



контактные задачи с подвижными границами М. : Наука; Физматлит, 1995. 352 с.

4. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды : учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.

5. *Моргунов Б. И.* Математический анализ физико-механических процессов. М. : МИЭМ, 1995. 151 с.

6. *Моргунов Б. И.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : МИЭМ, 1997. 224 с.

7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости

/ пер. с польск. Я. Рыхлевского; под ред. Г. С. Шапиро. М. : Мир, 1970. 256 с.

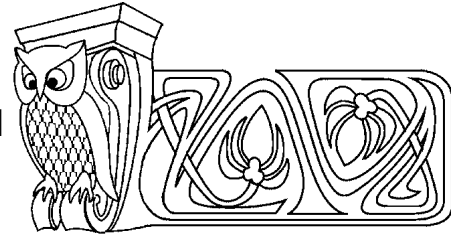
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1973. 536 с.

9. *Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 2. С. 186–188.

10. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. 736 с.

УДК 539.3

## РАСЧЕТ ПЛОСКОНАГРУЖЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ С ТЕНЗОРНО-ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН



Н. А. Гуреева

Волгоградская государственная академия сельского хозяйства  
E-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

Изложен в смешанной формулировке МКЭ алгоритм получения на шаге нагружения матрицы деформирования объемного конечного элемента с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для численной реализации алгоритма использован функционал, полученный из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

**Ключевые слова:** векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

**Calculation Plainly Loaded Geometrically Nonlinear Designs on the Basis of Mixed FEM with Tenzorno-Vector Approximation Requires Sizes**

N. A. Gureeva

The algorithm of reception on a step of loading designs matrixes of deformation of a volume final element with cross-section section in the form of any quadrangle with central unknown persons in the form of increments of movings and increments of deformations is stated in mixed formulation FEM.

For numerical realization of algorithm it is used functional, received of a condition of equality of possible and valid works of external and internal forces on a step loading.

**Key words:** vector approximation, tensor approximation, vector field, tensor field, mixed formulation, variation principle.

Для расчета плосконагруженных конструкций реализуется шаговый метод. На шаге нагружения разработан конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника в смешанной формулировке МКЭ с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для получения матрицы деформирования конечного элемента в геометрически нелинейной постановке получен функционал из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил.

Приводится пример расчета, подтверждающий эффективность использования разработанного конечного элемента.

### 1. ГЕОМЕТРИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

В декартовой системе координат  $xOz$  линия внутреннего контура тонкостенной конструкции принимается в качестве отсчетной. Положение произвольной точки  $M^0$  отсчетной линии определяется радиусом-вектором (рис.1)

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + z(x)\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты декартовой системы координат.



Векторы локального базиса точки  $M^0$  определяются соотношениями

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{R}_{',s}^0 = x_{',s} \mathbf{i} + z_{',s} \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_3^0 = \mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{j} = -z_{',s} \mathbf{i} + x_{',s} \mathbf{k}, \quad (1)$$

где  $s$  — координата точки  $M^0$  вдоль отсчетной линии.

Зависимости (1) можно представить в матричном виде

$$\{\mathbf{a}^0\} = [M]\{\mathbf{i}\},$$

где  $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}\}$ ,  $\{\mathbf{a}^0\}^T = \{\mathbf{a}_1^0 \ \mathbf{a}_3^0\}$ .

Производные векторов локального базиса  $\{\mathbf{a}_{',s}^0\}^T = \{\mathbf{a}_{1',s}^0 \ \mathbf{a}_{3',s}^0\}$  представляются разложением по векторам этого же базиса  $\{\mathbf{a}^0\}^T = \{\mathbf{a}_1^0 \ \mathbf{a}_3^0\}$  [1]:

$$\{\mathbf{a}_{',s}^0\} = [m]\{\mathbf{a}^0\}. \quad (2)$$

Положение точки  $M^{0t}$ , отстоящей на расстояние  $t$  от точки  $M^0$  (см. рис. 1), определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{R}^{0t} = \mathbf{R}^0 + t\mathbf{a}_3^0. \quad (3)$$

