УДК 517.927

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

А. Е. Федосеев

Саратовский государственный университет
E-mail: fedoseev_ae@mail.ru

В статье исследуется обратная задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя внутри интервала по заданной функции Вейля. Получена процедура решения, доказана единственность такого восстановления, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Штурма–Лиувилля, неинтегрируемая особенность, функция Вейля.

Inverse Problem for Sturm–Liouville Operator on the Half-line Having Nonintegrable Singularity in an Interior Point

A. E. Fedoseev

The inverse problem of recovering Sturm–Liouville operators on the half-line with a nonintegrable Bessel-type singularity in an interior point from the given Weyl function is studied. The corresponding uniqueness theorem is proved, a constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions of the solvability of the inverse problem are obtained.

Key words: inverse problem, Sturm-–Liouville operator, nonintegrable singularity, Weyl function.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\ell y = -y'' + \left(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\right) y = \lambda y, \qquad x > 0, \tag{1}$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью в точке $a > 0$. Здесь ν_0 — комплексное число, $q(x)$ — комплекснозначная функция. Положим $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \dots$ Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2\,\mathrm{Re}\,\nu)} \in L(0,T)$ при некотором $T > a$ и $q(x) \in L(T,\infty)$. Класс таких функций $q(x)$ будем обозначать через W.

В данной статье исследуется краевая задача $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(x), h)$ для дифференциального уравнения (1) с краевым условием:

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0$$

и с дополнительным *условием склейки* решений около особой точки $x = a$. При этом рассматриваются произвольные в некотором смысле условия склейки, порождаемые матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (подробнее см. параграф 2). В частном случае при ($\nu_0 = 0$) рассматриваемые условия склейки соответствуют условию

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}(a+0) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}(a-0).$$

Целью работы является исследование нелинейной обратной задачи восстановления $\mathcal{L}$ по заданной функции Вейля. Доказана единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля, получен алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Метод оператора преобразования, используемый в [1, 2] для классических операторов Штурма–Лиувилля, оказывается неудобным для задачи $\mathcal{L}$. В данной статье используется другой метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла (см. [3, 4]). В работе [5] данная обратная задача исследовалась в другой постановке и была доказана единственность и алгоритм решения обратной задачи. Для уравнения высшего порядка на полуоси с регулярной особенностью единственность решения обратной задачи была доказана в статье [6].

2. ФУНКЦИЯ ВЕЙЛЯ

Пусть $\lambda = \rho^2$ и $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Рассмотрим функции

$$C_j(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x-a))^{2k}, \qquad j=1,2,$$

где $\mu_j = (-1)^j\nu + 1/2$, $c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1}$, $c_{jk} = (-1)^k c_{j0}\left(\prod\limits_{s=1}^{k}((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1)-\nu_0)\right)^{-1}$.

Здесь и в дальнейшем $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i\arg z))$, $\arg z \in (-\pi,\pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть функции $s_j(x,\lambda)$, $j=1,2$, являются решениями следующих интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_a^x g(x,t,\lambda)q(t)s_j(t,\lambda)\,dt,$$

где $g(x,t,\lambda) = C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)C_2(t,\lambda)$. При каждом фиксированном x функции $s_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ порядка 1/2 и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$ с комплексными a_{jk}. Введем функции $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=1,2}$, $x \in J_- \cup J_+$, $J_\pm = \{\pm(x-a) > 0\}$ по формуле

$$\sigma_j(x,\lambda) = \begin{cases} s_j(x,\lambda), & x \in J_-,\\ \sum\limits_{k=1}^{2} a_{kj}s_k(x,\lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x,\lambda)\}$ будет использоваться для склейки решений в окрестности особой точки $x = a$.

Введем числа ξ_{jk}, $j,k = 1,2$, по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\pi\nu}\begin{bmatrix} -a_{11}e^{2\pi i\nu} + a_{22}e^{-2\pi i\nu} & -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) \\ -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Поведение спектра краевой задачи $\mathcal{L}$ зависит от величин ξ_{jk}. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать наиболее важный частный случай, когда $|\xi_{jj}| > |\xi_{12}| > 0$ и $a_{12} = 0$. В этом случае, в отличие от классических операторов Штурма–Лиувилля, дискретный спектр является неограниченным, и возникают новые качественные эффекты при исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа.

