**References**

1. Vlasov V. Z. *Obshchaia teoriia obolochek* [General theory of shells]. Moscow, Gos. izd. teh. teor. lit., 1949, 784 p. (in Russian).

2. Burmistrov E. F. *Simmetrichnaia deformatsiia konstruktivno-ortotropnykh obolochek vrashcheniia* [Symmetric deformation of structurally orthotropic shells of revolution]. Saratov, Saratov. Univ. Press, 1962. 108 p. (in Russian).

3. Mochalin A. A. Sustainability semi-momentless cylindrical shell of variable thickness. *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, 1975, no. 11, pp. 27–31 (in Russian).

4. Shteinberg M. V. Calculation of circular cylindrical shells with variable thickness in the direction of forming. *Prikladnaia mekhanika*, 1965, vol. 1, iss. 7, pp. 67–72 (in Russian).


УДК 539.274

# РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НАГРУЖЕНИЯ ПОЛОГО ШАРА В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ДЕФОРМАЦИЙ


**Е. В. Мурашкин**

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com



Предложена модель больших упругоползучих деформаций. Разделение тензора полных деформаций альманси определяется уравнениями изменения обратимой и необратимой его составляющих. Рассмотрено сферически симметричное деформирование полого шара в процессе установившейся ползучести. Получена разрешающая система уравнений рассматриваемой краевой задачи. Предложен способ определения нагружающего усилия вызывающего заданное деформированное состояние. По заданным законам изменения поля перемещений построены функции внешнего нагружающего усилия.


*Ключевые слова:* большие деформации, ползучесть, упругость, релаксация.

## ВВЕДЕНИЕ

Необходимость повышения точности математического описания процессов, происходящих при технологической обработке и эксплуатации металлоизделий, вынуждает учитывать упругие свойства материалов на всех стадиях жизненного цикла изделия. Рассмотрение задач в классических моделях малых деформаций невозможно, когда относительное изменение формы рассматриваемого тела велико. Одной из таких характерных задач, где нельзя обойтись без применения модели больших деформаций, является задача о моделировании процессов в окрестности микропоры в металле, происходящих под действием интенсивного давления. Актуальность данной задачи обусловлена обнаруженным на опыте эффектом существенного повышения эксплуатационных характеристик металла при интенсивном всестороннем сжатии образцов [1] «залечивания» микродефектов сплошности. Попытки смоделировать процесс залечивания микропоры в металле делались неоднократно, в том числе и на основе модели больших упругопластических деформаций [2], обладающей эффектом приспосабливаемости к периодическим нагружениям по циклу «нагрузка – разгрузка» [3].

В настоящей работе решена задача о сферически симметричном сжатии шара с микропорой в центре. Условие несжимаемости среды определяет кинематику среды с точностью до неизвестной функции времени, что позволяет по известному закону деформирования определить процесс нагружения, вызывающий заданное деформированное состояние.

## 1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

За основу возьмем модель больших упругопластических деформаций [3], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной декартовой системе пространственных (эйлеровых) координат могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}
\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})\right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \qquad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \qquad (1) \\
r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \qquad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\
d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}.
\end{gathered}$$

В соотношениях (1), $u_i$, $v_i$ — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $e_{ij}$ и $p_{ij}$ — обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций Альманси $d_{ij}$; $\frac{D}{Dt}$ — объективная производная тензоров по времени; источник $\varepsilon_{ij}^p$ в уравнении изменения тензора $p_{ij}$ — тензор скоростей необратимых деформаций, $z_{ij} = -z_{ij}$ — нелинейная часть тензора вращений, полностью выписанная в [3], определяющая его отличие от тензора жесткого вращения $w_{ij}$.

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}). \qquad (2)$$

В соотношениях (1) $p_1$ — добавочное гидростатическое давление, $W$ — упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{gathered}
W = (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \zeta J_1^2, \qquad (3) \\
J_1 = e_{jj} - \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \qquad J_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + \frac{1}{4}e_{ij}e_{jk}e_{ks}e_{si}.
\end{gathered}$$

Здесь $\lambda$, $\mu$, $a$, $b$, $\theta$ — упругие модули среды.

