



МЕХАНИКА

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

С.М. Айзикович, Л.И. Крнев, И.С. Трубочик

Донской государственной технический университет, Ростов-на-Дону,
кафедра информатики

E-mail: aizsm@rambler.ru, krd91adv@aaanet.ru, trira@rambler.ru

В работе рассматривается задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа. Предполагается, что штамп является телом вращения, подошва которого имеет параболическую форму, а контакт между штампом и неоднородным слоем гладкий. При решении контактной задачи используется двухсторонний асимптотический метод. В численном эксперименте анализируется напряженно-деформированное состояние покрытия, модуль Юнга которого является непрерывной гладкой немонотонной функцией, первая производная которой изменяет свой знак конечное число раз по глубине покрытия.

Ключевые слова: функционально-градиентное покрытие, контактная задача.

The Contact Problems for the Elastic Foundation with the Functionally Graded Coatings of the Complicated Structure

S.M. Aizikovich, L.I. Krenev, I.S. Trubchik

Don State Technical University, Rostov-on-Don,
Chair of Information Sciences

E-mail: aizsm@rambler.ru, krd91adv@aaanet.ru, trira@rambler.ru

The contact problem for the impression of axisymmetrical indenter into a functional graded elastic half-space is considered. Analytical methods for solving this problem have been developed. It is assumed that the indenter has a parabolic shape and contact between the indenter and the coating is smooth. The used method make it possible to find the analytical asymptotically exact problem solution. The stress-strain state of the coating is analyzed due to numerical experiment with the coatings which elastic modula are described with continuously smooth non-monotonic function with the changing of derivation sight is finite into the coating.

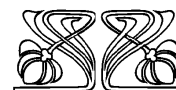
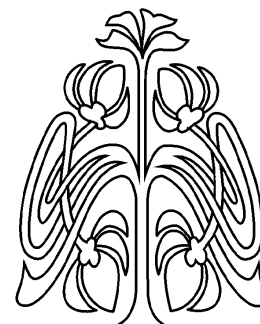
Key words: FGC, contact problem.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

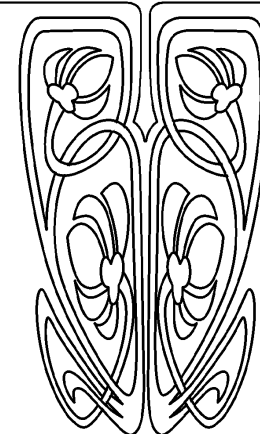
Сферический индентор вдавливаются в поверхность неоднородного упругого полупространства силой P . С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, φ, z) .

Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта сферический индентор аппроксимируется жестким параболическим индентором:

$$z = \varphi(r) = \beta r^2.$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Вне индентора поверхность полупространства не загружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z .

Считаем, что модуль Юнга $E(z)$ непрерывно и немонотонно изменяется по глубине в пределах неоднородного слоя, а коэффициент Пуассона $\nu(z)$ остается постоянным:

1. $E = E(z), \quad \nu = \nu(-H), \quad -H \leq z \leq 0,$
2. $E = E(-H), \quad \nu = \nu(-H), \quad -\infty \leq z \leq -H.$

При вышеуказанных предположениях граничные условия имеют вид

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a, \\ w = \chi(r) = \chi - \varphi(r), & r \leq a. \end{cases}$$

Здесь w — смещение вдоль оси z , τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$, σ_z — радиальные, тангенциальные и нормальные напряжения.

При $z = -H$ должно выполняться условие сопряжения по напряжениям и перемещениям:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}.$$

Напряжения и деформации стремятся к нулю при $(r, -z) \rightarrow \infty$.

Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом $\sigma_z(r, 0) = -q(r)$, $0 < r \leq a$, размер зоны контакта a , а также связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа χ .

Так как края индентора не врезаются в поверхность полупространства, то должно выполняться соотношение $q(a) = 0$, которое используется для определения полуширины зоны контакта и накладывает некоторые ограничения на функцию $q(r)$.