Обозначим

$$\varphi_1(x,\lambda) = \sigma_2'(0,\lambda)\sigma_1(x,\lambda) - \sigma_1'(0,\lambda)\sigma_2(x,\lambda), \qquad \varphi_2(x,\lambda) = \sigma_1(0,\lambda)\sigma_2(x,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)\sigma_1(x,\lambda).$$

Функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$, являются решениями дифференциального уравнения (1) при $x \in J_\pm$ и удовлетворяют начальным условиям:

$$\varphi_j^{(m-1)}(0,\lambda) = \delta_{jm}, \qquad j,m = 1,2,$$

где δ_{jm} — символ Кронекера.

Обозначим через Π_+ λ-плоскость с двухсторонним разрезом Π_0 вдоль луча $\Lambda_+ := \{\lambda : \lambda \geq 0\}$ и положим $\Pi := \overline{\Pi_+} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \to \rho^2 = \lambda$ множества Π_+, Π_0 и Π соответствуют множествам $\Omega_+ = \{\rho : \operatorname{Im}\rho > 0\}$, $\Omega_0 = \{\rho : \operatorname{Im}\rho = 0\}$ и $\Omega = \{\rho : \operatorname{Im}\rho \geq 0, \rho \neq 0\}$. Пусть $e(x,\rho)$, $x \geq 0$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ — разрывное решение Йоста, введенное в [5], для уравнения (1). Обозначим $S_{k_0} = \{\rho : \arg\rho \in (k_0\pi/2, (k_0+1)\pi/2)\}$, $k_0 = 0,1$, и $\Delta(\rho) = e'(0,\rho) - he(0,\rho)$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Функция $\Delta(\rho)$ называется характеристической функцией краевой задачи $\mathcal{L}$. Функция $\Delta(\rho)$ имеет счетное множество нулей вида

$$\rho_k = \rho_k^\pm + O(k^{-1}), \qquad k \to \pm\infty,$$

где $\rho_k^{\pm} = (k+\theta_{\pm})\pi/a$ — нули функций $\Delta^{\pm}(\rho) = \xi_{12} + \xi_{jj}\exp(2i\rho a)$, $\rho \in S_{2-j}$, $j = 1,2$, и

$$\theta_{\pm} = -\frac{i}{2\pi}\ln\left|\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}}\right| + \frac{1}{2\pi}\arg\left(-\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}}\right)$$

(«$-$» при $j = 1$, «$+$» при $j = 2$). Ясно, что $\operatorname{Im}\theta_{\pm} > 0$. Для определенности пусть $\arg(-\xi_{12}/\xi_{jj}) \in [0, 2\pi)$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega,\ \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda' = \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega_+,\ \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_0,\ \rho \neq 0,\ \Delta(\rho) = 0\}$. Тогда $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$, Λ' — счетное неограниченное множество, Λ'' — ограниченное множество. Положим

$$\Phi(x,\lambda) = e(x,\rho)/\Delta(\rho), \quad M(\lambda) := \Phi(0,\lambda).$$

Функция $\Phi(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям $U(\Phi) = 1$, $\Phi(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$, $\rho \in \Omega$ и называется *решением Вейля* для $\mathcal{L}$. Функцию $M(\lambda)$ будем называть *функцией Вейля* для $\mathcal{L}$. Пусть заданы фиксированные матрица A и число ν_0.

