УДК 517.938

ОБОБЩЕННО-ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.М. Алдибеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
E-mail: tamash59@list.ru

Рассматриваются класс системы дифференциальных уравнений, асимптотика решений которых определяются обобщенными показателями и при этом некоторые известные признаки правильности получают обобщение.

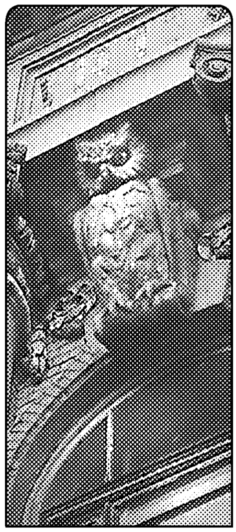
Ключевые слова: показатели Ляпунова, система дифференциальных уравнений, обобщенно-правильные системы, обобщенные показатели.

Generalized Regular Systems of Differential Equations

T.M. Aldibekov

From the set of systems of differential equations we consider the class of systems with solutions asymptotic defined by generalized exponents. The generalization some known signs correct theorems are obtained.

Key words: Lyapunov's exponents, system of differential equations, generalized regular system, generalized exponents.



Одно из основных мест в ляпуновской классификации систем линейных дифференциальных уравнений с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами занимают правильные системы [1–2, с. 77]. Они включают в себя приводимые и почти приводимые системы и играют ведущую роль в теории устойчивости по линейному приближению. Для системы линейных дифференциальных уравнений с неограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами аналогичную роль играют обобщенно-правильные системы.

Пусть $f(t)$ — в общем случае, комплекснозначная функция, определенная в $J = [t_0, +\infty]$, $t_0 \in R$, Q — множество положительных, монотонно возрастающих, непрерывно дифференцируемых функций, определенных в работе [3].

Определение 1 [3]. Число или символы $-\infty, +\infty$, определенные формулой

$$\chi[f, g] = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{q(t)} \ln|f(t)| & \text{при } f(t) \neq 0,\ t \in J, \\ -\infty & \text{при } f(t) = 0,\ t \in J, \end{cases}$$

где $q(t) \in Q$, будем называть *верхним обобщенным характеристическим показателем Ляпунова*, короче *обобщенным показателем $f(t)$ относительно $q(t)$*.

Если $q(t) \in Q$, то получаем обычное определение показателя Ляпунова $f(t)$ в форме Перрона. Мы рассматриваем$q(t) > t$. Отметим, что для любой $f(t) \neq 0$, $t \in J$ всегда найдется функция $q(t) \in Q$ такая, что обобщенный показатель $\chi[f, q]$принимает конечное значение. Аналогично определяются обобщенные показатели от норм непрерывной вектор-функции, непрерывной матрицы, заданных на J.

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

— действительнозначная линейная однородная система дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами J.

Известно [3], что если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию $\|A(t)\| \leq K\psi(t)$, где $K > 0$, $\psi(t)$ — положительная непрерывная в J функция, то система (1) имеет не более $n \in N$ различных конечных обобщенных показателей относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *имеет конечные обобщенные показатели относительно* $q(t) \in Q$. *Тогда имеет место обобщенное неравенство Ляпунова относительно* $q(t)$, *т.е. для любой фундаментальной системы решений* $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ *системы* (1) *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \leq \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q]. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, из условия следует, что вронскиан $W(t) = \det[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$ имеет конечный обобщенный показатель $\chi[W, q]$ и на основании свойства обобщенных показателей для суммы и произведения имеем

$$\chi[W, q] \leq \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q]. \tag{3}$$

С другой стороны, из формулы Остроградского – Лиувилля имеем

$$\chi[W, q] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Следовательно, из (3) и (4) получаем (2). Лемма 1 доказана.

Определение 2. Система (1) называется *обобщенно-правильной по Ляпунову относительно* $q(t) \in Q$, если имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполнено числовое равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если система* (1) *имеет конечные обобщенные показатели относительно* $q(t) \in Q$, *то для обобщенной правильности системы* (1) *относительно* $q(t)$ *необходимо существование точного предела*

$$S(q) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполняется равенство (5). Поэтому из (5) и из обобщенного неравенства (2) имеем

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Следовательно, существует точный предел (6). Теорема 1 доказана.