Векторы локального базиса точки  $M^{0t}$  определяются дифференцированием (3)

$$\mathbf{g}_1^0 = \mathbf{R}_{',s}^{0t} = \mathbf{R}_{',s}^0 + t\mathbf{a}_{3',s}^0 = \mathbf{a}_1^0 + t\mathbf{a}_{3',s}^0 = (1 + tm_{21})\mathbf{a}_1^0 + tm_{22}\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{g}_3^0 = \mathbf{R}_{',t}^{0t} = \mathbf{a}_3^0.$$

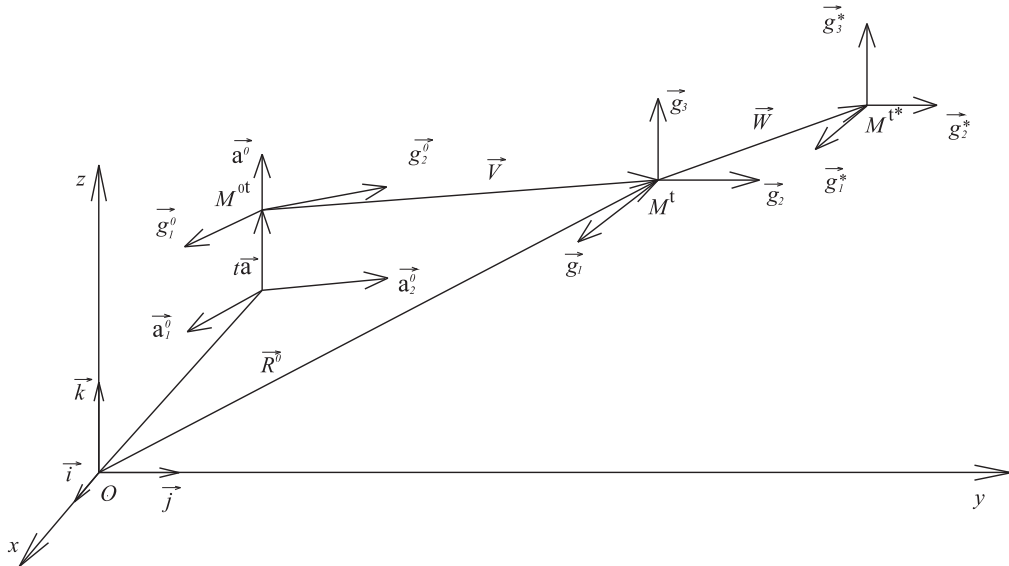


Рис. 1

## 2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

При реализации шагового нагружения произвольная точка оболочки рассматривается в трех положениях: исходном  $M^{0t}$ , деформированном после  $j$  шагов нагружения  $M^t$  (вектор перемещения  $\mathbf{V}$ ) и соседнем — после  $(j + 1)$ -го шага нагружения  $M^{t*}$  (вектор перемещения  $\mathbf{w}$ ) (см. рис. 1).

Вектор перемещения точки  $M^{0t}$  за  $j$  шагов нагружения представляется компонентами в локальном базисе точки  $M^0$ :

$$\mathbf{V} = v^1 \mathbf{a}_1^0 + v^3 \mathbf{a}_3^0. \quad (4)$$

Производные вектора (4) с учетом (2) определяются выражениями

$$\mathbf{V}_{',s} = f_1^1 \mathbf{a}_1^0 + f_1 \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{V}_{',t} = f_3^1 \mathbf{a}_1^0 + f_3 \mathbf{a}_3^0,$$

где  $f_1^1, f_1, f_3^1, f_3$  — функции компонент вектора  $\mathbf{V}$  и их производных.

