References

1. Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks. *Soviet materials science*, 1986, vol. 22, iss. 1, pp. 14–19. DOI: 10.1007/BF00720861.
2. Mirsalimov V. M. Initiation of defects such as a crack in the bush of contact pair. *Matem. Mod.*, 2005, vol. 17, no. 2, pp. 35–45 (in Russian).
3. Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, iss. 1, pp. 132–151. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.003.
4. Mir-Salimzade M. V. Generation of Cracks in a Perforated Reinforced Plate. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1030–1039.
5. Vagari A. P., Mirsalimov V. M. Nucleation of Cracks in a Perforated Heat-Releasing Material with Temperature-Dependent Elastic Properties. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012. no. 4, pp. 138–148.
6. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylin-drical Bodies. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2012, vol. 9, no. 2, pp. 169–183.
7. Akhmedova M. V. Cracks nucleation in thin plate, weakened by the periodic system of the curvilinear holes. *Vestnik chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel"nogo sostoianiia*, 2013. no. 4 (18), pp. 3–14.
8. Iskenderov R. A. The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending. *Structural Mechanics of Enginiring Constructions and Buildings*, 2013. no. 3, pp. 18–28.
9. Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base. *Intern. J. Damage Mech.*, 2014, vol. 23(3), pp. 430–450.
10. Зульфугаров Э. И. Моделирование зарождения искривленной трещины в тормозном барабане автомобиля. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and applied problems of engineering and technology], 2014, no. 1 (303), pp. 24–30 (in Russian).
11. Mohammed I., Liechti K. M. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, vol. 48, iss. 4, pp. 735–764.
12. Yang B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates. *Intern. J. Fracture*, 2002, vol. 115, iss. 2, pp. 173–191.
13. Yang Q., Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. *Intern. J. Fracture*, 2005, vol. 133, iss. 2, pp. 107–137.
14. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M. B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials. *Computational Mechanics*, 2007, vol. 39, iss. 2, pp. 127–139.
15. Gutkin M. Yu., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites. *Physics of the Solid State*, 2007, vol. 49, iss. 2, pp. 261–266.
16. Chen Z., Butcher C. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking. *Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications*, 2013, vol. 195, pp. 223–243.
17. Hasanov F. F. Nucleation of cracks in isotropic medium with periodic system of the circular holes filled with rigid inclusions, at longitudinal shear. *Structural Mechanics of Enginiring Constructions and Buildings*, 2014. no. 3, pp. 44–50 (in Russian).
18. Hasanov F. F. Nucleation of the crack in a composite, reinforced unidirectional orthotropous fibres at longitudinal shear. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2014, no. 2 (27), pp. 45–50 (in Russian).
19. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka, 1966, 707 p. (in Russian).
20. Mirsalimov V. M. *Multidimensional elasto-plastic problems*. Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
21. Il'yushin A. A. Plasticity. Moscow; Leningrad, GITTL, 1948, 376 p. (in Russian).

УДК 629

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. А. Панкратов

Кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью ограниченного по модулю управления, ортогонального плоскости орбиты КА. Найдено приближённое аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного на смежных участках активного движения КА управления.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вектор ускорения $\boldsymbol{u}$ от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат X — геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре O притяжения Земли. Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось OX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение орбитальную систему координат η. Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось η_1 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора $\boldsymbol{c}$ момента скорости центра масс КА, а ось η_2 образует правую тройку с осями η_1 и η_3. Ориентация системы координат η в инерциальной системе координат X задаётся долготой восходящего узла Ω_u, наклоном орбиты I, угловым расстоянием перицентра от узла ω_π и истинной аномалией φ, характеризующей положение КА на орбите.

Уравнения ориентации орбитальной системы координат η в параметрах Эйлера λ_j имеют вид [1–4]

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3, \qquad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2} \boldsymbol{i}_3,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad c = \text{const}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат η, $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, $\circ$ — символ кватернионного умножения; φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; $r = |\boldsymbol{r}|$ — модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e — параметр и эксцентриситет орбиты соответственно, $c = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\boldsymbol{v}$ центра масс КА); u — проекция вектора реактивного ускорения $\boldsymbol{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА).