Пусть

$$\dot{y} = -A(t) \tag{7}$$

— сопряженная система для системы (1).

Теорема 2. *Если система* (1) — *обобщенно-правильная относительно* $q(t) \in Q$, *то сопряженная система (7) имеет фундаментальную систему решений* $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, *для которой имеет место равенство*

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — *некоторая фундаментальная система решений системы* (1).

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ системы (1), для которой в силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Пусть $X(t) = [x_{jk}(t)]$, $j, k = \overline{1, n}$ — фундаментальная матрица, состоящая из решений $x^{(k)} = colon[x_{1k}, \ldots, x_{nk}]$, $k = \overline{1, n}$ системы (1). Положим $Y(t) = [X^{-1}(t)]^{T}$. Тогда $Y(t) = [y_{jk}(t)]$, $j, k = \overline{1, n}$, будет фундаментальной матрицей сопряженной системы (7), где $y_{jk}(t) \dfrac{X_{jk}(t)}{\det X(t)}$, $X_{jk}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента $x_{jk}(t)$ вронскиана $W(t) = \det X(t)$.

Далее,

$$\chi[y_{jk}, q] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{W}, q\right] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{\det X(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right)}, q\right] =$$

$$= \chi\left[\frac{X_{jk}}{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right)}, q\right] \leq \chi[X_{jk}, q] + \chi[X_{jk}, q] + \chi\left[\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right), q\right] \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq k}}^{n} \chi[x^{(i)}, q] + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{q(t)} \left(-\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq k}}^{n} \chi[x^{(i)}, q] + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq k}}^{n} \chi[x^{(j)}, q] + \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = -\chi[x^{(k)}, q].$$

Итак, для любого $j \in (1, \ldots, n)$ имеет место $\chi[y_{j,k}, q] \leq -\chi[x^{(k)}, q]$. Следовательно, $\chi[y^{(k)}, q] \leq -\chi[x^{(k)}, q]$. Таким образом,

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \leq 0. \tag{10}$$

С другой стороны, как известно, скалярное произведение любых двух решений $x^{(i)}, y^{(j)}$, $i, j = \overline{1, n}$, есть число, отличное от нуля, в частности, $(x^{(k)}, y^{(k)}) = c$, $c \neq 0$. Поэтому из неравенства $|x^{(k)}||y^{(k)}| \geq |c|$, переходя к обобщенным показателям, имеем

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \geq 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем (8). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Сопряженная система для обобщенно-правильной относительно* $q(t) \in Q$ *линейной системы есть также обобщенно-правильная линейная система относительно* $q(t)$.

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой в силу теоремы 1 выполняется равенство (9). Следовательно, для фундаментальной системы решений $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ сопряженной системы (7) в силу (8) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)}, q] = -\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} [-SpA(\tau)]d\tau = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau.$$

Таким образом, сопряженная система — обобщенно-правильная относительно $q(t)$. Теорема 3 доказана.

Лемма 2. *Если взаимно-сопряженные системы* (1) *и* (7) *имеют фундаментальные системы* $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ *и* $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$, *для которых при любом* $k\in\{1,\dots,n\}$ *выполняется равенство* (8), *то существует точный предел* (6).

Доказательство. В силу обобщенного неравенства Ляпунова (2) имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)},q], \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q].$$

Складывая почленно эти неравенства, в силу (8) имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau \le 0.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \le \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Поэтому существует точный предел (6). Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Если взаимно-сопряженные системы* (1) *и* (7) *имеют фундаментальные системы* $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ *и* $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$, *для которых выполняется равенство* (8), *то системы* (1) *и* (7) *— обобщенно-правильные относительно* $q(t)\in Q$.

Доказательство. В силу леммы 2 существует точный предел (6). Если допустить, что системы (1) и (7) не являются обобщенно-правильными относительно $q(t)\in Q$, то имеют место строгие неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)},q] > \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau, \qquad \sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q] > \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau.$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая (8), получаем противоречие $0<0$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\sigma(\chi,q)\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}\chi[y^{(i)},q]$ — сумма обобщенных показателей относительно $q(t)\in Q$ фундаментальной системы решений $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ системы (1).