Положение точки  $M^t$  определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{0t} + \mathbf{V}.$$



Векторы локального базиса точки  $M^t$  имеют вид

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{R}^t_{,s} = \mathbf{g}_1^0 + \mathbf{V}'_s = (1 + tm_{21} + f_1^1)\mathbf{a}_1^0 + (tm_{22} + f_1)\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3^0 + \mathbf{V}'_t = f_3^1\mathbf{a}_1^0 + (1 + f_3)\mathbf{a}_3^0. \quad (5)$$

Перемещение точки из положения  $M^t$  в положение  $M^{t*}$  определяется вектором в локальном базисе точки  $M^0$ :

$$\mathbf{w} = w^1\mathbf{a}_1^0 + w^3\mathbf{a}_3^0. \quad (6)$$

Производные вектора (6) имеют вид

$$\mathbf{w}'_s = \alpha_1^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_1\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{w}'_t = \alpha_3^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_3\mathbf{a}_3^0, \quad (7)$$

где  $\alpha_1^1 = w^1_s + w^1m_{11} + w^3m_{21}$ ,  $\alpha_1 = w^3_s + w^1m_{12} + w^3m_{22}$ ,  $\alpha_3^1 = w^1_t + w^1m_{21}$ ,  $\alpha_3 = w^1_t + w^1m_{22}$ .

Положение точки  $M^{t*}$  определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^{t*} = \mathbf{R}^t + \mathbf{w}. \quad (8)$$

Векторы ее локального базиса определяются дифференцированием (8)

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_1 + \mathbf{w}'_s, \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 + \mathbf{w}'_t. \quad (9)$$

Приращения деформаций на  $(j + 1)$ -ом шаге нагружения определяются соотношениями [2]

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{w}'_j + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{w}'_i + \mathbf{w}'_j \cdot \mathbf{w}'_i) = \Delta\varepsilon_{ij}^l + \Delta\varepsilon_{ij}^h, \quad i, j = 1, 3.$$

Линейная и нелинейная части приращений деформаций  $\Delta\varepsilon_{ij}^l$  и  $\Delta\varepsilon_{ij}^h$  с учетом (9), (5) могут быть представлены в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{ij}^l \\ \Delta\varepsilon_{ij}^h \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{Bmatrix} w \\ w \end{Bmatrix}_{2 \times 1}, \quad \{\Delta\varepsilon_{ij}^h\}^T = \{\mathbf{w}'_\alpha \cdot \mathbf{w}'_\beta\},$$

где  $\{\mathbf{w}'_\alpha \cdot \mathbf{w}'_\beta\} = \{\mathbf{w}'_1 \cdot \mathbf{w}'_1 \quad \mathbf{w}'_3 \cdot \mathbf{w}'_3 \quad \mathbf{w}'_1 \cdot \mathbf{w}'_3\}$ ;  $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{33} \quad 2\Delta\varepsilon_{13}\}$ ;  $\{w\}^T = \{w^1 \quad w^3\}$ ;  $[L]$  – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

### 3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  связаны с компонентами тензора напряжений  $\sigma^{mn}$  законом Гука [2]:

$$\varepsilon_{ij} = \sigma^{mn} \left( \frac{1 + \nu}{E} g_{im}g_{jn} + \frac{\nu}{E} g_{nm}g_{ij} \right), \quad (10)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости.

При плоском напряженном состоянии соотношения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sigma^{11} \frac{1}{E} g_{11}g_{11} + \sigma^{33} \left( \frac{1 + \nu}{E} g_{13}g_{13} - \frac{\nu}{E} g_{33}g_{11} \right) + 2\sigma^{13} \frac{1}{E} g_{11}g_{13}, \\ \varepsilon_{33} &= \sigma^{11} \left( \frac{1 + \nu}{E} g_{31}g_{31} - \frac{\nu}{E} g_{33}g_{11} \right) + \sigma^{33} \frac{1}{E} g_{33}g_{33} + 2\sigma^{13} \frac{1}{E} g_{31}g_{33}, \\ 2\varepsilon_{13} &= 2\sigma^{11} \left( \frac{1 + \nu}{E} g_{11}g_{31} - \frac{\nu}{E} g_{13}g_{11} \right) + 2\sigma^{33} \frac{1}{E} g_{13}g_{33} + 2\sigma^{13} \left( \frac{1 + \nu}{E} g_{11}g_{33} - \frac{\nu}{E} g_{13}g_{13} \right), \end{aligned}$$

которые можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}^{-1}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \quad (11)$$

где  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{13}\}$ ;  $\{\sigma\} = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{33} \quad \sigma^{13}\}$ .