Заметим также, что в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $q(r) \geq 0$ для всех $r \leq a$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ ШТАМПА В НЕОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Посредством преобразования Ханкеля и метода модулирующих функций задача сводится к решению парного интегрального уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta(0)} \int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = f(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad f(r) = \delta - \varphi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\varphi(ar) = \beta a^2 r^2$, $\beta = (2R)^{-1}$, R — радиус сферы, внедряемой в полупространство, $\lambda = H/a$ — характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda\alpha)$ — трансформанта ядра парного интегрального уравнения. При выполнении условий

$$\begin{aligned} \min_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) &\geq c > 0, \\ \max_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) &\leq c < \infty, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(z) &= \text{const}, \\ \Delta(z) &= E(z)(1 - \nu^2(z))^{-1} \end{aligned}$$



и с помощью полиэкспоненциального представления в [1] показано, что трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A + B|\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0, \\ L(\alpha) &= 1 + D|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \\ A &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(0)\Delta^{-1}(z). \end{aligned}$$

Здесь A, B, D — постоянные.

Аппроксимируем трансформанту ядра выражением

$$\begin{aligned} L(\lambda\alpha) &\approx L_N(\lambda\alpha), \\ L_N(\lambda\alpha) &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a^2 + A_i^2 \lambda^{-2}}{a^2 + B_i^2 \lambda^{-2}}. \end{aligned}$$

Парное интегральное уравнение (1), в котором ядро $L(\lambda\alpha)$ заменено на $L_N(\lambda\alpha)$, имеет замкнутое решение [2]:

$$q_N^{\text{II}}(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -2A^0 L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} - \sum_{i=1}^N C_i a_i \int_r^1 \frac{\text{sh}(a_i t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right\}.$$

Коэффициенты C_i определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \text{sh } a_i + b_i \text{ch } a_i}{b_k^2 - a_i^2} + L_N^{-1}(0) b_k^{-1} [B^0 + A^0 [1 + 2(b_k + 1) b_k^{-2} + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} + b_i^{-2})]] = 0.$$

Постоянная B^0 определяется из условия $q(1) = 0$, оно имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N C_i \text{ch}(a_i) + L_N^{-1}(0) \left[B^0 + A^0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} - b_i^{-2}) \right] \right] = 0.$$

Здесь $a_i = A_i \lambda^{-1}$, $b_i = B_i \lambda^{-1}$, $B^0 = \delta \Delta(0)$, $A^0 = 2a\beta \Delta(0)$.

Связь между вдавливающей силой и осадкой штампа определяется из условия равновесия штампа:

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 q(r) r dr.$$

Имеем

$$P_N^{\text{II}} = 4a^2 \left[-\frac{4}{3} \alpha \beta L_N^{-1}(0) \Delta(0) + \sum_{i=1}^N C_i (-\text{ch } a_i + a_i^{-1} \text{sh } a_i) \right].$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В численном эксперименте анализируется влияние немонотонного изменения по глубине модуля Юнга на напряженно-деформированное состояние покрытия и подложки при внедрении сферического индентора. Предполагается, что модуль Юнга изменяется по закону

$$E(z) = E_0 (1 + (m-1) \sin^2(kz\pi/2))^n, \quad z' = z/H, \quad k = 1, 2, 3; \quad n = \pm 1, \quad (2)$$

при этом рассмотрены случаи более жесткого $n = 1$ и менее жесткого $n = -1$ покрытия. Значение модуля Юнга может изменяться в m раз по сравнению с подложкой (в данном примере $m = 3.5$). На рис. 1 представлены шесть вышеописанных случаев изменения модуля Юнга по глубине в пределах неоднородного покрытия.

