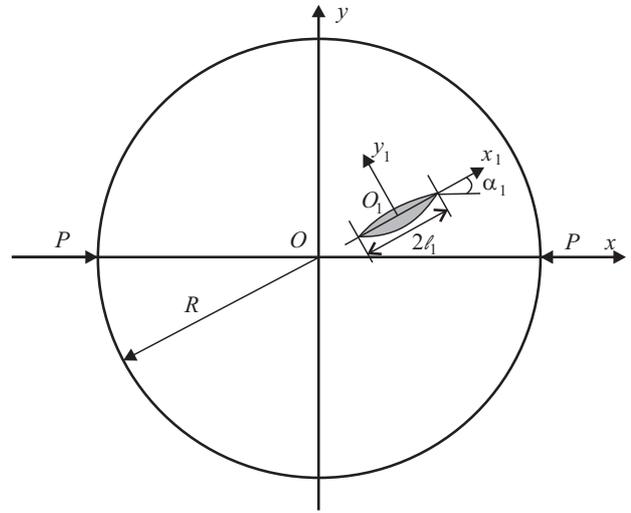


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1}(x_1) \quad \text{при} \quad |x_1| \leq l_1.$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи должны быть дополнены следующим уравнением:

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = \Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1} - iq_{x_1 y_1}), \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1 y_1}^2}.$$

Здесь функция $\Pi(x_1, \sigma_1)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей; σ_1 — модуль вектора усилий в связях; $(u^+ - u^-)$ — касательная, $(v^+ - v^-)$ — нормальная составляющая раскрытия берегов зоны предразрушения.

Для нахождения значения внешней нагрузки, при котором происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала

$$|(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-)| = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} — характеристика сопротивления материала диска трещинообразованию. Напряженное состояние в круговом диске ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1.$$

Здесь первые слагаемые $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — напряжения, возникающие в круговом изотропном диске при отсутствии зоны предразрушения. Для определения введенных компонент напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$, удовлетворяющих уравнениям плоской задачи теории упругости, приходим к следующей краевой задаче:

$$\sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = q_{y_1} + iq_{x_1 y_1} + f(x) \quad \text{при} \quad y_1 = 0, |x_1| \leq l_1, \quad (2)$$

$$\sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1 = F(\tau) \quad \text{на контуре} \quad \tau = R \exp(i\theta). \quad (3)$$

Для компонент тензора напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0, \sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$ [19] имеем:

$$\sigma_x^0 = -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{4(R-x)^3}{[(R-x)^2 + y^2]^2} + \frac{4(R+x)^3}{[(R+x)^2 + y^2]^2} - \frac{2}{R} \right],$$



$$\sigma_y^0 = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{2}{R} - \frac{4y^2(R-x)}{[(R-x)^2 + y^2]^2} - \frac{4y^2(R+x)}{[(R+x)^2 + y^2]^2} \right],$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{4(R-x)^2}{[(R-x)^2 + y^2]^2} - \frac{4(R+x)^2}{[(R+x)^2 + y^2]^2} \right],$$

$$\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 = \sigma_x^0 + \sigma_y^0, \quad \sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 + 2i\tau_{r\theta}^0 = [\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{r\theta}^0] e^{2i\theta}.$$

С помощью приведенных формул находятся функции $f(x_1)$ и $F(\tau)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -(\sigma_{y_1}^0 + i\tau_{x_1y_1}^0) \quad \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1, \\ F(\tau) &= -(\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0) \quad \text{при } |z| = R. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [19], граничные условия (2) запишем в виде

$$\Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\Phi_1(x_1) + \Psi_1(x_1) = q_{y_1} + iq_{x_1y_1} + f(x_1) \quad \text{при } |x_1| \leq l_1, \quad (5)$$

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - e^{2i\theta} [\tau\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] = \overline{F(\tau)}. \quad (6)$$

Здесь x_1 — аффикс точек берегов зоны предразрушения. Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и Ψ_1 , дающие решение краевой задачи (5), (6), ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_{01}(z) + \Phi_{11}(z), \quad \Psi_1(z) = \Psi_{01}(z) + \Psi_{11}(z), \quad (7)$$

Здесь комплексные потенциалы $\Phi_{11}(z)$ и $\Psi_{11}(z)$ находим в виде

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)dt}{t-z_1}, \quad \Psi_{11}(z) = \frac{e^{-2i\alpha_1}}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{\overline{g_1(t)}}{t-z_1} - \frac{\overline{T_1}e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2} g_1(t) \right] dt, \quad (8)$$

где $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$; $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$; $g_1(t)$ — искомая функция, характеризующая раскрытие берегов зоны предразрушения.