Компоненты λ_j кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ связаны с классическими угловыми переменными Ω_u, I, ω_π и φ соотношениями:

$$\lambda_0 = \cos\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2}\right), \qquad \lambda_1 = \sin\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2}\right),$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2}\right), \qquad \lambda_3 = \cos\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2}\right).$$

Пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление $\boldsymbol{u}$:

$$-u_{\max} \leqslant u \leqslant u_{\max},$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{\text{н}} = \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}} \circ \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \qquad \varphi(t^*) = \varphi^*, \qquad \boldsymbol{\lambda}(t^*) = \pm\boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi^*}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi^*}{2}\right)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2)\, dt, \qquad \alpha_1,\ \alpha_2 = \text{const} \geqslant 0$$

или функционал

$$J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|)\, dt, \qquad \alpha_1,\ \alpha_2 = \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{2}$$

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу быстродействия. При $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ в случае минимизации функционала (2) имеем задачу минимизации затрат характеристической скорости [5].

Кватернионная переменная $\mathbf{\Lambda}$ характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная φ — положение КА на орбите. Величины c, p, e, φ_0, $\mathbf{\Lambda}^{\text{н}}$ и $\mathbf{\Lambda}^*$ заданы. Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины t^*, φ^*.

Аналитическое решение уравнений (1) в случае произвольного управления $u = u(t)$ не найдено. Отметим, что задача интегрирования уравнений (1) есть известная задача Дарбу [6]. Решение указанной задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работу А. В. Молоденкова [7]). Известно, что оптимальное управление, находимое из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина по переменной u, в случае минимизации функционала (2) или при решении задачи быстродействия сохраняет постоянное значение на смежных участках активного движения КА [8, 9]. В работе [10] был предложен способ построения решения уравнений (1) при условии, что орбита КА является круговой ($e = 0$), а управление u — постоянным.

Отметим, что для нахождения аналитического решения уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии φ и ввести безразмерные переменные. Фазовые переменные λ_j являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b, t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r, t и управлением u соотношениями: $r = Rr^b$, $u = u_{\max}u^b$, $t = Tt^b$, где R — характерное расстояние (в его качестве принималась величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V, T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = c/R$, $T = R^2/c$.

Отметим также, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых переменных появляется характерный безразмерный параметр $N^b = u_{\max}R^3/c^2$.

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных примет вид [9]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \left[N^b (r^b)^3 u^b\, \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\right], \qquad r^b = \frac{1}{1 + e\cos\varphi}. \tag{3}$$

2. ПЕРВАЯ ПОПРАВКА

Предположим, что орбита КА является околокруговой ($|e| \ll 1$), а управление постоянным. Следуя [11], будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра e :

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + \ldots \tag{4}$$

Входящий в уравнения (1) множитель $(r^b)^3$ можно также представить в виде ряда по степеням e :

$$(r^b)^3 = \frac{1}{(1 + e\cos\varphi)^3} = 1 + 3e\cos\varphi + 6e^2\cos^2\varphi + \ldots$$

Ограничимся пока нахождением лишь первого поправочного члена ряда (4), т.е. будем искать приближённое решение задачи в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + O(e^2). \tag{5}$$

Тогда уравнения для кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ примут вид

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \left\{[N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - 3Ne\cos\varphi\,\boldsymbol{i}_1\right\}. \tag{6}$$

Здесь $N = N^b u^b = \mathrm{const}$.

Подставляя разложение (5) в кватернионное уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e, имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(0)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{(0)} \circ [N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3], \tag{7}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(1)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{(1)} \circ [N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - \frac{3}{2}N\cos\varphi\left(\boldsymbol{\lambda}^{(0)} \circ \boldsymbol{i}_1\right). \tag{8}$$

При этом необходимо учитывать тот факт, что умножение кватернионов ассоциативно, но в общем случае не коммутативно [6, 12].

Уравнение (7) совпадает с уравнением ориентации орбитальной системы координат в случае, когда КА движется по круговой орбите под действием постоянного управления. Согласно [10] общее решение этого уравнения имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{C}\cos\left(\frac{\omega\varphi}{2}\right) + \boldsymbol{D}\sin\left(\frac{\omega\varphi}{2}\right), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ — кватернионные постоянные интегрирования, а $\omega = \sqrt{N^2+1} = \mathrm{const}$.