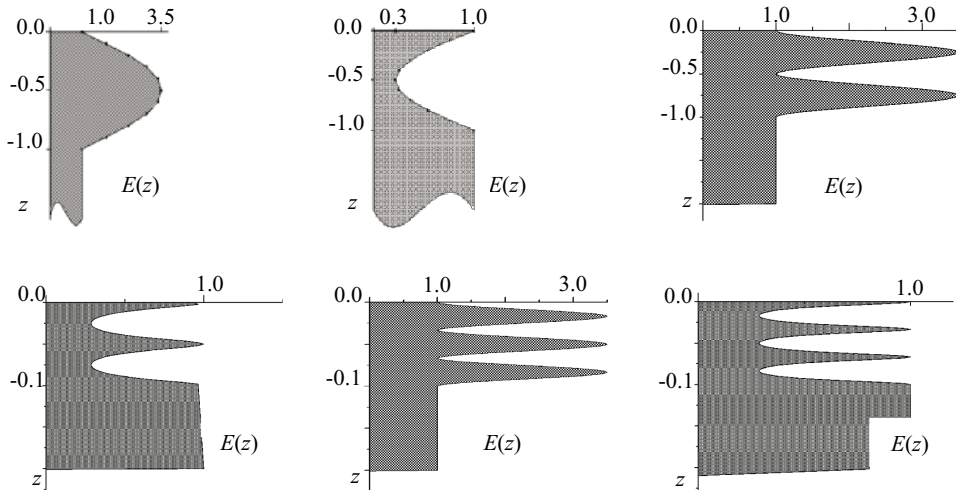
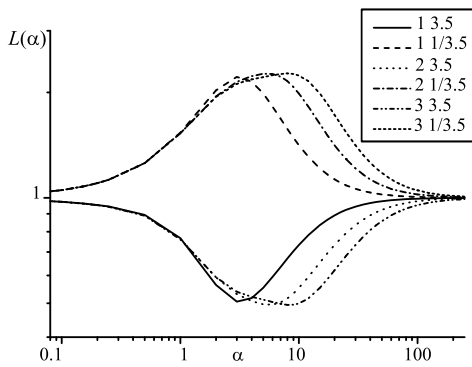


Рис. 1. Графики функций, описывающих изменение модуля Юнга по глубине

На рис. 2 представлены трансформанты ядер парного интегрального уравнения для этих случаев изменения механических свойств по глубине. Первая цифра в легенде графика указывает на параметр k закона неоднородности (2), а вторая — на отношение экстремального значения модуля Юнга в покрытии к его значению в подложке. Интересно отметить, что параметр k , отражающий степень изменчивости функции по глубине покрытия, не влияет на число вершин кривой, а приводит к сдвигу экстремума в область больших α .



Следует отметить, что графики трансформант ядер для законов $E(z)$ при $n = 1$, соответствующих более жестким покрытиям, расположены ниже прямой $L = 1$, а при $n = -1$ — выше. Графики приведены в логарифмической шкале, которая помогает отчетливо показать симметрию кривых, описывающих трансформанты ядер.

Рис. 2. Трансформанты ядер парного интегрального уравнения

Результаты численного эксперимента показывают, что для $k = 1$ ошибка лежит в пределах 4–5%, а для k большего единицы в пределах 10–11%. На рис. 3–5 приводятся графики трансформант ядер $L(\alpha)$, их аппроксимации $L_N(\alpha)$ и абсолютная погрешность аппроксимации для всех рассматриваемых в работе законов изменения модуля Юнга в покрытии. Кроме того, приводятся лейблы законов.