На  $(j + 1)$ -м шаге нагружения зависимости между компонентами тензора приращений деформаций и компонентами тензора приращений напряжений записываются аналогично (11)

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}^{-1}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1},$$

где  $\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{33} \quad 2\Delta\varepsilon_{13}\}$ ,  $\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma^{11} \quad \Delta\sigma^{33} \quad \Delta\sigma^{13}\}$ ,  $[D]$  – матрица податливости материала.



#### 4. МАТРИЦА ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ШАГЕ НАГРУЖЕНИЯ

В качестве дискретного элемента принимается объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника с узлами  $i, j, k, l$ . Узловыми неизвестными принимаются приращения перемещений и приращения деформаций. Для выполнения численного интегрирования произвольный четырехугольник отображается на квадрат с локальными координатами  $\xi, \eta$ , изменяющимися в пределах от  $-1$  до  $1$ . Глобальные координаты  $s, t$  четырехугольника выражаются через узловые значения билинейными соотношениями:

$$s = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{s_y\}, \quad t = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{t_y\}, \quad (12)$$

где  $\{s_y\}^T = \{s^i \ s^j \ s^k \ s^l\}$ ,  $\left\{ \begin{matrix} \varphi(\xi, \eta) \\ 1 \times 4 \end{matrix} \right\}^T = \left\{ \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}; \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}; \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}; \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \right\}$  — вектор-строка функций формы,  $\{t_y\}^T = \{t^i \ t^j \ t^k \ t^l\}$ .

Дифференцированием (12) определяются производные глобальных координат в локальной системе  $s'_\xi, s'_\eta, t'_\xi, t'_\eta$  и производные локальных координат в глобальной системе  $\xi'_s, \xi'_t, \eta'_s, \eta'_t$ .

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через векторы перемещений узловых точек также билинейными соотношениями [1]:

$$\mathbf{w} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\mathbf{w}_y\}, \quad (13)$$

где  $\{\mathbf{w}_y\}^T = \{\mathbf{w}^i \ \mathbf{w}^j \ \mathbf{w}^k \ \mathbf{w}^l\}$ .

Производные вектора (13) определяются выражениями

$$\mathbf{w}'_s = \{\varphi'_s\}^T \{\mathbf{w}_y\}, \quad \mathbf{w}'_t = \{\varphi'_t\}^T \{\mathbf{w}_y\}. \quad (14)$$

Вектор перемещения узловых точек конечного элемента имеет вид

$$\mathbf{w}^\omega = w^{1\omega} \mathbf{a}_1^{0\omega} + w^{3\omega} \mathbf{a}_3^{0\omega} \quad (\omega = i, j, k, l). \quad (15)$$

Базисные векторы узловых точек  $\omega$  выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{a}^{0\omega} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right\} = [n^\omega] \{\mathbf{a}^0\}. \quad (16)$$

С учетом (15) и (16) зависимости (13) и (14) примут вид

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_1[n^i]^T \ \varphi_2[n^j]^T \ \varphi_3[n^k]^T \ \varphi_4[n^l]^T\} \{w_y\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_s &= \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_{1's}[n^i]^T \ \varphi_{2's}[n^j]^T \ \varphi_{3's}[n^k]^T \ \varphi_{4's}[n^l]^T\} \{w_y\}, \\ \mathbf{w}'_t &= \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_{1't}[n^i]^T \ \varphi_{2't}[n^j]^T \ \varphi_{3't}[n^k]^T \ \varphi_{4't}[n^l]^T\} \{w_y\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , — функции, являющиеся элементами аппроксимирующей матрицы  $\{\varphi(\xi, \eta)\}^T$  и

$$\left\{ \begin{matrix} w_y \\ 1 \times 8 \end{matrix} \right\}^T = \{w^{1i} \ w^{3i} \ w^{1j} \ w^{3j} \ w^{1k} \ w^{3k} \ w^{1l} \ w^{3l}\}.$$