При этом уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(1)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{(1)} \circ [N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - \frac{3}{4}N\Big\{(\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{i}_1)\cdot\Big[\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] +$$
$$+\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big]\Big] + (\boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{i}_1)\cdot\Big[\sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] + \sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big]\Big]\Big\}. \tag{10}$$

Исключая из рассмотрения решение соответствующего однородного уравнения, будем искать решение (10) в виде

$$\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \boldsymbol{A}^{+}\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] + \boldsymbol{B}^{+}\sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] + \boldsymbol{A}^{-}\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big] + \boldsymbol{B}^{-}\sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big], \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A}^{+}$, $\boldsymbol{B}^{+}$, $\boldsymbol{A}^{-}$, $\boldsymbol{B}^{-}$ — постоянные кватернионы.

Подставляя (11) в уравнение (10) и приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах с одинаковыми аргументами, получим, что

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{+} &= \frac{3N}{8(1+\omega)}\boldsymbol{C} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2] + \frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)}(\boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{i}_1),\\
\boldsymbol{B}^{+} &= -\frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)}(\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{i}_1) + \frac{3N}{8(1+\omega)}\boldsymbol{D} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2],\\
\boldsymbol{A}^{-} &= \frac{3N}{8(1-\omega)}\boldsymbol{C} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2] + \frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)}(\boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{i}_1),\\
\boldsymbol{B}^{-} &= -\frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)}(\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{i}_1) + \frac{3N}{8(1-\omega)}\boldsymbol{D} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2].
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) с точностью до слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше первой, имеет вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{C}\cos\left(\frac{\omega\varphi}{2}\right) &+ \boldsymbol{D}\sin\left(\frac{\omega\varphi}{2}\right) +\\
+e\Big\{\Big(\frac{3N}{8(1+\omega)}\boldsymbol{C} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2] &+ \frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)}(\boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{i}_1)\Big)\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] +\\
+\Big(-\frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)}(\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{i}_1) &+ \frac{3N}{8(1+\omega)}\boldsymbol{D} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2]\Big)\sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}+1\Big)\varphi\Big] +\\
+\Big(\frac{3N}{8(1-\omega)}\boldsymbol{C} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2] &+ \frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)}(\boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{i}_1)\Big)\cos\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big] +\\
+\Big(-\frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)}(\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{i}_1) &+ \frac{3N}{8(1-\omega)}\boldsymbol{D} \circ [-N - \boldsymbol{i}_2]\Big)\sin\Big[\Big(\frac{\omega}{2}-1\Big)\varphi\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть необходимо найти частное решение уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{\text{н}},$$

тогда для определения кватернионов $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{a}_{11} + \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{\lambda}^{\text{н}}, \qquad \boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{a}_{21} + \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{a}_{22} = \left.\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\text{н}} \circ \{[N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - 3Ne\,\boldsymbol{i}_1\}. \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{a}_{11} = 1 + 0.75e + (0.75e/N)\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{a}_{12} = (0.75e/N)\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{a}_{21} = 3e \cdot (1 - 3N^2)/(8N)\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{a}_{22} = \omega \cdot (0.5 - 3e/8) - 3e \cdot \omega/(8N)\boldsymbol{i}_2$.

Решение системы (14) имеет вид

$$\boldsymbol{D} = \left[\boldsymbol{\lambda}^{\text{н}} \circ \boldsymbol{a}_{11}^{-1} - \left.\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right] \circ \left(\boldsymbol{a}_{12} \circ \boldsymbol{a}_{11}^{-1} - \boldsymbol{a}_{22} \circ \boldsymbol{a}_{21}^{-1}\right)^{-1}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\lambda}^{\text{н}} \circ \boldsymbol{a}_{11}^{-1} - \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{a}_{22} \circ \boldsymbol{a}_{11}^{-1}. \tag{15}$$

На рис. 1 показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат

$$err_j(e) = \max_{\varphi \in [0;\, 2\pi]} |\lambda_j^{\text{прибл}}(\varphi,\, e) - \lambda_j^{\text{РК}}(\varphi,\, e)|, \quad j = \overline{0,3}.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi,\, e)$ — приближённое решение, рассчитанное по формулам (13), (15); а $\boldsymbol{\lambda}^{\text{РК}}(\varphi,\, e)$ — результат интегрирования уравнения (3) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с шагом $h = 0.001$ рад. Отметим, что параметры задачи полагались равными:

$$\begin{gathered} \Omega_u^0 = \Omega_u(0) = 215.25°, \qquad I^0 = I(0) = 64.8°, \qquad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0°, \\ \varphi_0 = 0 \text{ рад.}, \qquad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \qquad N = 0.35. \end{gathered} \tag{16}$$