Задача 1. *По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ построить функцию $q(x)$ и найти число h.*

Ясно, что

$$M(\lambda) = e(0,\rho)/\Delta(\rho), \qquad \Phi(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda), \tag{2}$$

где $\varphi(x,\lambda) := \varphi_1(x,\lambda) + h\varphi_2(x,\lambda)$. Функция Вейля $M(\lambda)$ является аналитической в $\Pi_+ \setminus \Lambda'$ и непрерывной в $\Pi\setminus\Lambda$. Множество особенностей $M(\lambda)$ (как аналитической функции) совпадает с множеством $\Lambda_0 := \Lambda_+ \cup \Lambda$. Введем область $G_\delta := \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geq 0,\ |\rho - \rho_k| \geq \delta,\ \rho_k \in \Lambda\}$. Функция Вейля при $|\lambda| \to \infty$, $\rho \in G_\delta \cap \overline{S}_{2-j}$, $j = 1,2$, имеет следующую асимптотику:

$$M(\lambda) = \frac{1}{i\rho}\left(M_0^{\pm}(\lambda) + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{3}$$

$$M_0^{\pm}(\lambda) = \frac{\xi_{12} - \xi_{jj}\exp(2i\rho a)}{\xi_{12} + \xi_{jj}\exp(2i\rho a)},$$

где «$-$» соответствует $j = 1$, «$+$» соответствует $j = 2$.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для исследования обратной задачи условимся, что наряду с $\mathcal{L}$ будем рассматривать краевую задачу $\tilde{\mathcal{L}}$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q}$ и $\tilde{h}$. Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче $\mathcal{L}$, то соответствующий символ $\tilde{\gamma}$ с волной наверху будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{\mathcal{L}}$, а $\widehat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Теорема 1. *Если $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду при $x > 0$ и $h = \tilde{h}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет краевую задачу $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Определим матрицу $P(x,\lambda) = [P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,2}$ по формулам

$$\begin{aligned} P_{k1}(x,\lambda) &= \frac{1}{\eta(x)}\left(\varphi^{(k-1)}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda) - \Phi^{(k-1)}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\right), \\ P_{k2}(x,\lambda) &= \frac{1}{\eta(x)}\left(\Phi^{(k-1)}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \varphi^{(k-1)}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\eta(x) = 1$ при $x \in J_-$ и $\eta(x) = \det A$ при $x \in J_+$. Обозначим $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$.

Так как $\langle\varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle = \eta(x)$, то

$$\varphi(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda), \qquad \Phi(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda). \tag{5}$$

Используя оценки из [5], получаем, что при $x \geq 0$, $\rho \in G_\delta$, $|\rho| \to \infty$:

$$P_{jk}(x,\lambda) - \delta_{jk} = O(\rho^{-1}), \quad j \leq k; \qquad P_{21}(x,\lambda) = O(1). \tag{6}$$

Пусть $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$. Тогда ввиду (4) и (2) заключаем, что при каждом фиксированном x функции $P_{jk}(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Учитывая (6), получаем $P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$. Подставляя это в (5), выводим $\varphi(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}(x,\lambda)$ при всех x и λ и, следовательно, $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$. Теорема 1 доказана. □

Перейдем теперь к построению решения обратной задачи. Будем говорить, что $\mathcal{L} \in V$, если $q(x) \in W$. Обратную задачу будем решать в классе V.

Выберем пару $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}(x), \tilde{h})$ так, что $\widehat{M}(\lambda) = O(\rho^{-2})$ (например, можно брать $\tilde{q}(x) = 0$, $\tilde{h} = 0$). Обозначим

$$D(x,\lambda,\mu) = \frac{1}{\eta(x)} \frac{\langle \varphi(x,\lambda), \varphi(x,\mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \qquad r(x,\lambda,\mu) = D(x,\lambda,\mu)\widehat{M}(\mu).$$

При фиксированном $x \in J_{\pm}$, $\lambda = \rho^2$, $\mu = \theta^2$, $0 \le \operatorname{Im}\rho \le C$, $0 \le \operatorname{Im}\theta \le C$ имеют место следующие оценки (см. [5]):

$$|D(x,\lambda,\mu)| \le \frac{C}{|\rho \mp \theta| + 1}, \qquad |\varphi(x,\lambda)| \le C, \qquad \pm \operatorname{Re}\rho \operatorname{Re}\theta \ge 0.$$