Принимаем, что компоненты тензора скоростей необратимых деформаций связаны с компонентами напряжений законом ползучести Нортона [4]:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{ij}^p = \frac{dV(\Sigma)}{d\sigma_{ij}}, \qquad V(\Sigma) = B\Sigma(\sigma_{ij})^n, \\
\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \qquad (4)
\end{gathered}$$

Здесь $B$ и $n$ — заданные постоянные, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим шар начального радиуса $R_0$ с одиночным сферическим дефектом сплошности (микропора) начального радиуса $r_0$ в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \qquad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \qquad (5)$$

в которых $\sigma_{rr}$ — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат $(r, \varphi, \theta)$. $R(t) >> r_0$ — радиус сферической поверхности, на которой задается внешнее давление, $s(t)$ — текущий радиус границы микропоры.

Кинематика среды согласно принятому условию несжимаемости определяется с точностью до неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$u_r = r - \left(r^3 + \varphi(t)\right)^{1/3}, \qquad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \qquad (6)$$

где $u = u_r$ — единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Согласно формулам (2) и (3) компоненты напряжений с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления вычисляются зависимостями

$$\sigma_{rr} = -p_1 + g_1 e_{rr} + g_2 {e_{rr}}^2 - g_3 e_{rr} e_{\theta\theta} + g_4 {e_{rr}}^3 + g_5 e_{rr} {e_{\theta\theta}}^2 + g_6 {e_{rr}}^2 e_{\theta\theta} - g_7 {e_{rr}}^4 +$$
$$+ g_8 \left( e_{rr} {e_{\theta\theta}}^4 - 4 e_{rr} {e_{\theta\theta}}^3 + 2 {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^3 - \frac{1}{2} {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^4 \right) - g_9 {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^2 + g_{10} \left( 3 {e_{rr}}^5 - \frac{1}{2} {e_{rr}}^6 \right) +$$
$$+ 2 g_{11} \left( {e_{rr}}^4 e_{\theta\theta} + 2 {e_{rr}}^3 {e_{\theta\theta}}^2 - 4 {e_{rr}}^3 e_{\theta\theta} - \frac{1}{2} {e_{rr}}^4 {e_{\theta\theta}}^2 \right),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = -p_1 + g_1 e_{\theta\theta} + g_{12} {e_{\theta\theta}}^2 - \frac{1}{2} g_3 e_{rr} e^e_{\theta\theta} + g_{13} {e_{\theta\theta}}^3 + g_{18} \left( {e_{\theta\theta}}^5 - \frac{1}{6} {e^e_{\theta\theta}}^6 \right) +$$
$$+ g_{11} \left( \frac{1}{4} {e_{rr}}^4 {e_{\theta\theta}}^2 - 2 {e_{rr}}^3 e_{\theta\theta} + \frac{1}{2} {e_{rr}}^4 e_{\theta\theta} - {e_{rr}}^3 {e_{\theta\theta}}^2 \right) + g_{15} e_{rr} {e_{\theta\theta}}^2 - g_{16} {e_{\theta\theta}}^4 +$$
$$+ g_{14} {e_{rr}}^2 e_{\theta\theta} - g_{17} {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^2 + g_8 \left( 2 {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^3 + e_{rr} {e_{\theta\theta}}^4 - \frac{1}{2} {e_{rr}}^2 {e_{\theta\theta}}^4 - 4 e_{rr} {e_{\theta\theta}}^3 \right),$$
$$g_1 = 2\mu, \qquad g_2 = \mu + 4a + 4b + 2k, \qquad g_3 = 4\,(2b + k)\,,$$
$$g_4 = 4 \left( a + b + 2k + \frac{3}{2}\zeta \right), \qquad g_5 = 2(2b + 3k + 12\zeta), \qquad g_6 = g_5 + 4k,$$
$$g_7 = a + b + \frac{19}{2} k + 9\zeta, \qquad g_8 = k + 6\zeta, \qquad g_9 = 2b + 7k + 24\zeta, \qquad g_{10} = \frac{3}{2}(k + \zeta),$$
$$g_{11} = k + 3\zeta, \qquad g_{12} = \mu + 4a + 8b + 4k, \qquad g_{18} = 9(k + 2\zeta),$$
$$g_{13} = 4(a + 2b + 4k + 6\zeta), \qquad g_{14} = \frac{1}{2} g_5 - 6\zeta, \qquad g_{15} = \frac{1}{2} g_6 + 12\zeta,$$
$$g_{16} = a + 2b + 19k + 36\zeta, \qquad g_{17} = b + \frac{7}{2} + 15\zeta, \qquad p_1 = P - \frac{\partial W}{\partial J_1}\,.$$