Приравняв правые части (6) и (17), (7) и (18), можно получить матричные выражения компонент вектора перемещения и их производных

$$\begin{aligned} w^1 &= \{z_1\} \{w_y\}, & w^3 &= \{z_2\} \{w_y\}, \\ w^1_s &= \{z_3\} \{w_y\}, & w^3_s &= \{z_4\} \{w_y\}, \\ w^1_t &= \{z_5\} \{w_y\}, & w^3_t &= \{z_6\} \{w_y\}, \end{aligned}$$

с использованием которых можно сформировать матричные соотношения:

$$\left\{ \begin{matrix} w \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{matrix} A \\ 2 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\}, \quad \Delta \varepsilon = \left[ \begin{matrix} L \\ 3 \times 1 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} A \\ 3 \times 2 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} A \\ 2 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{matrix} B \\ 3 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\}. \quad (19)$$



При скалярной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения на шаге нагружения аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты выражениями

$$w^1 = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^1\}, \quad w^3 = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^3\}.$$

Тензоры приращений деформаций во внутренней и узловой точках конечного элемента определяются выражениями

$$\Delta \tilde{\varepsilon} = \Delta \varepsilon_{11} \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^1 + \Delta \varepsilon_{33} \mathbf{a}^3 \mathbf{a}^3 + 2\Delta \varepsilon_{13} \mathbf{g}^1 \mathbf{a}^3 = \{\Delta \varepsilon\}^T \{\vec{\mathbf{g}}\}, \quad \Delta \tilde{\varepsilon}^\omega = \{\Delta \varepsilon^\omega\}^T \{\vec{\mathbf{g}}^\omega\}.$$

Тензоры деформаций внутренней точки выражаются через тензоры деформаций узловых точек [1]:

$$\tilde{\varepsilon} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}, \quad \Delta \tilde{\varepsilon} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}, \quad (20)$$

где  $\{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\tilde{\varepsilon}^i \tilde{\varepsilon}^j \tilde{\varepsilon}^k \tilde{\varepsilon}^l\}$ ,  $\{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\Delta \tilde{\varepsilon}^i \Delta \tilde{\varepsilon}^j \Delta \tilde{\varepsilon}^k \Delta \tilde{\varepsilon}^l\}$ .

Базисные векторы узловой точки  $\omega$  выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\{\mathbf{g}^\omega\} = [z^\omega] \{\mathbf{g}\}, \quad (21)$$

где  $\{\mathbf{g}\}^T = \{\mathbf{g}^1 \mathbf{a}^3\}$ .

С учетом (21) диадные произведения базисных векторов узловой точки  $\{\mathbf{g}^\omega\}^T = \{\mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{a}^{3\omega} \mathbf{a}^{3\omega} \mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{a}^{3\omega}\}$  могут быть выражены через диадные произведения базисных векторов внутренней точки конечного элемента матричной зависимостью

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}}^\omega \\ \vec{\mathbf{g}}^\omega \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} [N] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{g}} \end{matrix} \right\}. \quad (22)$$

С использованием (22) выражение (20) примет вид

$$\Delta \tilde{\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{g}} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \varphi_1 [N^i]^T & \varphi_2 [N^j]^T & \varphi_3 [N^k]^T & \varphi_4 [N^l]^T \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\}, \quad (23)$$

где  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\} = \{\Delta \varepsilon_{11}^i \Delta \varepsilon_{11}^j \Delta \varepsilon_{11}^k \Delta \varepsilon_{11}^l \dots 2\Delta \varepsilon_{13}^i 2\Delta \varepsilon_{13}^j 2\Delta \varepsilon_{13}^k 2\Delta \varepsilon_{13}^l\}$  — матрица-строка узловых приращений деформаций.