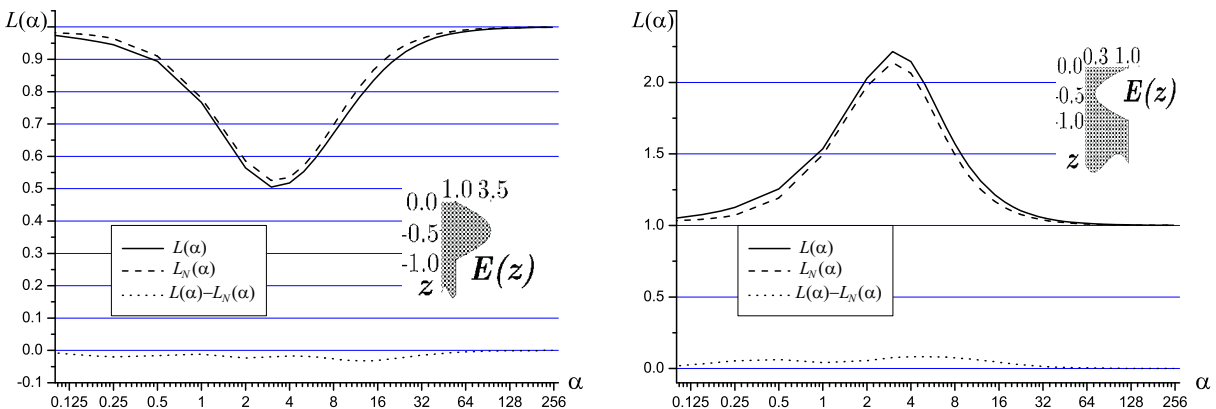


Рис. 3. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 1$)

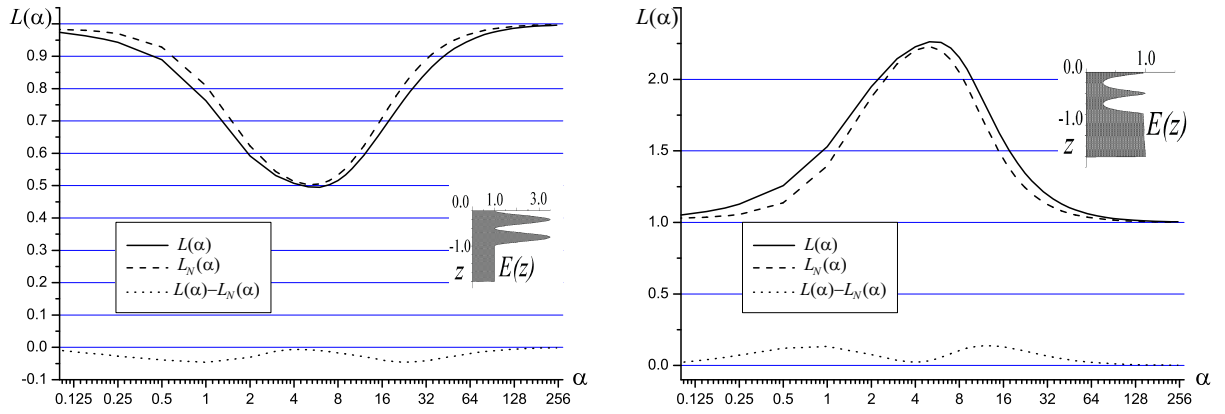


Рис. 4. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 2$)

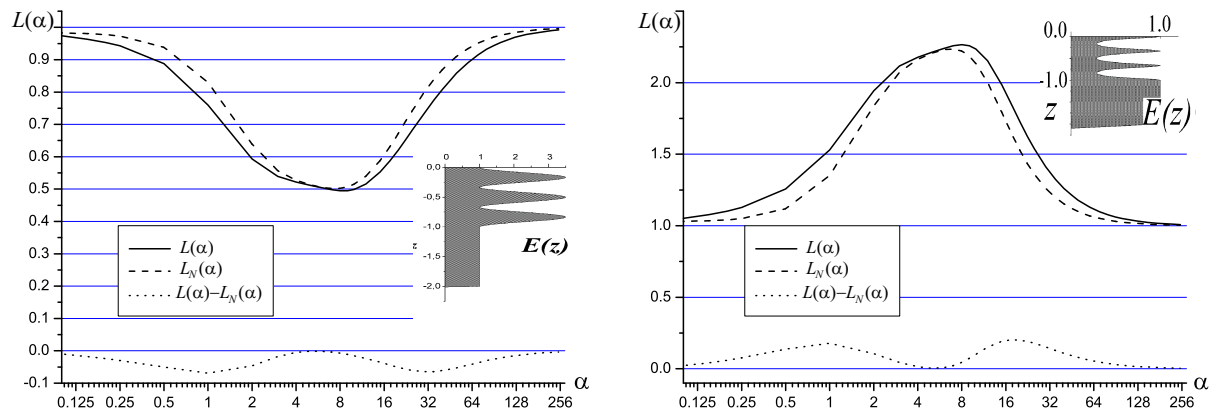


Рис. 5. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 3$)