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (6) находятся соотношениями

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left( 1 - H^{-4/3} \right), \qquad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left( 1 - H^{2/3} \right), \qquad H = 1 + \frac{\varphi(t)}{r^3}, \tag{7}$$
$$d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}} \right).$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем:

$$\varepsilon^p_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \tag{8}$$
$$e_{rr} = 1 - x^{-2/3}, \qquad e_{\theta\theta} = 1 - x^{1/3}, \qquad x = \left( \frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right)^3 = H^4 (1 - 2p_{rr})^3.$$

Подстановка (7) и (8) в определяющие соотношения (4) приводит к уравнению

$$\frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1} = Bn\Sigma^{n-1} \left( 1 - H^{-\frac{8}{3}} (1 - 2p_{rr})^{-2}, 1 - H^{\frac{1}{3}} (1 - 2p_{rr}) \right),$$
$$\Sigma(a, b) = g_1(a - b) - g_2 a^2 + g_{12} b^2 + g_4 a^3 - g_{13} b^3 + \frac{1}{2} g_3 \left( \frac{1}{2} a b^2 - ab \right) +$$
$$+ g_{19} \left( a^2 b - \frac{1}{2} a^2 b^2 \right) + g_{10} \left( 3b^5 - \frac{1}{2} a^6 \right) + \frac{1}{3} g_{18} \left( \frac{1}{2} a^6 - 3b^5 \right) - g_7 a^4 +$$
$$+ \frac{3}{4} g_{11} \left( a^4 b + 2a^3 b^2 - \frac{1}{2} a^4 b^2 - 4a^3 b \right) + g_{16} b^4, \tag{9}$$
$$g_{19} = 2b + 7k + 18\zeta.$$

Уравнение (9) в каждой точке среды $s(t) \le r \le R(t)$ является обыкновенным дифференциальным уравнением для вычисления компоненты необратимых деформаций $p_{rr}$ (или $p_{\theta\theta}$). С другой стороны, компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения:

$$\sigma_{rr,r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9}\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5} \right),$$

используя второе граничное условие (5). Вычислив напряжения на внешней границе согласно первому граничному условию (5), получаем интегродифференциальную связь между нагружающим давлением $P(t)$ и функцией $\varphi(t)$:

$$P(t) = 2\int\limits_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Sigma(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr - \rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left( \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left( \frac{1}{R(t)^4} - \frac{1}{s(t)^4} \right) \right). \qquad (10)$$

Численные расчеты удобнее провести в безразмерных переменных:

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}\frac{t}{R_0}, \qquad f(\tau) = \frac{\varphi(t)}{R_0^3}, \qquad \Pi(\tau) = \frac{P(t)}{\mu}, \qquad y = \frac{r}{R_0}.$$

Ниже будут приведены результаты расчетов, когда постоянным материала были предписаны следующие значения:

$$\alpha\mu^{-1} = 0.9, \qquad \beta\mu^{-1} = 4, \qquad \xi\mu^{-1} = 20, \qquad \chi\mu^{-1} = 80, \qquad n = 3,$$
$$B_0 = nB\rho_0 R_0 \mu^{n-2} = 3.5, \qquad k\mu^{-1} = 0.003, \qquad s_0 R_0^{-1} = 0.03.$$

Функция $f(t)$, определяющая кинематику среды, выбиралась следующим образом:

$$f_1(\tau) = 269 \cdot 10^{-7}(1 - e^{-\tau^2/250}), \qquad f_2(\tau) = r_0^3(1 - e^{-\tau^2/250}),$$
$$f_3(\tau) = 269 \cdot 10^{-7} \left( 1 - e^{-p_3(\tau/22)} \right), \qquad p_3(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}.$$

На рис. 1 и 2 проиллюстрированы изменения границы микропоры и нагружающего усилия соответственно при функциях, определяющих поле перемещений ($f_1$ — сплошная линия, $f_2$ — штриховая линия, $f_3$ — пунктирная линия).