Функции $\tilde{r}$ и $\tilde{D}$ определим по тем же формулам, но с $\tilde{\varphi}$ вместо φ. Возьмем $H > 0$ так, чтобы $\operatorname{Im}\rho_k < H$, $\operatorname{Im}\tilde{\rho}_k < H$ при всех $\rho_k \in \Lambda$, $\tilde{\rho}_k \in \tilde{\Lambda}$. Пусть $\gamma = \{\lambda = u + iv : \ u = (2H)^{-2}v^2 - H^2\}$ — образ множества $\operatorname{Im}\rho = H$ при отображении $\lambda = \rho^2$. Обозначим $J_\gamma = \{\lambda : \ \lambda \notin \gamma \cup \operatorname{int}\gamma\}$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \tilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\, d\mu, \tag{7}$$

$$r(x,\lambda,\mu) - \tilde{r}(x,\lambda,\mu) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \tilde{r}(x,\lambda,\xi) r(x,\xi,\mu)\, d\xi = 0, \tag{8}$$

$$\tilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int\limits_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x,\lambda), \tilde{\varphi}(x,\mu) \rangle}{\lambda - \mu} \widehat{M}(\mu) \varphi(x,\mu)\, d\mu, \qquad \lambda \in J_\gamma. \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем положительные числа $r_N = ((N+\chi)\pi/a)^2$ так, чтобы окружности $\theta_N := \{\lambda : \ |\lambda| = r_N\}$ лежали в G_δ при достаточно малом $\delta > 0$. Обозначим $\theta_{N,0} = \{\lambda : \ |\lambda| \le r_N\}$, $\gamma_N = (\gamma \cap \theta_{N,0}) \cup \{\lambda : \ |\lambda| = r_N, \ \lambda \in \operatorname{int}\gamma\}$ (с обходом против часовой стрелки). Согласно интегральной формуле Коши имеем:

$$P_{1k}(x,\lambda) = \delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_N} \frac{P_{1k}(x,\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta_N} \frac{P_{1k}(x,\mu) - \delta_{1k}}{\lambda - \mu}\, d\mu, \qquad \lambda \notin \operatorname{int}\gamma_N.$$

Используя (6), при $N \to \infty$ получаем

$$P_{1k}(x,\lambda) = \delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{P_{1k}(x,\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu, \qquad \lambda \in J_\gamma. \tag{10}$$

Здесь (и везде в дальнейшем, где это необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int\limits_\gamma = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\gamma_R}.$$

В силу (5) и (10)

$$\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\tilde{\varphi}(x,\lambda) P_{11}(x,\mu) + \tilde{\varphi}'(x,\lambda) P_{12}(x,\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu, \qquad \lambda \in J_\gamma.$$

Отсюда, учитывая (4) и (2), вытекает (7), так как слагаемые с $\varphi_2(x,\mu)$ равны нулю в силу теоремы Коши.

Аналогичным образом получаются (8) и (9). Теорема 2 доказана. □

На соотношение (7) можно смотреть, как на уравнение относительно $\varphi(x,\lambda)$ для любого фиксированного x. Уравнение (7) называется *основным уравнением* обратной задачи.

Рассмотрим банахово пространство $C(\gamma)$ непрерывных ограниченных функций $z(\lambda)$, $\lambda \in \gamma$, с нормой $\|z\| = \sup\limits_{\lambda\in\gamma} |z(\lambda)|$.

Теорема 3. *При каждом фиксированном $x \geq 0$ основное уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi(x,\lambda) \in C(\gamma)$.*

Доказательство. При фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим следующие линейные ограниченные операторы в $C(\gamma)$:

$$\tilde{A}z(\lambda) = z(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{r}(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu, \qquad Az(\lambda) = z(\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} r(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu.$$

Тогда

$$\tilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(r(x,\lambda,\mu) - \tilde{r}(x,\lambda,\mu) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\xi)r(x,\xi,\mu)\,d\xi\right) z(\mu)\,d\mu.$$

В силу (8) это дает $\tilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda)$, $z(\lambda) \in C(\gamma)$. Меняя местами $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, получаем аналогично $A\tilde{A}z(\lambda) = z(\lambda)$. Таким образом, $\tilde{A}A = A\tilde{A} = E$, где E — единичный оператор. Следовательно, оператор $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (7) однозначно разрешимо при каждом $x \geq 0$. Теорема 3 доказана. □

Таким образом, получем следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм 1. *Пусть задана функция $M(\lambda)$.*

1. *Выбираем $\tilde{\mathcal{L}} \in V$.*
2. *Находим $\varphi(x,\lambda)$ из основного уравнения* (7).
3. *Строим $q(x)$ и h по формулам* $q(x) = \lambda + \dfrac{\varphi''(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} - \dfrac{\nu_0}{(x-a)^2}$, $h = \varphi'(0,\lambda)$.

