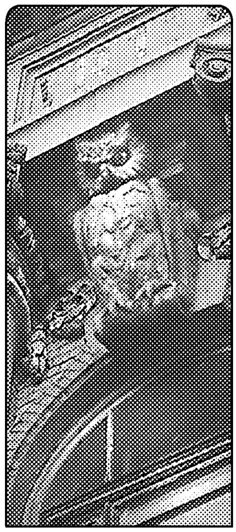
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.27/51/225

α-ДОСТИЖИМЫЕ ОБЛАСТИ, НЕГЛАДКИЙ СЛУЧАЙ

К. Ф. Амозова[1], В. В. Старков[2]

[1]Преподаватель кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет, amokira@rambler.ru

[2]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Петрозаводский государственный университет, VstarV@list.ru

В статье продолжается исследование α-достижимых областей в $\mathbb{R}^n$. Они являются звездообразными и удовлетворяют важному для приложений условию конуса. Для непрерывной в $\mathbb{R}^n$ функции F получены условия α-достижимости области, определяемой неравенством $F(x) < 0$. При этом эти условия (теоремы 1, 2) записаны в виде неравенств на производные по направлениям; необходимое и достаточное условия отличаются только знаком равенства в этих неравенствах. Даже в случае $\alpha = 0$ (случай звездообразности области) мы получили новые результаты.

Ключевые слова: условие конуса, α-достижимые области, звездообразные множества.

ВВЕДЕНИЕ

В теоремах вложения, в теории интегральных представлений функций, в вопросах граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле важно, чтобы область определения функции удовлетворяла *условию конуса* или его обобщению (см., например, [1, гл. 1, § 8; 2–4]).

Обозначим через $K(p, e, \alpha, r)$ замкнутый круговой конус раствором $\alpha\pi$, $\alpha \in (0; 1)$, с вершиной в точке $p \in \mathbb{R}^n$, осью симметрии — вектором e и высотой $r \in (0; \infty]$. Говорят, что область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса (слабому), если для каждой точки $p \in D$ конус $K(p, e(p), \alpha, r) \subset D$ для некоторых фиксированных значений $\alpha \in (0; 1)$ и $r \in (0; \infty]$.

В [5] (см. также [6]) исследуются области с условием конуса при дополнительном предположении, что ось симметрии конуса для каждой точки $p \in D$ — радиальная, т. е. $e(p) = -p$. Для этого в [5] (см. также [6]) вводится понятие α-достижимой области.

Определение [5] (см. также [6]). Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$, называется *α-достижимой* (относительно 0), $\alpha \in [0; 1)$, если для каждой точки $p \in \Sigma = \partial D$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p, \alpha, r) \subset D' = \mathbb{R}^n \backslash D$; здесь и далее $K_+(p, \alpha, r)$ — конус, полученный пересечением замкнутого евклидова шара $\overline{\mathbb{B}}^n(p, r)$ радиуса $r > 0$ и конуса

$$K_+(p, \alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\},$$

где для u, $v \in \mathbb{R}^n$, (u, v) — скалярное произведение.

В [5] (см. также [6]), в частности, доказано, что такие α-достижимые области являются областями с условием конуса (раствора $\eta\pi$, где η — любое фиксированное число из $(0; \alpha)$).

Заметим, что определение α-достижимой области, в отличие от областей с условием конуса, охватывает и случай $\alpha = 0$. В этом случае, как будет показано ниже (см. предложение), такое условие равносильно условию звездообразности области.

Пусть:

a) функция $F(x)$ — определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$;

b) открытое множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\} \ni 0$;

c) в точках множества уровня $S = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ существуют производные по направлениям $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ для любого $l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

А. С. Дудова [7] получила следующее условие звездообразности множества $G = D \cup S$:

Теорема А. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a)–c). Тогда:*

1) из звездообразности множества G относительно нуля следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$ для любого $p \in S$;

2) если для любой точки $p \in S$ выполняется хотя бы одно из условий:

i) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) < 0$;

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$, $\overline{\gamma}_F(p) = \gamma_{1,F}(p)$,

где $\gamma_F(p) = \{l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \dfrac{\partial F}{\partial l}(p) < 0\}$, $\gamma_{1,F}(p) = \{l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \dfrac{\partial F}{\partial l}(p) \le 0\}$, то множество G является звездообразным относительно 0.