Неизвестная функция $g_1(t)$ и комплексные потенциалы $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ должны быть определены из краевых условий на контуре $L(r = R)$ и берегах зоны предразрушения. Используя соотношения (7), (8) для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$, краевые условия (4) представим в виде

$$\Phi_{01}(\tau) + \overline{\Phi_{01}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau\Phi_{01}'(\tau) + \overline{\Psi_{01}(\tau)}] = F(\tau) - f_1(\theta), \quad (9)$$

где

$$f_1(\theta) = \Phi_{11}(\tau) + \overline{\Phi_{11}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau\Phi_{11}'(\tau) + \overline{\Psi_{11}(\tau)}].$$

Для решения граничной задачи (9) относительно комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ используем метод Н. И. Мусхелишвили [19]. Для комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ имеем:

$$\Phi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L N_*(\tau) \left(\frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau, \quad N_*(\tau) = F(\tau) - f_1(\theta),$$

$$\Psi_{01}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{01}(z) + \frac{1}{z^2} \overline{\Phi_{01}} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi_{01}'(z).$$

После интегрирования и некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{01}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left(\frac{1}{z\overline{T_1} - 1} + \frac{1}{2} \right) \overline{T_1}e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[\frac{T_1}{2} - \frac{z^2\overline{T_1} - 2z + T_1}{(z\overline{T_1} - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left(\frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Psi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + \left(z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1 \right) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt + \\ + \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z), \\ \Phi_{00}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Удовлетворяя функциями (7), (8) граничным условиям (5) на берегах зоны предразрушения, после некоторых преобразований получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1(x_1)$:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi [q_{y_1}(x_1) + iq_{x_1 y_1}(x_1) + f(x_1) + f_0(x_1)] \quad |x_1| \leq l_1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_0(x_1) = - \left[\Phi_{00}(x_1) + \overline{\Phi_{00}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_{00}(x_1)} + \overline{\Psi_{00}(x_1)} \right], \\ \Psi_{00}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z), \\ R(t, x_1) = \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left(\frac{1}{T_1 - X_1} + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{T}_1 - \bar{X}_1} \right) - \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left[\frac{X_1 \bar{T}_1^2}{1 - X_1 \bar{T}_1} + \frac{\bar{X}_1^2 T_1 - 2\bar{X}_1 + \bar{T}_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} + \right. \\ \left. + e^{-2i\alpha_1} \frac{2X_1(T_1 \bar{T}_1 - 1) + \bar{T}_1^2(\bar{X}_1 + \bar{T}_1)(\bar{X}_1 T_1 - 3) + 4T_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^3} \right], \\ S(t, x_1) = \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_1 - \bar{X}_1} - \frac{T_1 - X_1}{(\bar{T}_1 - \bar{X}_1)^2} e^{-2i\alpha_1} \right] - \\ - \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{T_1^2 X_1}{1 - T_1 \bar{X}_1} + \frac{X_1^2 \bar{T}_1 - 2X_1 + T_1}{(1 - X_1 \bar{T}_1)^2} + \frac{T_1^2 (X_1 - T_1) e^{-2i\alpha_1}}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} \right], \\ X_1 = x_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0. \end{aligned}$$

Для внутренней зоны предразрушения к сингулярному интегральному уравнению необходимо добавить дополнительное равенство:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(t) dt = 0, \tag{10}$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения. Так как напряжения в диске всюду ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения ищется в классе всюду ограниченных функций. Используя замену переменных и отделяя действительную и мнимую части и процедуру алгебраизации [20], вместо каждого действительного сингулярного интегрального уравнения при дополнительных условиях (10) получаем конечную алгебраическую систему, состоящую из M уравнений, относительно приближенных значений искомых функций $v_1(t_m)$ и $u_1(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) в узловых точках соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\ell_1 R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) g_1^0(t_m) + \overline{g_1^0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = \\ = q_{y_1}(x_r) + iq_{x_1 y_1}(x_r) + f(x_r) + f_0(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1), \\ \sum_{m=1}^M g_1^0(t_m) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$



Здесь значения t_m и x_r определяются формулами

$$t_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если перейти в (11) к сопряженным значениям, получаем еще M алгебраических уравнений.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух уравнений, выражающих условия разрешимости интегрального уравнения. Записывая эти условия:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{(2m-1)\pi}{4M} &= 0, \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{(2m-1)\pi}{4M} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

получим две замкнутые конечные алгебраические системы.