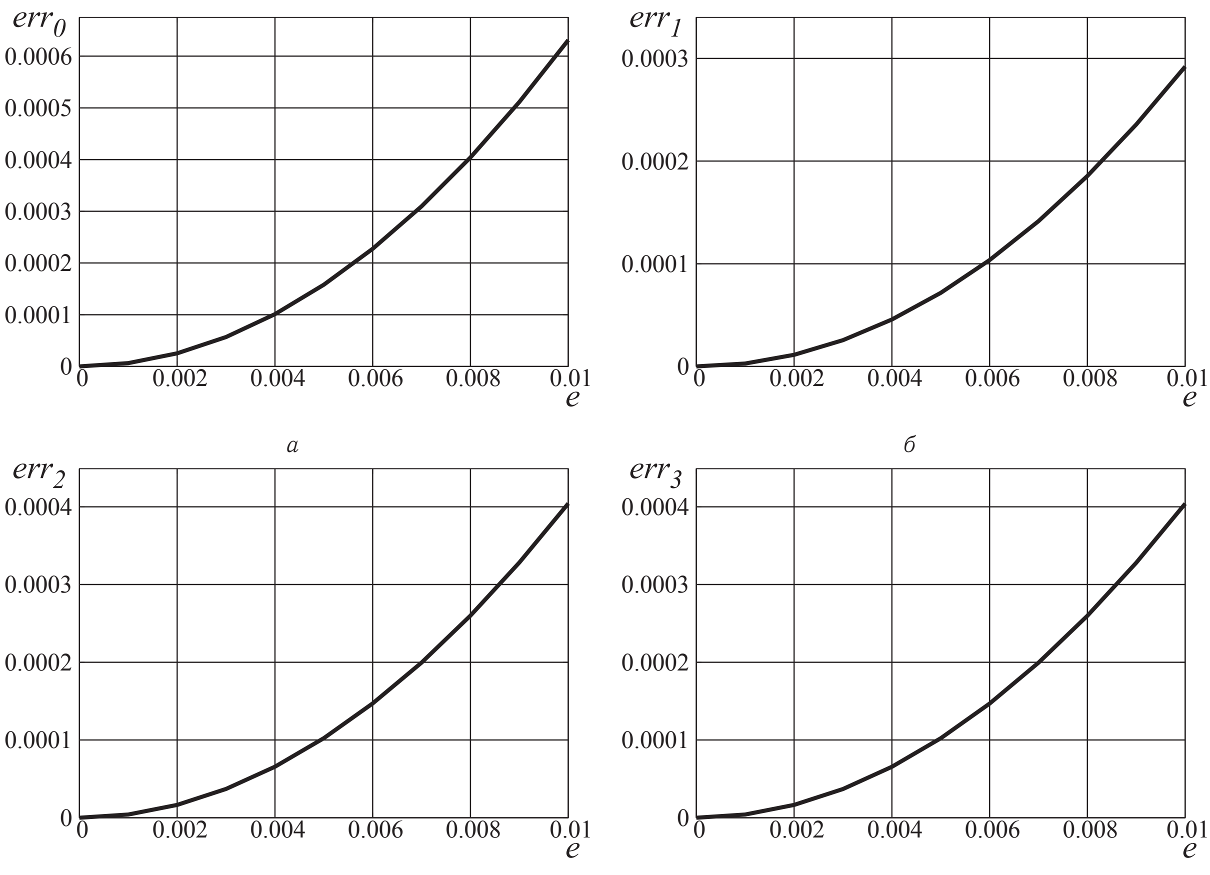

Рис. 1. Компоненты кватерниона погрешности (первая поправка): *а* — скалярная часть; *б*–*г* — компоненты векторной части

При этом компоненты начального кватерниона ориентации орбитальной системы координат имели вид

$$\lambda_0^{\text{н}} = -0.255650, \qquad \lambda_1^{\text{н}} = -0.162241, \qquad \lambda_2^{\text{н}} = 0.510674, \qquad \lambda_3^{\text{н}} = 0.804694. \tag{17}$$

Указанный кватернион $\boldsymbol{\lambda}^{\text{н}}$ соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии φ — ноль радиан).