На рис. 6 представлены результаты расчета контактных напряжений для вышеперечисленных законов неоднородности свойств покрытий при изменении отношения зоны контакта к толщине неоднородного слоя от 0.1 до 5.1. Контактные напряжения для жестких и мягких покрытий различаются в разы, поэтому для сопоставления они приведены в нормированный вид, а именно отнесены к величине среднего давления на площадке контакта. Анализ графиков показывает, что наибольшие отклонения от распределения контактных напряжений, соответствующего однородному полупространству, наблюдаются для значений, близких к единице, то есть тогда, когда зона контакта сопоставима с толщиной неоднородного покрытия. Для малых и больших значений распределение контактных давлений мало отличается от однородного случая.

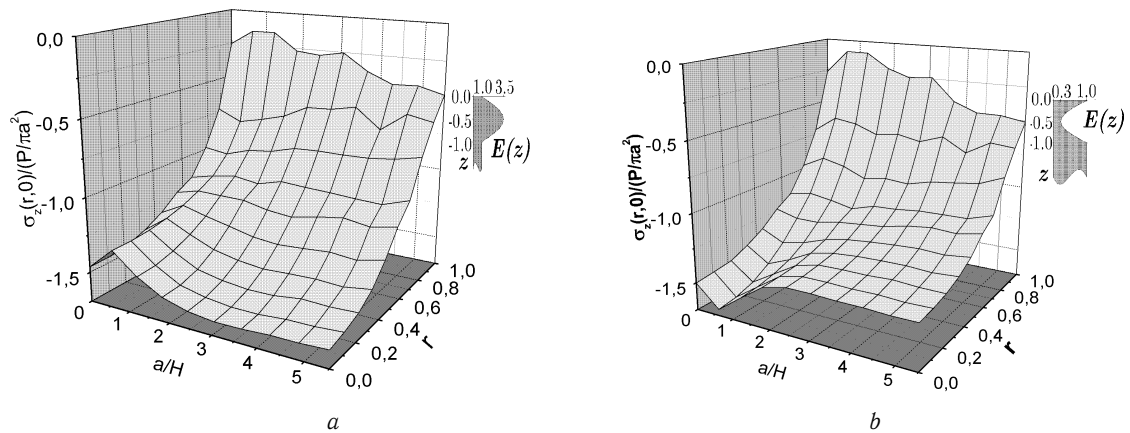


Рис. 6. Контактные напряжения

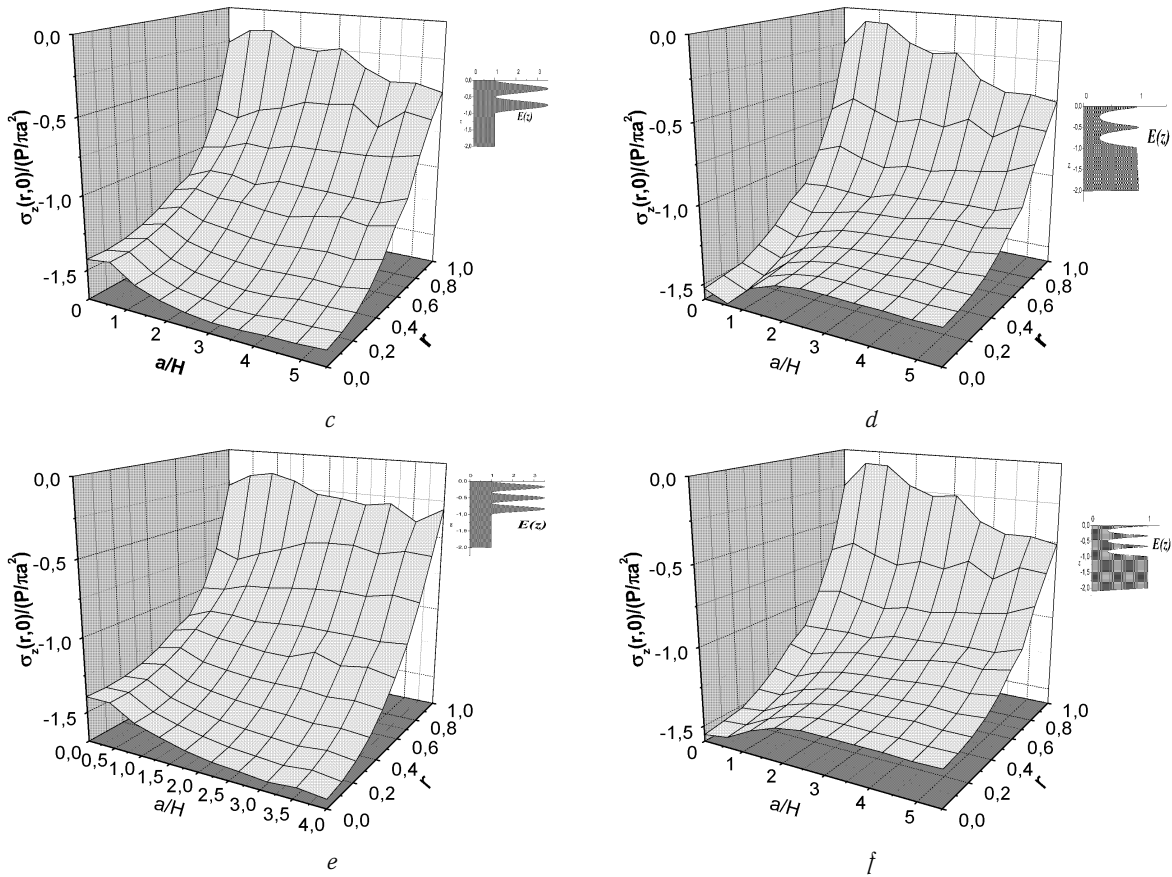


Рис. 6. Окончание

Для материалов с покрытием, используя метод индентирования, можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении параболического штампа вид функции жесткости следующий: $E_W(a) = S(a) = \frac{3P}{4a\delta} \frac{1}{1-\nu^2}$ где a — радиус зоны контакта, δ — перемещение индентора. Для неоднородного материала функция жесткости, или эффективный