В правые части системы (10) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1 y_1}(x_1)$ касательных напряжений в узловых точках зоны предразрушения. Условиями, определяющими неизвестные напряжения в связях между берегами зоны предразрушения, является дополнительное уравнение (1). В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее представить для производной раскрытия берегов зоны предразрушения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0))] = \frac{\partial}{\partial x_1} [\Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))].$$

Используя полученное решение, можно записать:

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_1} [\Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))].$$

Это комплексное уравнение служит для определения неизвестных напряжений q_{y_1} и $q_{x_1 y_1}$ в связях между берегами зон предразрушения. Для левой части соотношения (1) имеем:

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1. \tag{13}$$

С учетом (1) соотношение (13) принимает вид

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1)). \tag{14}$$

Отделяя в (14) действительные и мнимые части, получим:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} v_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1) q_{y_1}(x_1), \tag{15}$$

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} u_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1) q_{x_1 y_1}(x_1). \tag{16}$$

Для построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами зоны предразрушения, потребуем выполнения условий (15), (16) в узловых точках t_m , содержащихся в зоне предразрушения. В результате получим еще две системы из M уравнений для определения приближенных значений $q_{y_1}(t_m)$ и $q_{x_1 y_1}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{cases} C_0 v_1^0(t_1) = \Pi(t_1, \sigma_1(t_1)) q_{y_1}(t_1), \\ C_0 (v_1^0(t_1) + v_1^0(t_2)) = \Pi(t_2, \sigma_1(t_2)) q_{y_1}(t_2), \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^M v_1^0(t_m) = \Pi(t_M, \sigma_1(t_M)) q_{y_1}(t_M), \end{cases}$$



происходит зарождение трещин. Размер предельной минимальной зоны предразрушения, при которой происходит трещинообразование, следует рассматривать как проектную характеристику материала диска. На основе предложенной расчетной модели, учитывающей наличие в диске зон ослабленных межчастичных связей, разработан метод расчета значений ряда параметров, при которых начинается трещинообразование.

Библиографический список

1. Болотин В. В. Механика зарождения трещин и начального развития усталостных трещин // ФХММ. 1986. Т. 22, № 1. С. 18–23.
2. Мирсалимов В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Матем. моделирование. 2005. Т. 17, № 2. С. 35–45.
3. Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
4. Мир-Салимзаде М. В. Зарождение трещин в перфорированной подкрепленной пластине // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6 (292). С. 1030–1039.
5. Вагари А. Р., Мирсалимов В. М. Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве, упругие свойства которого зависят от температуры // ПМТФ. 2012. № 4. С. 138–148.
6. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies // Acta Polytechnica Hungarica. 2012. Vol. 9, № 2. P. 169–183.
7. Ахмедова М. В. Зарождение трещин в тонкой пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий // Вестн. ЧПГУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 3–14.
8. Искендеров Р. А. Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 3. С. 18–28.
9. Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base // Intern. J. Damage Mech. 2014. Vol. 23(3). P. 430–450.
10. Зильфугаров Э. И. Моделирование зарождения искривленной трещины в тормозном барабане автомобиля // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2014. № 1 (303). С. 24–30.
11. Mohammed I., Liechti K. M. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners // J. Mech. Phys. Solids. 2000. Vol. 48, iss. 4. P. 735–764.
12. Yang B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates // Intern. J. Fracture. 2002. Vol. 115, iss. 2. P. 173–191.
13. Yang Q., Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites // Intern. J. Fracture. 2005. Vol. 133, iss. 2. P. 107–137.
14. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M. B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials // Computational Mechanics. 2007. Vol. 39, iss. 2. P. 127–139.
15. Gutkin M. Yu., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites // Physics of the Solid State. 2007. Vol. 49, iss. 2. P. 261–266.
16. Chen Z., Butcher C. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking // Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications. 2013. Vol. 195. P. 223–243.
17. Гасанов Ф. Ф. Зарождение трещин в изотропной среде с периодической системой круговых отверстий, заполненных жесткими включениями, при продольном сдвиге // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 44–50.
18. Гасанов Ф. Ф. Зарождение трещины в композите, армированном однонаправленными ортотропными волокнами при продольном сдвиге // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 2 (27). С. 45–50.
19. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
20. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука, 1987. 256 с.
21. Ильюшин А. А. Пластичность. М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. 376 с.