4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Здесь мы приведем необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Для упрощения выкладок будем предполагать, что краевая задача $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}(x),\tilde{h})$ выбрана так, что

$$\widehat{M}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4}\right). \tag{11}$$

Обозначим

$$\varepsilon_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\tilde{\varphi}(x,\mu)\varphi(x,\mu)\widehat{M}(\mu)\,d\mu, \qquad \varepsilon(x) = -2\varepsilon_0'(x). \tag{12}$$

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x), \tag{13}$$

$$h = \tilde{h} - \varepsilon_0(x). \tag{14}$$

Доказательство. Дифференцируя (7) дважды по x, используя (12) и соотношение

$$\frac{d}{dx}\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu} = \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu),$$

получаем

$$\tilde{\varphi}'(x,\lambda) - \varepsilon_0(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi'(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu, \tag{15}$$

$$\tilde{\varphi}''(x,\lambda) = \varphi''(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi''(x,\mu)\,d\mu + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}2\tilde{\varphi}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\mu)\widehat{M}(\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\Big(\tilde{\varphi}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\mu)\Big)'\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{16}$$

Заменяем в (16) вторые производные из уравнения (1), а затем заменяем $\varphi(x,\lambda)$, используя (7), получаем (13). Положив $x=0$ в (15), получаем (14). $\square$

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Через $\mathbf{W}$ обозначим множества функций $M(\lambda)$ таких, что: а) $M(\lambda)$ аналитична в Π_+, за исключением не более чем счетного множества полюсов Λ' и непрерывна в $\Pi\setminus\Lambda$; б) при $|\lambda|\to\infty$ имеет место (3).

Теорема 5. *Для того чтобы функция $M(\lambda)\in\boldsymbol{W}$ была функцией Вейля для некоторой пары $\mathcal{L}\in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *(асимптотика) существует $\tilde{\mathcal{L}}\in V$ такое, что выполняется* (11)*;*

2) *(условие P) при каждом фиксированном $x\ge 0$ уравнение* (7) *имеет единственное решение $\varphi(x,\lambda)\in C(\gamma)$;*

3) *$\varepsilon(x)\in W$, где функция $\varepsilon(x)$ определяется формулой* (12).

При этих условиях $q(x)$ и h строятся по формулам (13)*,* (14).

Необходимость теоремы 5 доказана выше. Докажем теперь достаточность. Пусть дана функция $M(\lambda)\in\mathbf{W}$, удовлетворяющая условиям теоремы 5 и пусть $\varphi(x,\lambda)$ — решение основного уравнения (7). Тогда (7) дает аналитическое продолжение для $\varphi(x,\lambda)$ во всю λ-плоскость, причем при каждом $x\ge 0$ функция $\varphi(x,\lambda)$ является целой по λ порядка 1/2. Можно показать, что функции $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu=0,1$, абсолютно непрерывны на компактах при $|x-a|\ge\varepsilon$ для каждого фиксированного $\varepsilon>0$ и

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)|\le C|\rho|^{\nu}\exp(|\tau|x),\qquad \lambda\in\gamma. \tag{17}$$

Построим функцию $\Phi(x,\lambda)$ из соотношений (9), а также $\mathcal{L}=\mathcal{L}(q(x),h)$ по формулам (13)–(14). Ясно, что $\mathcal{L}\in V$.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),\qquad \ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda).$$