3. ВТОРАЯ ПОПРАВКА

Уточним полученное решение и найдём второй поправочный член ряда (4), т. е. теперь приближённое решение задачи примет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + O(e^3). \tag{18}$$

В этом случае уравнения для кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ будут иметь вид

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \left\{[N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - N\left(3e\cos\varphi - 6e^2\cos^2\varphi\right)\,\boldsymbol{i}_1\right\}, \tag{19}$$

Подставляя разложение (18) в кватернионное уравнение (19) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e, имеем помимо (7), (8) следующее уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(2)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{(2)} \circ [N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] - \frac{3}{2}N\cos\varphi\left(\boldsymbol{\lambda}^{(1)} \circ \boldsymbol{i}_1\right) + 3N\cos^2\varphi\left(\boldsymbol{\lambda}^{(0)} \circ \boldsymbol{i}_1\right). \tag{20}$$

С учётом найденных ранее выражений (9), (11) для $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ уравнение (20) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(2)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{(2)} \circ [N\,\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3] + \\ +\frac{3}{4}N\left\{(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^+) \circ \boldsymbol{i}_1\cos\left[\left(\frac{\omega}{2}+2\right)\varphi\right] + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^+) \circ \boldsymbol{i}_1\sin\left[\left(\frac{\omega}{2}+2\right)\varphi\right] + \right. \\ +(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^-) \circ \boldsymbol{i}_1\cos\left[\left(\frac{\omega}{2}-2\right)\varphi\right] + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^-) \circ \boldsymbol{i}_1\sin\left[\left(\frac{\omega}{2}-2\right)\varphi\right] + \\ \left. +(2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^+ - \boldsymbol{A}^-) \circ \boldsymbol{i}_1\cos\frac{\omega\varphi}{2} + (2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-) \circ \boldsymbol{i}_1\sin\frac{\omega\varphi}{2}\right\}.\end{gathered} \tag{21}$$

Так как функции $\cos(\omega\varphi/2)$ и $\sin(\omega\varphi/2)$ входят в фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, то решение уравнения (21) будем искать в виде [13]

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \boldsymbol{E}^+\cos\left[\left(\frac{\omega}{2}+2\right)\varphi\right] + \boldsymbol{F}^+\sin\left[\left(\frac{\omega}{2}+2\right)\varphi\right] + \boldsymbol{E}^-\cos\left[\left(\frac{\omega}{2}-2\right)\varphi\right] + \\ +\boldsymbol{F}^-\sin\left[\left(\frac{\omega}{2}-2\right)\varphi\right] + \boldsymbol{G}\varphi\cos\frac{\omega\varphi}{2} + \boldsymbol{H}\varphi\sin\frac{\omega\varphi}{2},\end{gathered} \tag{22}$$

где $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{F}^+$, $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{F}^-$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ — постоянные кватернионы.

Подставляя (22) в уравнение (21) и приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах с одинаковыми аргументами, имеем:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E}^+ = \frac{-3N}{16(\omega+2)}\left\{\boldsymbol{C} \circ \left[-N - \frac{3N}{8(1+\omega)}\left(N^2 - 1 + (\omega+2)(\omega+4)\right) - \right.\right. \\ \left.\left. -\left(1 + \frac{3N^2}{4(1+\omega)}\right)\boldsymbol{i}_2\right] + \boldsymbol{D} \circ \left[\left(\omega + 4 + \frac{3N^2(\omega+3)}{4(1+\omega)}\right)\boldsymbol{i}_1 - \frac{3N}{4(1+\omega)}\boldsymbol{i}_3\right]\right\}, \\ \boldsymbol{F}^+ = \frac{3N}{16(\omega+2)}\left\{\boldsymbol{C} \circ \left[\left(\omega + 4 + \frac{3N^2(\omega+3)}{4(1+\omega)}\right)\boldsymbol{i}_1 - \frac{3N}{4(1+\omega)}\boldsymbol{i}_3\right] + \right. \\ \left. +\boldsymbol{D} \circ \left[N + \frac{3N}{8(1+\omega)}\left(N^2 - 1 + (\omega+2)(\omega+4)\right) + \left(1 + \frac{3N^2}{4(1+\omega)}\right)\boldsymbol{i}_2\right]\right\},\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E}^- = \frac{3N}{16(\omega-2)}\left\{\boldsymbol{C} \circ \left[-N - \frac{3N}{8(1-\omega)}\left(N^2 - 1 + (\omega-2)(\omega-4)\right) - \right.\right. \\ \left.\left. -\left(1 + \frac{3N^2}{4(1-\omega)}\right)\boldsymbol{i}_2\right] + \boldsymbol{D} \circ \left[\left(\omega - 4 + \frac{3N^2(\omega-3)}{4(1-\omega)}\right)\boldsymbol{i}_1 + \frac{3N}{4(1-\omega)}\boldsymbol{i}_3\right]\right\}, \\ \boldsymbol{F}^- = \frac{3N}{16(\omega-2)}\left\{-\boldsymbol{C} \circ \left[\left(\omega - 4 + \frac{3N^2(\omega-3)}{4(1-\omega)}\right)\boldsymbol{i}_1 + \frac{3N}{4(1-\omega)}\boldsymbol{i}_3\right] + \right. \\ \left. +\boldsymbol{D} \circ \left[-N - \frac{3N}{8(1-\omega)}\left(N^2 - 1 + (\omega-2)(\omega-4)\right) - \left(1 + \frac{3N^2}{4(1-\omega)}\right)\boldsymbol{i}_2\right]\right\},\end{gathered} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{3}{16}\left\{\boldsymbol{C}\circ[5N-3\boldsymbol{i}_2]-3\omega\,(\boldsymbol{D}\circ\boldsymbol{i}_1)\right\}\circ\boldsymbol{i}_1,$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{3}{16}\left\{3\omega\,(\boldsymbol{C}\circ\boldsymbol{i}_1)+\boldsymbol{D}\circ[5N-3\boldsymbol{i}_2]\right\}\circ\boldsymbol{i}_1. \qquad (25)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) с точностью до слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше второй, имеет вид (18), где кватернионы $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ вычисляются по формулам (9), (11), (22); при этом постоянные кватернионы задаются формулами (12), (23)–(25).

