



## МЕХАНИКА

УДК 629.7; 531.36

### ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А.В. Алексеев, В.С. Асланов

Самарский государственный аэрокосмический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: alexeeff05@mail.ru, aslanov@ssau.ru

На основании подхода Ф.Л. Черноусько получены уравнения в интегро-дифференциальной форме пространственного движения тела с полостью целиком заполненной жидкостью малой вязкости. Для частного случая движения интегро-дифференциальное уравнение сведено к обыкновенному дифференциальному, и с помощью метода усреднения получено приближенное аналитическое решение. Даны примеры, иллюстрирующие точность полученного решения и влияние параметров системы на ее движение.

#### Movement of a Firm Body With a Liquid of Small Viscosity

A.V. Alekseev, V.S. Aslanov

On the basis of the approach F.L. Tchernousko the equations in the integro-differential form of spatial movement of a body with a cavity wholly filled liquid of small viscosity are received. For a special case of movement the integro-differential equation is shown to ordinary differential, and with the help of a method of averaging the approached analytical decision is received. The examples showing accuracy of the received decision and influence of parameters of system on its movement are given.

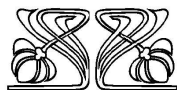
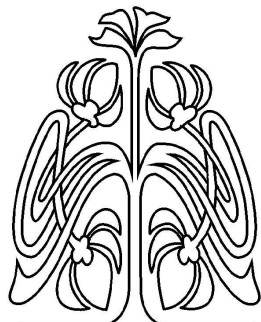
#### ВВЕДЕНИЕ

Задачи о движении твердого тела с полостями, содержащими жидкость, являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей в связи с проблемами динамики летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива. Одним из первых подобными задачами занимался Н.Е. Жуковский [1]. В дальнейшем теория движения систем с жидкими компонентами получила развитие в работах Ф.Л. Черноусько [2], Б.И. Рабиновича [3], Н.Н. Моисеева и В.В. Румянцева [4].

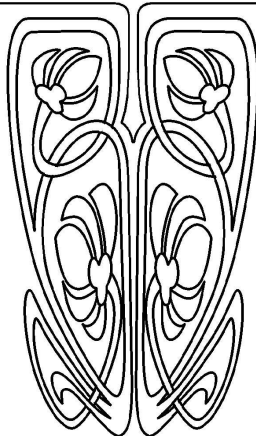
При построении математических моделей движения систем с жидким наполнением учитывают два фактора: мера заполнения полости и вязкость жидкости. При частичном заполнении полости приходится учитывать изменение положения центра масс системы, а также силы поверхностного натяжения жидкости. Уравнения движения системы с большой вязкостью жидкости (кинематическая вязкость  $\nu \gg 1$ ) с точностью порядка  $\nu^{-1}$  могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а при малой вязкости движение системы описывается интегро-дифференциальными уравнениями [2].

Жидкое топливо, используемое, например, для ракетных двигателей, как правило, имеет малую вязкость. При незаполненном баке возмущения, вызванные движением жидкости, более значительны, чем в случае полностью заполненного бака. Во избежание подобных возмущений жидкость внутри баков подавливается мембранами.

Ставится задача получения уравнений пространственного движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью малой вязкости, и нахождения приближенных аналитических решений для плоского случая движения.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки твердого тела с односвязной полостью  $D$ , полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Пусть  $Oy_1y_2y_3$  — неподвижная система координат, а подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  свяжем с твердым телом. Для получения уравнений движения системы воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, выбирая в качестве полюса неподвижную точку  $O$  твердого тела:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (1)$$

Кинетический момент системы относительно неподвижной точки согласно [2] запишется в следующем виде:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^*. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{J}_0$  — тензор инерции твердого тела относительно неподвижной точки;  $\mathbf{J}$  — тензор присоединенных масс;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости твердого тела;  $\mathbf{K}^0$  — кинетический момент, характеризующий непотенциальность движения жидкости;  $\mathbf{K}^*$  — кинетический момент, характеризующий вязкость жидкости.

Кинетический момент, характеризующий непотенциальность движения жидкости внутри полости, определяется формулой

$$\mathbf{K}^0 = \rho \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, d\nu, \quad (3)$$

где  $D$  — объем жидкости,  $\mathbf{r}$  — радиус вектор.