Заметим, что в случае выполнения для каждой точки $p \in S$ условия i) достаточно в условиях теоремы А требовать существования на S производных только по направлениям $(-p)$.

В гладком случае критерий звездообразности множества D получен в [8]: $(\operatorname{grad} F(p), p) \ge 0$ для любого $p \in \partial D$. Затем в [5] (см. также [6]) был получен критерий α-достижимости области D в гладком случае: $\left(\dfrac{\operatorname{grad} F(p)}{\|\operatorname{grad} F(p)\|}, \dfrac{p}{\|p\|}\right) \ge \sin \dfrac{\alpha\pi}{2}$ для любого $p \in \partial D$ $(\operatorname{grad} F(p) \ne 0)$.

Целью данной статьи является получение условий α-достижимости, $\alpha \in [0;1)$, области в негладком случае. Иллюстративный пример, приведенный в конце статьи, показывает, что полученные нами условия являются полезными даже в случае $\alpha = 0$, и их с успехом можно применять во многих случаях, когда теорема А не работает. Поскольку при $\alpha \in (0;1)$ α-достижимые области (за исключением $\mathbb{R}^n$) ограничены (см. [5, теорема 3], также [6]), то далее мы рассмотрим только случай ограниченных множеств.

Пусть далее функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), условие же c) мы заменяем более слабым:

c') в точках множества уровня S существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ по всем направлениям l из конуса $(K_+(p,\alpha) - p) \backslash \{0\}$.

Из непрерывности F вытекает, что граница $\partial D = \Sigma \subseteq S$.

Предложение. *Класс 0-достижимых областей в $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом областей, звездообразных относительно 0.*

Доказательство. В [5] (см. также [6]) было показано, что для любого $\alpha \in [0;1)$ α-достижимая область $D \subset \mathbb{R}^n$ является звездообразной. Обратно, пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$ — звездообразная относительно 0 область, т. е. для любой точки $x \in D$ отрезок $\{tx : 0 \le t \le 1\} \subset D$. Предположим, что D — не является 0-достижимой. Тогда найдется такая точка $p \in \Sigma \subseteq S$, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $y \in K_+(p,0,\varepsilon) \cap D$ (в этом случае $K_+(p,0,\varepsilon)$ представляет собой отрезок луча). Из условия звездообразности области D отрезок $[0;y] \in D$ и, следовательно, $p \in D$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), c'). Если для некоторого $\alpha \in [0;1)$ D — α-достижимая область, то*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) \ge 0$$

для любого направления $l \in (K_+(p,\alpha) - p) \backslash \{0\}$ и для любой точки $p \in S$.

Доказательство. Пусть $p \in S$. Соединим эту точку p с точкой $0 \in D$. Тогда на отрезке [0; p] найдется точка $p_0 \in \Sigma$. Так как D — α-достижимая область и точки $(p+\rho l)$, $\rho > 0$, лежат в конусе $K_+(p,\alpha) \subseteq K_+(p_0,\alpha)$. В [5, теорема 2] (см. также [6]) доказано, что для любой граничной точки p_0 α-достижимой области D пересечение $K_+(p_0,\alpha) \cap D = \varnothing$. Поэтому $F(p+\rho l) \geq 0$. Но $F(p) = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{F(p+\rho l) - F(p)}{\rho} \geq 0,$$

что доказывает теорему 1.