модуль, является функцией безразмерного геометрического параметра $a/H = \lambda^{-1}$.

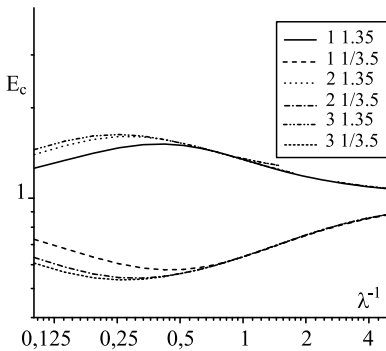


Рис. 7. Функции жесткости

модуль, является функцией безразмерного геометрического параметра $a/H = \lambda^{-1}$. На рис. 7 приведены значения функции жесткости для вышеописанных сочетаний законов изменения упругих параметров. Поведение кривых жесткости на графике подобно поведению трансформант, но изменяется направление выпуклости кривой, и с увеличением параметра закона неоднородности k точка экстремума кривой стремится к началу координат. При значениях больше единицы, то есть при зонах контакта больших толщины функционально-градиентного слоя, кривые практически неразличимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-08-00730-а, 08-01-00003-а, 08-08-90033-Бел-а, 09-08-011410-а).

Библиографический список

1. Айзикович С.М. Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 5. С. 74–80.
2. Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубочик И.С. Асимптотическое решение задачи о внедрении сферического индентора в неоднородное по глубине полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 107–117.