Вектор-функция  $\mathbf{a}$  зависит от формы полости и от начального распределения скоростей частиц жидкости, однозначно находится из условий:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{u}_0, \quad \text{div } \mathbf{a} = 0 \text{ в } D, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S.$$

Кинетический момент, характеризующий неидеальность жидкости, определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}^* = \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left[ 2\mathbf{b}\sqrt{t-t_0} + \mathbf{E} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau) \, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \oint_s (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i) \mathbf{a} \, ds, \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_i$  — орты, задающие систему координат, связанную с телом,  $\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$  — оператор Гамильтона,  $\Phi_i$  — потенциалы Жуковского, зависящие только от формы полости [1].

Компоненты тензора  $\mathbf{E}$  вычисляются по формуле

$$E_{ij} = \oint_s (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j + \nabla\Phi_j) \, ds. \quad (6)$$

В силу симметрии подынтегрального выражения в интеграле (6) тензор  $\mathbf{E}$  также симметричен ( $E_{ij} = E_{ji}$ ). Очевидно, что связанную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  можно выбрать так, что тензор  $\mathbf{E}$  будет диагональным, то есть  $E_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Согласно [2], вектор  $\mathbf{b}$  и тензор  $\mathbf{E}$  инвариантны по отношению к выбору полюса  $O$ , то есть не зависят от положения полости внутри тела. Тензор  $\mathbf{E}$  характеризует диссипацию энергии в вязкой жидкости, заключенной в полости, и зависит только от формы полости.

После подстановки формул (2)–(4) в уравнение (1) с учетом (5) и (6) и вычисления производных по времени получим интегро-дифференциальное векторное уравнение сферического движения тела с жидкостью малой вязкости

$$(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, d\nu + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{t-t_0}} + \mathbf{E} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau) \, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] = \mathbf{M}^e. \quad (7)$$



Интегро-дифференциальное уравнение (7) справедливо с погрешностью порядка  $\nu$  на интервале времени  $(t - t_0) \sim 1$  [2].

Если в начальный момент течение потенциально всюду, кроме области пограничного слоя [2], а функции  $\int_{t_0}^t \frac{\omega_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ограничены величиной порядка угловой скорости  $\omega$  вращения твердого тела при всех  $t \geq t_0$ , что означает отсутствие вращательного движения (то есть движение тела представляет собой колебания около некоторого среднего положения), тогда уравнение движения будет справедливо и при  $t - t_0 \gg 1$ . В этом наиболее важном случае имеем  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{K}^0 = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ , а  $\mathbf{K}^*$  есть величина порядка  $\nu^{1/2}$  по сравнению с  $(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J})\boldsymbol{\omega}$  в (2) при всех  $t \geq t_0$ .

Отметим, что соотношение (7) справедливо не только для твердого тела с полостью, но и для системы тел с несколькими полостями. Для этого необходимо просуммировать кинетические моменты жидкости каждой полости.

## 2. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА С ЖИДКОСТЬЮ. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

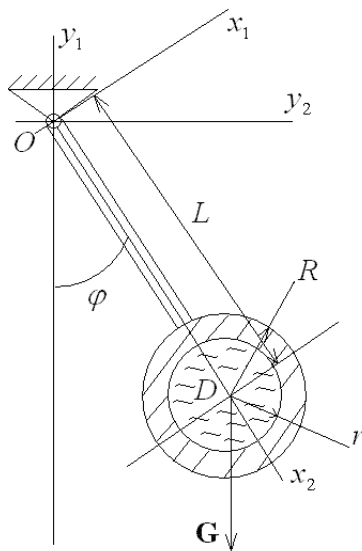


Рис. 1. Схема маятника с жидкостью

Рассмотрим плоское движение маятника, состоящего из твердого шара радиусом  $R$ , подвешенного на невесомом стержне, под действием силы тяжести  $\mathbf{G}$  (рис. 1). Внутри шара расположена сферическая полость, с центром, совпадающим с центром шара, и радиусом  $r \leq R$ . Полость заполнена жидкостью с плотностью  $\rho$  и кинематической вязкостью  $\nu \ll 1$ . Пусть маятник совершает колебательные движения, а течение жидкости в начальный момент потенциально, тогда  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ , а уравнение (7) приобретает вид

$$(J_0 + J)\ddot{\varphi} + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} E \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + GL \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

где  $E = 8\pi r^4/3$  [2].