Определение 3. Фундаментальная система решений и соответствующая фундаментальная матрица называются *нормальными относительно* $q(t)\in Q$, если сумма их обобщенных показателей является наименьшей по сравнению с другими фундаментальными системами решений.

Для нормальной фундаментальной системы решений, т.е. для нормального базиса пространства решений системы (1), сумма $\sigma(\chi,q)$ обозначается через $\sigma(q)$. Таким образом, $\sigma(q)=\min\sigma(\chi,q)$. Здесь минимум всегда существует, так как совокупность обобщенных показателей относительно $q(t)$ системы (1) образует конечное множество.

Отметим, что обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений не зависят от выбора нормальной фундаментальной системы решений.

Определение 4. Обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений называются *обобщенными показателями Ляпунова системы* (1) *относительно* $q(t)$ и располагаются в следующем порядке $-\infty<\lambda_n(q)\le\ldots\le\lambda_1(q)<+\infty$, $\lambda_1(q)$ называется *старшим обобщенным показателем* системы (1), $\lambda_n(q)$ — *младшим верхним обобщенным показателем*. Обобщенные показатели сопряженной системы (7) обозначаются через $\mu_i(q)$, $i=\overline{1,n}$, но в силу удобства располагаем их в обратном порядке, т.е. $-\infty<\mu_1(q)\le\ldots\le\mu_n(q)<+\infty$.

Определение 5. *Обобщенным коэффициентом Ляпунова относительно* $q(t)$ называется число

$$\Lambda(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(q) - \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Из теоремы 1 следует, что всегда $\Lambda(q) \geq 0$. Если $\Lambda(q) = 0$, то система (1) является обобщенно-правильной относительно $q(t)$.

Определение 6. *Обобщенным коэффициентом Перрона* называется число

$$\Pi(q) = \max_i \{\lambda_i(q) + \mu_i(q)\}.$$

Теорема 5. (Обобщение теоремы Перрона) *Для того чтобы система* (1) *была обобщенно-правильной относительно* $q(t)$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\Pi(q) = 0$.

Доказательство. Доказательство следует из теорем 2, 4 и определения 6. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Название «обобщенно-правильные системы» использовано в работе [4]. В этой работе асимптотика решений определяется функцией вида $\exp \int_0^t \varrho(\tau)d\tau$ и рассматриваются системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами па полуоси $t \geq 0$ [4, с. 575]. При этом в некотором подклассе линейных систем с ограниченными коэффициентами получены обобщения известных признаков правильности [4, последний абзац с. 590].

Замечание 2. Название «обобщенные показатели Ляпунова» использовано в работах [5, 6]. Как следует из определения, приведенного в работе [5], показатели определяются с помощью эндоморфизма метризованного абстрактного векторного расслоения, который построен в работе [7], т.е. рассматривается классический случай, когда $q(t) = t$. В работе [6] установлены типичные свойства этих показателей в данном определенном классе.

Замечание 3. Если $q(t) = t$, то обобщенные коэффициенты Ляпунова и Перрона превращаются в обычные коэффициенты Ляпунова и Перрона. Небольшая история применения некоторых асимптотических характеристик в решении задачи экспоненциальной устойчивости имеется в обзоре работы [8], см. также [9–12].

Библиографический список

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 2 т. М.; Л., 1956. Т. 2.

2. *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники (мат. анализ): В 12 т. М., 1974. Т. 12. С. 71–146.

3. *Алдибеков Т.М.*Об оценке роста решений системы дифференциальных уравнений // Математический журн. Алматы, 2001. Т. 1, № 2. С. 10–14.

4. *Былов Б.Ф.* Обобщенно-правильные системы // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, № 4. С. 575–591.

5. *Фодор Я.* Типичное свойство обобщенных показателей // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1094.

6. *Фодор Я.* Типичное свойство обобщенных показателей // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2180–2181.

7. *Миллионщиков В.М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. заметки. 1985. Т. 38, вып. 1. С. 92–109.

8. *Изобов Н.А.* Экспоненциальная устойчивость по линейному приближению // Диф. уравнения. 2001. Т. 37, № 8. С. 1011–1027.

9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.

10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

11. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. М., 1970.

12. *Алдибеков Т.М.* Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Диф. уравнения. 2006. Т. 42, № 6.