На рис. 2 показаны законы изменения компонент $err_j(e)$ кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат с учётом слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше второй. Параметры задачи и начальный кватернион ориентации орбитальной системы координат по-прежнему имеют вид (16), (17).

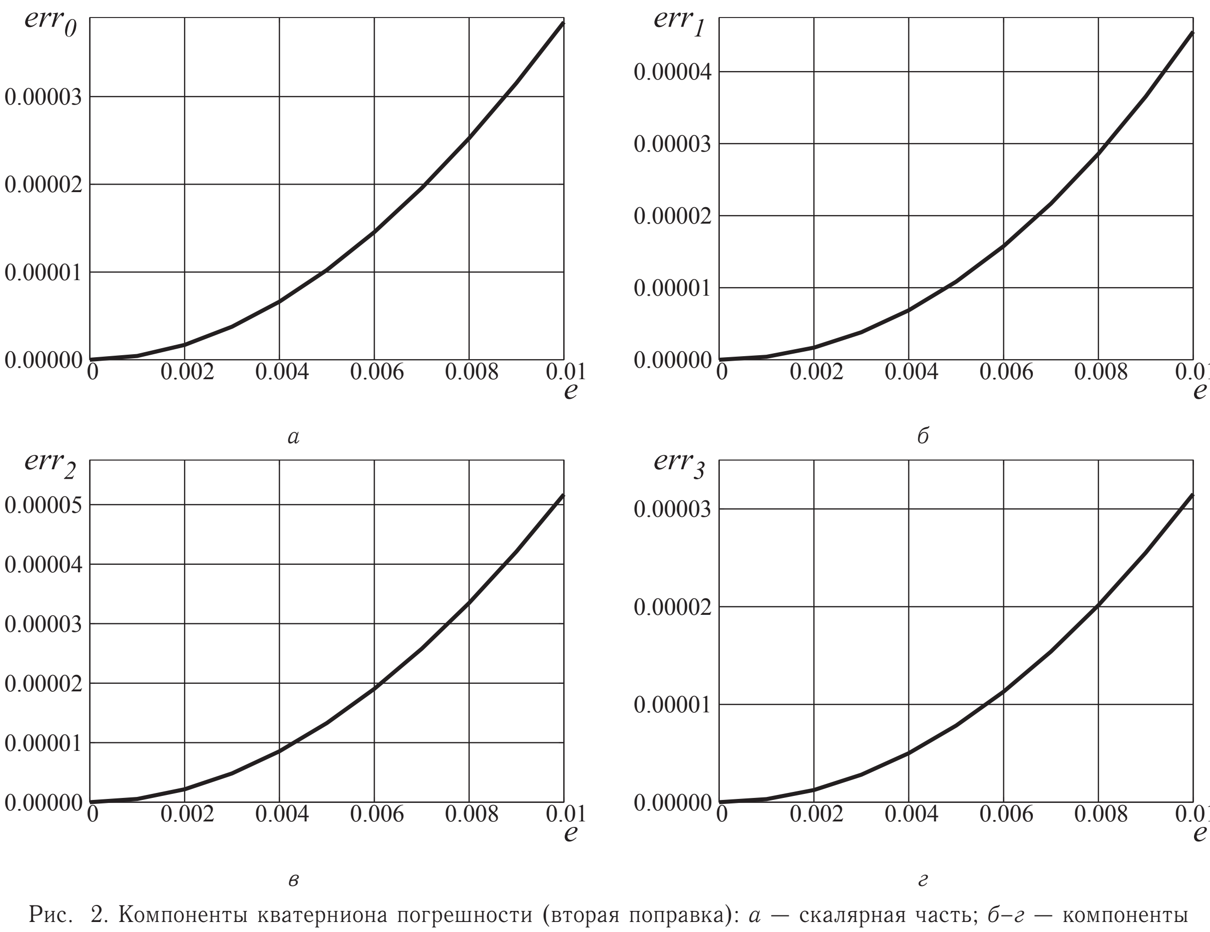

Рис. 2. Компоненты кватерниона погрешности (вторая поправка): *а* — скалярная часть; *б*–*г* — компоненты векторной части

Отметим, что полученное разложение (18) становится непригодным при больших значениях φ из-за присутствия в нём вековых слагаемых $\varphi\cos(\omega\varphi/2)$ и $\varphi\sin(\omega\varphi/2)$. Очевидно, что при возрастании истинной аномалии указанные слагаемые будут того же порядка, что и первый поправочный член (при $\varphi > O(e^{-1})$) или даже будут больше главного члена разложения (при $\varphi > O(e^{-2})$). При этом все предыдущие выкладки были сделаны в предположении, что эти слагаемые должны быть малой поправкой.

Кроме того, необходимо дополнительно исследовать поведение полученных разложений в случае, когда КА оснащён двигателем малой тяги ($N \ll 1$). Дело в том, что при этом $\omega \approx 1$ и в формулах (12), (24) появляются малые знаменатели, что тоже служит источником неравномерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 12-01-00165-а).

Библиографический список

1. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып 6. С. 759–770.
2. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып 5. С. 502–517.
3. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 1. С. 92–107.
4. *Челноков Ю. Н., Панкратов И. А.* Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребенников [и др.]. М. : Наука, 1976. 864 с.
6. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
7. *Молоденков А. В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3–13.
8. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.
9. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
10. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 83–89.
11. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984. 535 с.
12. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.
13. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.

Analytical Solution of Equations of Near-circular Spacecraft's Orbit Orientation

I. A. Pankratov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