Пусть амплитуда колебаний маятника будет малой, тогда уравнение (8) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = -\varepsilon \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (9)$$

где  $k^2 = GL/(J_0 + J)$ ,  $\varepsilon = \rho E \sqrt{\nu}/((J_0 + J)\sqrt{\pi})$ . Учитывая, что величина  $\rho E/((J_0 + J)\sqrt{\pi}) \sim 1$ , а вязкость  $\nu \ll 1$ , величину  $\varepsilon \ll 1$  будем считать малой.

Выберем в качестве начальных условий движения:  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , тогда в соответствии с процедурой усреднения [5] в правую часть уравнения (9) подставим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad \dot{\varphi} = -\varphi_0 k \sin kt. \quad (10)$$

Уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = \varepsilon \varphi_0 k F(t), \quad (11)$$

где

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (12)$$

Так как подынтегральная функция в (12) ограничена и интегрируема, то согласно [6] несобственный интеграл вычисляют по формуле

$$\int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \lim_{X \rightarrow t-0} \int_0^X \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{X-\tau}}.$$



Будем аппроксимировать функцию (12) интегралами Френеля [7]

$$F(t) \approx k \left( C(kt) - \frac{1}{2} \right). \quad (13)$$

где  $C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ . Разложим функцию (13) в асимптотический ряд [7]

$$F(t) \approx k \left[ \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left( 1 - \frac{1 \cdot 3}{(2kt)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2kt)^4} - \dots \right) - \frac{\cos kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left( \frac{1}{2kt} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2kt)^3} + \dots \right) \right]$$

и будем учитывать только первое слагаемое

$$F(t) \approx k \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}, \quad (14)$$

тогда уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \varepsilon \varphi_0 k^2 \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}. \quad (15)$$

На рис. 2 показано соответствие функции (12) аппроксимации (14).

Умножим уравнение (15) на  $d\varphi$  и приведем его к виду  $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = \varepsilon A \frac{\sin kt}{\sqrt{t}} \dot{\varphi} dt$ , где  $A = \varphi_0 k^2 / \sqrt{2\pi k}$ . Учитывая (10), заменим в правой части последнего уравнения  $\dot{\varphi}$  и получим

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = -\varepsilon A \varphi_0 k \frac{\sin^2 kt}{\sqrt{t}} dt.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим интеграл энергии

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + k^2 \frac{\varphi^2}{2} = E_0 - \varepsilon A \varphi_0 k \left[ \sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left( 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]. \quad (16)$$

В силу малых возмущений в уравнении (11) будем считать амплитуду  $\varphi_0 = \varphi_{\max}$  в (10) переменной величиной. Воспользуемся заменой переменных (10), в результате получим

$$k^2 \frac{\varphi_{\max}^2}{2} = E_0 - \varepsilon A \varphi_0 k \left[ \sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left( 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right].$$

Возвращаясь к физическим величинам, выразим амплитуду колебаний

$$\varphi_{\max}(t) = \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\rho E \sqrt{\nu}}{(J - 0 + J) \sqrt{\pi}} \left[ \sqrt{\frac{2kt}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]}. \quad (17)$$

На рис. 3 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени, полученные путем численного интегрирования уравнения (8) — пунктирная линия, и использования формулы (17) — сплошная линия.

Из выражения (16) видно, что полная механическая энергия исследуемой системы со временем уменьшается, что свидетельствует о демпфирующих свойствах неидеальной жидкости.