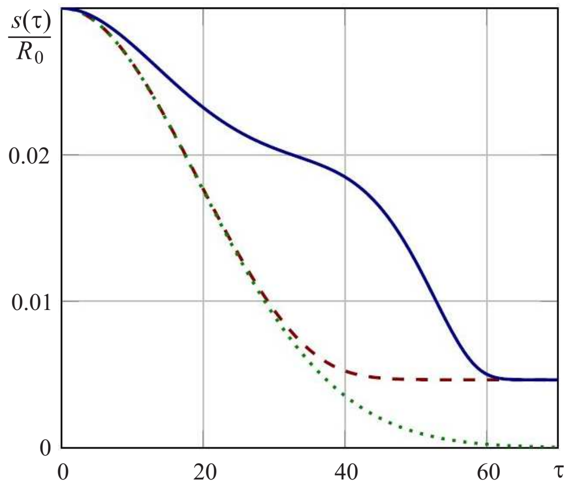


Рис. 1. Динамика границы микропоры

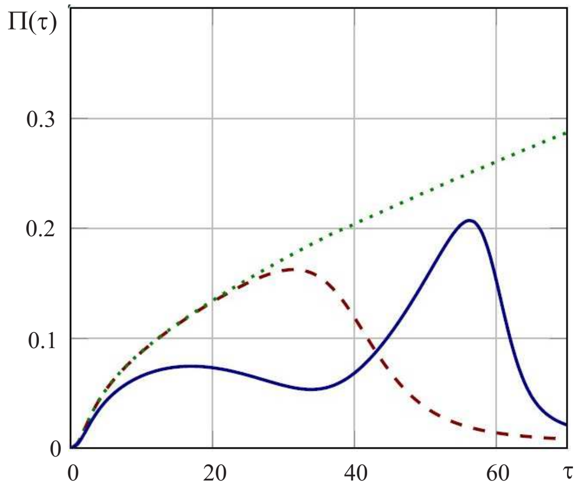


Рис. 2. Изменения нагружающего усилия

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель процесса нелинейной ползучести при больших деформациях основана на модели больших упругопластических деформаций, в которой разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие является следствием понятных термодинамических принципов, что является существенным преимуществом примененного подхода. Решенные задачи о ползучести, релаксации напряжений и разгрузке в шаре с одиночным сферическим дефектом сплошности имеют своей целью описание экспериментально известного процесса залечивания микропор.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект* 12-01-33064 мол_а_вед).

**Библиографический список**

1. *Горелов В. И.* Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 5. С. 157–158.
2. *Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
3. *Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

## The Loading Parameters Calculation of a Hollow Sphere at the Large Elastocreep Deformations

**E. V. Murashkin**

Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

We presented a model of large elastocreep deformations. Separation of Almansi strain tensor is determined by the quadratic form of reversible and irreversible components. We consider spherically symmetric deformation of a hollow sphere in the steady creep process. Numerical solution of boundary-value problem was obtained. A method for determining loading force on the deformed state was proposed. Functions of the external loading force according to the laws of a given change in the displacement field were constructed.

*Key words:* large deformation, creep, relaxation, elasticity.

**References**

1. Gorelov V. I. Effect of high pressure on mechanical characteristics of aluminum alloys. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 813–814.
2. Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simplemodel of finite strain in an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
3. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 2000, vol.45, no. 12, pp. 694–696.

УДК 519.654

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

**Р. Т. Файзуллин[1], Р. Р. Файзуллин[2]**

[1]Доктор технических наук, профессор кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, r.t.faizullin@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, strannik11@list.ru

Предложены способы восстановления функциональной зависимости с заданным разрывом. Приведены примеры применения алгоритма построения функций с особенностью. Первый способ основан на формальной минимизации функции методом случайного поиска. Второй использует информативность данных.

*Ключевые слова:* метод наименьших квадратов, разрыв, особенность.