Приравняв правые части (20) и (23), получим матричное выражение:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \varepsilon \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} [G] \\ 3 \times 12 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\}. \quad (24)$$

При скалярной аппроксимации матрица  $[G]$  имеет вид

$$[G]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}.$$

В расчетах при учете геометрической нелинейности реализуется шаговая процедура нагружения. Функционал Лагранжа, выражающий равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения, можно записать в виде

$$\Pi_L \equiv \int_V \left[ \{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta \sigma\}^T \right] [\{\Delta \varepsilon^n\} + \{\Delta \varepsilon^n\}] dV - \int_S \{w\}^T \left[ \{p\} + \frac{1}{2} \{\Delta p\} \right] dS = 0, \quad (25)$$

где  $V$  — объем деформируемого тела;  $\{p\}^T = \{p_1 p_2\}$ ,  $\{\Delta p\}^T = \{\Delta p_1 \Delta p_2\}$  — векторы нагрузок после  $j$ -го и  $(j+1)$ -го шагов соответственно;  $S$  — площадь поверхности с заданной внешней нагрузкой.



Заменяем выражение действительной работы внутренних сил в (25) разностью их возможной и дополнительной работы:

$$\frac{1}{2}\{\Delta\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\sigma\}^T[L]\{w\} - \frac{1}{2}\Phi(\sigma) = \{\Delta\varepsilon\}^T[D][L]\{w\} - \frac{1}{2}\{\Delta\varepsilon^n\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^n\}. \quad (26)$$

С учетом (26) функционал (25) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_L \equiv & \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}[D]^{-1}[L]\{w\}dV + \int_V \{\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon^n\}dV - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^n\}dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_S \{w\}^T\{\Delta p\}dS - \int_S \{w\}^T\{p\}dS + \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T\{\sigma\}dV = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Функционал (27) с учетом (17), (19) и (24) для отдельного конечного элемента на шаге нагружения принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_L \equiv & \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T \int_V [G]^T [D]^{-1} [B] dV \{w_y\}_{8 \times 1} + \{w_y\}_{1 \times 8}^T [K_H] \{w_y\}_{8 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T \int_V [G]^T [D]^{-1} [G] dV \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} - \frac{1}{2} \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]^T \{\Delta p\} dS - \\ & - \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]^T \{p\} dS + \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dS = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $[K_H]_{8 \times 8}$  — матрица от нелинейной части приращения деформаций.

Минимизируя функционал (28) по узловым неизвестным  $\{\Delta\varepsilon_y\}^T$  и  $\{w_y\}^T$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_L}{\partial \{\Delta\varepsilon_y\}^T} &= - [H]_{12 \times 12} \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} + [Q]_{12 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi_L}{\partial \{w_y\}^T} &= [Q]^T_{8 \times 12} \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} + [K_H]_{8 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} + \{f\}_{8 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} [Q]_{12 \times 8} &= \int_V [G]^T [D] [B] dV, & [H]_{12 \times 12} &= \int_V [G]^T [D] [G] dV, \\ \{f\}_{8 \times 1} &= \int_S [A]^T \{\Delta p\} dS - \int_V [B]^T \{\sigma\} dV + \int_V [A]^T \{p\} dS. \end{aligned}$$

Систему (29) можно представить в традиционной конечно-элементной форме:

$$[k]_{20 \times 20} \{Z_y\}_{20 \times 1} = \{F\}_{20 \times 1}, \quad (30)$$

где  $[k]_{20 \times 20} = \begin{bmatrix} - [H]_{12 \times 12} & [Q]_{12 \times 8} \\ [Q]^T_{8 \times 12} & [K_H]_{8 \times 8} \end{bmatrix}$  — матрица деформирования конечного элемента,

$\{Z_y\}_{1 \times 20} = \left\{ \begin{matrix} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T & \{w_y\}_{1 \times 8}^T \end{matrix} \right\}$  — вектор узловых неизвестных конечного элемента,

$\{F\}_{1 \times 20} = \left\{ \begin{matrix} \{0\}_{1 \times 12}^T & \{f\}_{1 \times 8}^T \end{matrix} \right\}$  — вектор узловых усилий конечного элемента на шаге нагружения.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].