Доказанная теорема представляет собой необходимое условие α-достижимости области D, определяемой условиями a), b), c′). Последующие две теоремы утверждают, что при некоторых дополнительных ограничениях на F это необходимое условие становится достаточным.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), c′) и при этом D — ограниченное множество. Если для некоторого $\alpha \in [0;1)$ производные по направлениям $\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0$ для любого $l \in (K_+(p,\alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in \Sigma$, то D — α-достижимая область.*

Доказательство. Сначала докажем теорему 2 для $\alpha = 0$. Для этого достаточно доказать (см. предложение) звездообразность области D. Если это не так, то существует точка $p \in D$ такая, что на отрезке $[0,p]$ есть граничная точка $p_0 \in \Sigma$, $p_0 = tp$, $t < 1$. Обозначим $t_0 = \sup\limits_{t \in (0,1)} \{t : tp \in \Sigma\}$, $p^0 = t_0 p$. Тогда $p^0 \in \Sigma$ и

$$\frac{\partial F}{\partial (p^0)}(p^0) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{F(p^0 + \delta p^0) - F(p^0)}{\delta} \leq 0,$$

так как $F(p^0) = 0$ и $F(p^0(1+\delta)) < 0$ по определению точки p^0 при достаточно малом δ. Получили противоречие с условием теоремы 2, так как $K_+(p^0, 0) - p^0 = \{tp^0 : t \geq 0\}$. Следовательно, D — звездообразна.

Пусть, далее, $\alpha \in (0;1)$.

Для начала рассмотрим плоский случай $n = 2$. Докажем, что D — α-достижима. Предположим, что это не так. Тогда найдется такая точка $p \in \Sigma$, что $K_+(p,\alpha,\varepsilon) \cap D \neq \varnothing$ для произвольного $\varepsilon > 0$. А значит, найдется последовательность различных точек $y_n \in D$ таких, что $y_n \in K_+(p,\alpha)$ и $y_n \to p$ при $n \to \infty$. Заметим, что эти точки y_n не будут лежать на луче $\{pt : t \geq 1\}$, иначе это противоречило бы условию звездообразности области D. Соединим каждую из этих точек отрезком с точкой 0. Выберем ту из двух сторон угла $K_+(p,\alpha)$, на которой окажется бесконечное множество точек пересечения z_n этой стороны с отрезками $[0, y_n]$. Тогда $z_n \to p$ и $z_n \in D$, так как D — звездообразная область и $y_n \in D$.

Обозначим $l_0 = \dfrac{z_n - p}{\|z_n - p\|}$ — единичный вектор (он не зависит от n), $\rho_n = \|z_n - p\|$. Тогда $z_n = p + \rho_n l_0$ и $F(z_n) < 0$, так как $z_n \in D$. Следовательно,

$$\frac{F(z_n) - F(p)}{\rho_n} = \frac{F(p+\rho_n l_0) - F(p)}{\rho_n} < 0$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial l_0}(p) = \lim_{\rho_n \to 0+} \frac{F(p+\rho_n l_0) - F(p)}{\rho_n} \leq 0,$$

а это противоречит условию $\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0$ для любого направления $l \in (K_+(p,\alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in \Sigma$. Следовательно, D — α-достижимая область.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $n \geq 3$. Также предположим противное, что область D не является α-достижимой. Пусть найдется точка $p \in \Sigma$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $y \in K_+(p,\alpha,\varepsilon) \cap D$. Через точку y, 0 и точку p проведем плоскость γ. При этом для этих точек из $\mathbb{R}^n$ сохраним тоже обозначение в γ. В сечении области D плоскостью γ получим область Ω (это следует из звездообразности области D), а в сечении конуса $K_+(p,\alpha)$ плоскостью γ — плоский угол раствора $\alpha\pi$, который обозначим $W_+(p,\alpha)$. При этом $y \in W_+(p,\alpha) \cap \Omega$. Если (ξ,η) — декартовы координаты точки на плоскости γ, то каждую точку $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \cap \gamma$ можно записать в виде $(x_1(\xi,\eta),\dots,x_n(\xi,\eta))$, где $x_k(\xi,\eta)$ — линейная функция своих аргументов для каждого $k = \overline{1,n}$. Поэтому область Ω задается условием $f(\xi,\eta) = F(x_1(\xi,\eta),\dots,x_n(\xi,\eta)) < 0$, $(\xi,\eta) \in \gamma$, где $f(\xi,\eta)$ —