Доказательство. Дифференцируя (7) дважды по x, получаем (15) и (16). Из (16), (7) и (13) вытекает

$$\tilde{\ell}\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{18}$$

Используя (9), выводим аналогично

$$\tilde{\Phi}'(x,\lambda)-\varepsilon_0(x)\tilde{\Phi}(x,\lambda)=\Phi'(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\tilde{\Phi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu, \tag{19}$$

$$\tilde{\ell}\tilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\tilde{\Phi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\gamma}\langle\tilde{\Phi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{20}$$

Из (18) следует, что

$$\lambda\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\lambda-\mu)\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.$$

Учитывая (7), находим, что при фиксированном $x\ge 0$

$$\eta(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tilde{r}(x,\lambda,\mu)\eta(x,\mu)\,d\mu=0,\qquad \lambda\in\gamma, \tag{21}$$

где $\eta(x,\lambda)=\ell\varphi(x,\lambda)-\lambda\varphi(x,\lambda)$. Согласно (17) при фиксированном $x\ge 0$ имеем:

$$|\eta(x,\lambda)|\le C|\rho|^2,\qquad \lambda\in\gamma. \tag{22}$$

Используя найденную оценку (22) и (21) приходим к оценке $|\eta(x,\lambda)|\le C$ для $\lambda\in\gamma$. В силу условия P теоремы 5 однородное уравнение (21) имеет только нулевое решение $\eta(x,\lambda)\equiv 0$. Следовательно,

$$\ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda).$$

Отсюда с учетом (20) и (9) получаем $\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda)$. □

Продолжим *доказательство теоремы* 5. Полагая $x=0$ в (7), (15) и используя (14), получаем

$$\varphi(0,\lambda)=\tilde\varphi(0,\lambda)=1,\qquad \varphi'(0,\lambda)=\tilde\varphi(0,\lambda)-\varepsilon_0(0)\tilde\varphi(0,\lambda)=\tilde h+h-\tilde h=h. \tag{23}$$

Используя (9) и (19), вычисляем

$$\Phi(0,\lambda)=\tilde\Phi(0,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\qquad \Phi'(0,\lambda)=\tilde\Phi'(0,\lambda)-\tilde\Phi(0,\lambda)\varepsilon_0(0)+\frac{h}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu. \tag{24}$$

Следовательно,

$$U(\Phi)=\Phi'(0,\lambda)-h\Phi(0,\lambda)=\tilde\Phi'(0,\lambda)-(\varepsilon_0(0)+h)\tilde\Phi(0,\lambda)=\tilde\Phi'(0,\lambda)-\tilde h\tilde\Phi(0,\lambda)=\tilde U(\tilde\Phi)=1.$$

Зафиксируем $\lambda\in J_\gamma$. Из (9), (23) с учетом оценок $|\tilde\varphi^{(m)}(x,\mu)|\le C|\theta|^m|\exp(-i\theta x)|$, $\mu=\theta^2$, $x\ge 0$, $m=0,1$, $|\tilde\Phi^{(m)}(x,\lambda)|\le C_\delta|\rho|^{m-1}|\exp(i\rho x)|$, $x\ge 0$, $\rho\in G_\delta$, получаем что верно $\Phi(x,\lambda)=O(\exp(i\rho x+2Hx))$, $x\to\infty$. Отсюда и из того, что $U(\Phi)=1$, следует, что $\Phi(x,\lambda)$ — решение Вейля. Далее, из (24) вытекает

$$\Phi(0,\lambda)=\widetilde M(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu.$$

Согласно интегральной формуле Коши имеем:

$$\widehat M(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta_N}\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\qquad \lambda\notin \operatorname{int}\gamma_N.$$

Тогда при $N\to\infty$ получаем

$$\widehat M(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\widehat M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\qquad \lambda\in J_\gamma.$$

Следовательно, $\Phi(0,\lambda)=\widetilde M(\lambda)+\widehat M(\lambda)=M(\lambda)$, т. е. $M(\lambda)$ является функцией Вейля для $\mathcal{L}$.

Теорема 5 доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 330 с.

2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 239 с.

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 1984. 384 с.

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory // Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 303 p.

5. *Юрко В. А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 645–659.

6. *Fedoseev A. E.* Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point // Tamkang J. of Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 343–354.