The problem of optimal reorientation of spacecraft's orbit with a limited control, orthogonal to the plane of spacecraft's orbit, is considered. An approximate analytical solution of differential equations of near-circular spacecraft's orbit orientation by control, that is permanent on adjacent parts of the active spacecraft's motion, is obtained.

Key words: spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 12-01-00165-a).

References

1. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
2. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field : I. *Cosmic Research*, 2001, vol. 39, no. 5, pp. 470–484. DOI 10.1023/A:1012345213745.
3. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 85–99. DOI 10.1023/A:1022359831200.
4. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A. Pereorientatsiia krugovoi orbity kosmicheskogo apparata s tremia tochkami perekliucheniia upravleniia [The reorientation of circular spacecraft's orbit with three points of switching control]. *Mekhatronika, avtomatizatsiia, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2011, no. 1, pp. 70–73 (in Russian).
5. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* [Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).
6. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of quaternions in the problems of orientation of solid bodies]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
7. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176. DOI 10.3103/S002565440702001X.
8. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal

reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 87–95 (in Russian).

9. Chelnokov Yu. N. Optimal'naja pereorientacija orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoj tjagi, ortogonal'noj ploskosti orbity [Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, iss. 8, pp. 231–234 (in Russian).

10. Pankratov I. A., Chelnokov Yu. N. Analytical solution of differential equations of circular spacecraft's orbit orientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pt. 1, pp. 83–89 (in Russian).

11.Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons, 1981, 519 p.

12. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniia. Geometriia i kinematika dvizheniia* [Quaterion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).

13. Zaitsev V. F., Polianin A. D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p. (in Russian).