**Пример.** Определено напряженно-деформированное состояние круговой арки (рис. 2) при следующих исходных данных [4]:  $R = 338.109$  см,  $t = 0.47625$  см,  $\nu = 0.2$ ,  $E = 700$  Па,  $b = 2.54$  см — шири-

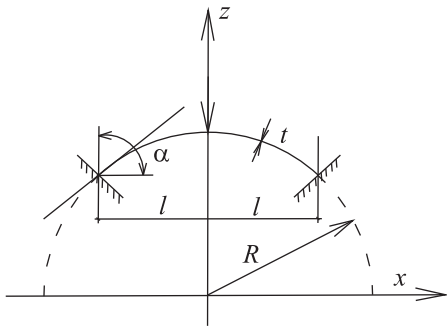


Рис. 2

на сечения арки;  $\alpha = 0.128^\circ$ . Арка рассматривалась как часть цилиндрической оболочки, срединная линия которой описывается уравнением окружности  $x^2 + z^2 = R^2$  с центром в начале координат и радиусом  $R$ . Ввиду симметрии рассматривалась четвертая часть оболочки (длиной  $l$ ) при разбивке ее на восемь элементов по длине и на два элемента по толщине.

В таблице приведены значения прогиба в центре арки в зависимости от силы  $P$  (в Н). Символом  $\nu_1$  (см) обозначены прогибы, полученные на основе скалярной аппроксимации приращений перемещений и приращений напряжений.

$P, H$	16	32	48	64	80	88	96	104	112
$\nu_1, \text{ см}$	0.033	0.069	0.109	0.160	0.221	0.254	0.297	0.351	0.498
$\nu_2, \text{ см}$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.239	0.277	0.320	0.371	0.429
$\nu_3, \text{ см}$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.241	0.279	0.323	0.376	0.437

Перемещения, полученные при использовании приращений перемещений и приращений напряжений как векторных и тензорных полей, обозначены в таблице символом  $\nu_2$ . Символом  $\nu_3$  обозначены перемещения [3].

Как видно из таблицы, приемлемые результаты с использованием рассматриваемых способов аппроксимации искомых величин получались при нагрузке меньше 100 Н. При большей нагрузке в случае использования скалярной аппроксимации искомых величин происходил срыв вычислительного процесса.

Указанное обстоятельство доказывает корректность разработанной тензорной интерполяции полей искомых величин методом конечных элементов в смешанной формулировке.

### Библиографический список

1. Гуреева Н. А. Решение плоской задачи теории упругости с использованием варианта МКЭ в смешанной формулировке // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 8–11.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л. : Судостроение, 1974. 344 с.
4. Papenhausen V. Eine energiegerechte, incrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen. Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finiter Elemente / Tech.-wiss. Mitt. Jnst. Konstr. Ingenieurbaun Ruhr-Univ. Bochum, 1975. № 13, III. 133 p.

УДК 539.3

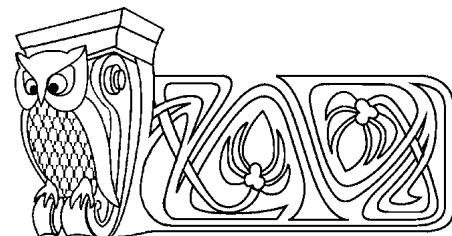
## ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА

А. В. Доль, Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет  
E-mail: dzero@pisem.net, gulvis@yandex.ru

В работе рассмотрена математическая модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов. Предложена трехмерная система уравнений, описывающая движение крови по сосудам с учетом влияния стенок на поток.

**Ключевые слова:** кровоток, кровеносный сосуд, система уравнений.



### 3-Dimensional Mathematical Model of Blood Flow with Secondary Heart Theory

A. V. Dol, Yu. P. Gulyaev

This paper presents haemodynamics of blood vessels mathematical model. There is 3-dimentional system of equations describes blood flow, where vessel motions are taking in account.

**Key words:** blood flow, blood vessel, system of equations.