Исследуем влияние параметров системы на

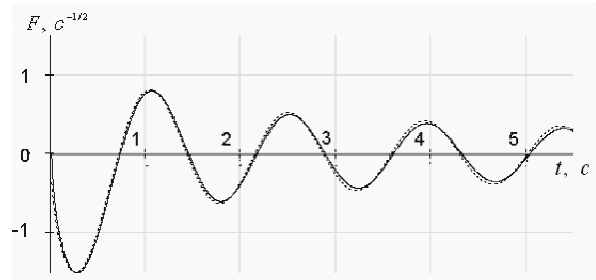


Рис. 2. Зависимость функции  $F(t)$  от времени: сплошная линия — численный расчет по формуле (12), пунктирная — аппроксимация (14)



Рис. 3. Зависимость угла отклонения от времени



ее движение. На рис. 4 и 5 изображены зависимости амплитуды колебаний от времени при различных значениях кинематической вязкости и плотности жидкости. При увеличении этих параметров амплитуда колебаний уменьшается быстрее.

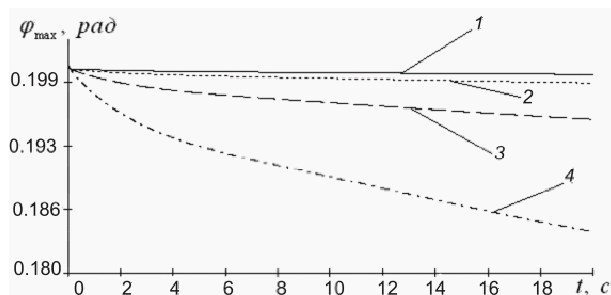


Рис. 4. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени при разных вязкостях: 1 —  $\nu = 1.25 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , 2 —  $\nu = 8 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , 3 —  $\nu = 1 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , 4 —  $\nu = 1 \times 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

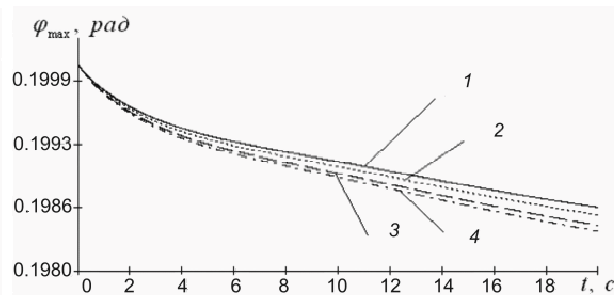


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени при разных плотностях: 1 —  $\rho = 780 \text{ кг}/\text{м}^3$ , 2 —  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , 3 —  $\rho = 1500 \text{ кг}/\text{м}^3$ , 4 —  $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$

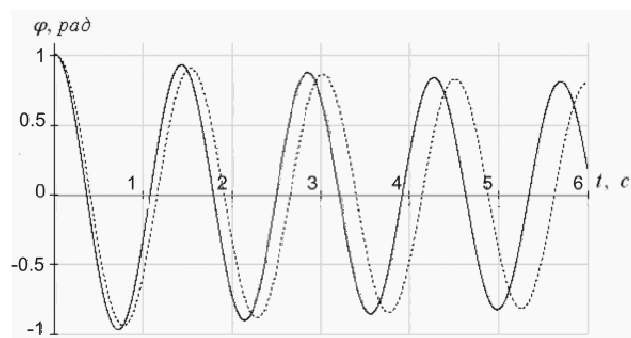


Рис. 6. Зависимость угла отклонения от времени при большом начальном отклонении

На рис. 6 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени при большом начальном отклонении маятника  $\varphi_0 = 1 \text{ рад}$ , полученные путем численного интегрирования уравнения (8) — пунктирная линия, и с помощью приближенного решения (17) — сплошная линия. Наблюдается хорошее соответствие результатов по амплитуде и расхождение по фазе колебаний.

В работе выведены уравнения движения твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью малой вязкости, вокруг неподвижной точки, которые могут быть распространены на случай системы тел с несколькими полостями. Рассмотрен частный случай: плоское

движение маятника со сферической полостью, для которого получено приближенное аналитическое решение уравнения движения. Показано, что неидеальная жидкость внутри твердого тела обладает демпфирующими свойствами. Проведен анализ влияния различных параметров системы на ее движение. Полученные результаты могут быть использованы для исследования движения космических аппаратов с жидким топливом, а также всевозможных механизмов с жидким наполнением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-08-00325, 06-01-00355).

### Библиографический список

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1949.
2. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975.
4. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Мир, 1964.