Modelling of Cracking in Circular Disk Loaded by Concentrated Forces

V. M. Mirsalimov, N. M. Kalantarly

Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9, B. Vahabzadeh str., AZ1141, Baku, Azerbaijan, mir-vagif@mail.ru, nailyak1975@gmail.com

An isotropic disk of radius R , loaded on the contour by two concentrated forces P , applied to the points $z_1 = R$ and $z_2 = -R$, is considered. A model of cracking in a circular disk, based on consideration of fracture process zone, is proposed. It is assumed that the fracture process zone is a finite length layer, containing material with partially broken bonds between individual structural elements. Equations for determination of the external load critical value at which the crack is observed are obtained.

Key words: circular disk, zone of weakened interparticle material bonds, cohesive forces, crack nucleation.



References

1. Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks. *Soviet materials science*, 1986, vol. 22, iss. 1, pp. 14–19. DOI: 10.1007/BF00720861.
2. Mirsalimov V. M. Initiation of defects such as a crack in the bush of contact pair. *Matem. Mod.*, 2005, vol. 17, no. 2, pp. 35–45 (in Russian).
3. Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, iss. 1, pp. 132–151. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.003.
4. Mir-Salimzade M. V. Generation of Cracks in a Perforated Reinforced Plate. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1030–1039.
5. Vagari A. P., Mirsalimov V. M. Nucleation of Cracks in a Perforated Heat-Releasing Material with Temperature-Dependent Elastic Properties. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, no. 4, pp. 138–148.
6. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2012, vol. 9, no. 2, pp. 169–183.
7. Akhmedova M. V. Cracks nucleation in thin plate, weakened by the periodic system of the curvilinear holes. *Vestnik chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2013, no. 4 (18), pp. 3–14.
8. Iskenderov R. A. The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, no. 3, pp. 18–28.
9. Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base. *Intern. J. Damage Mech.*, 2014, vol. 23(3), pp. 430–450.
10. Зульфугаров Э. И. Моделирование зарождения искривленной трещины в тормозном барабане автомобиля. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and applied problems of engineering and technology], 2014, no. 1 (303), pp. 24–30 (in Russian).
11. Mohammed I., Liechti K. M. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, vol. 48, iss. 4, pp. 735–764.
12. Yang B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates. *Intern. J. Fracture*, 2002, vol. 115, iss. 2, pp. 173–191.
13. Yang Q., Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. *Intern. J. Fracture*, 2005, vol. 133, iss. 2, pp. 107–137.
14. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M. B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials. *Computational Mechanics*, 2007, vol. 39, iss. 2, pp. 127–139.
15. Gutkin M. Yu., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites. *Physics of the Solid State*, 2007, vol. 49, iss. 2, pp. 261–266.
16. Chen Z., Butcher C. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking. *Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications*, 2013, vol. 195, pp. 223–243.
17. Hasanov F. F. Nucleation of cracks in isotropic medium with periodic system of the circular holes filled with rigid inclusions, at longitudinal shear. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2014, no. 3, pp. 44–50 (in Russian).
18. Hasanov F. F. Nucleation of the crack in a composite, reinforced unidirectional orthotropic fibres at longitudinal shear. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2014, no. 2 (27), pp. 45–50 (in Russian).
19. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka, 1966, 707 p. (in Russian).
20. Mirsalimov V. M. *Multidimensional elasto-plastic problems*. Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
21. Il'yushin A. A. *Plasticity*. Moscow; Leningrad, GITTL, 1948, 376 p. (in Russian).

УДК 629

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. А. Панкратов

Кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью ограниченного по модулю управления, ортогонального плоскости орбиты КА. Найдено приближённое аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного на смежных участках активного движения КА управления.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.