непрерывна в γ, существует $\dfrac{\partial f}{\partial l}(\xi,\eta)$ в $(\gamma \cap S)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial l}(p) = \dfrac{\partial F}{\partial l}(p) = \lim_{\rho\to 0+} \dfrac{F(p+\rho l) - F(p)}{\rho} > 0$ для любого $l \in ((K_+(p,\alpha) - p)\cap\gamma)\setminus\{0\} = (W_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$. Из проведенных рассуждений следует, что тоже неравенство $\dfrac{\partial f}{\partial l}(p) > 0$ справедливо не только для рассматриваемой точки $p \in \partial\Omega$, но и для любой граничной точки $p \in \partial\Omega$. Откуда будет следовать α-достижимость области Ω в силу выше рассмотренного плоского случая $n = 2$. А тогда, как доказано в [5, теорема 2] (см. также [6]), для любой точки $p \in \partial\Omega$ конус $W_+(p,\alpha)$ лежит вне области Ω. Следовательно, $W_+(p,\alpha)\cap\Omega = \varnothing$, что противоречит предполагавшемуся существованию точки $y \in W_+(p,\alpha)\cap\Omega$. Теорема 2 доказана.

Мы не знаем, можно ли в формулировке теоремы 2 заменить строгое неравенство на неравенство $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$. Ниже мы представим доказательство теоремы о возможности такой замены, изменив условие $p \in \Sigma$ на условие $p \in D^\delta = \{x \in D : \rho(x,S) < \delta\}$ для фиксированного $\delta > 0$, где $\rho(x,S)$ — расстояние от x до S.

Теорема 3. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторых $\alpha \in [0;1)$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial l}(x) \geq 0$ для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, то D — α-достижимая область.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2$. Обозначим $F_t(x) = F(x) + t\,\varphi(x)$, $t > 0$ и $D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) < 0\}$. Тогда $D_t \subset D$ для любого $t > 0$. Заметим также, что $0 \in D_t$, поскольку $F_t(0) = F(0) < 0$, так как $0 \in D$.

Покажем далее, что существует $T > 0$ такое, что для всех $0 < t < T$ множества уровня $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) = 0\}$ будут лежать в D^δ.

Во-первых, $S_t \subset D$ для всех $t > 0$, так как если $x \in S_t$, то $x \neq 0$ и $F(x) = -t\,\varphi(x) < 0$.

Во-вторых, если $0 < t_1 < t_2$, то $D_{t_2} \subset D_{t_1}$. Действительно, если $x \in D_{t_2}$, то $F(x) + t_2\,\varphi(x) < 0$, следовательно, $F(x) + t_1\,\varphi(x) \leq F(x) + t_2\,\varphi(x) < 0$, поэтому $x \in D_{t_1}$.

Предположим, что не найдется такого $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для каждого $t \in (0,T)$. Тогда существует такая последовательность $y_n \in S_{t_n}$, что расстояние $\rho(y_n,S) > \delta$ при $t_n \to 0$. Поскольку S — замкнутое множество, то существует последовательность $x_n \in S$ такая, что $\|y_n - x_n\| = \rho(y_n,S) > \delta$.

Из ограниченности множества D следует, что из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее также) такую, что $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^n$. Переходя к пределу в равенстве $F(y_n) = -\dfrac{t_n}{2}\|y_n\|^2$ при $t_n \to 0$, получаем $F(y_0) = 0$, т. е. $y_0 \in S$. Но $\rho(y_n,S) > \delta$. Следовательно, $\rho(y_0,S) \geq \delta$. Противоречие. Следовательно, существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для любых $t \in (0,T)$.

По условию теоремы $\dfrac{\partial F}{\partial l}(x) \geq 0$ для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$ и $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$. Далее, не умаляя общности, можно считать, что $\|l\| = 1$. При таких l и x

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(x) = (grad\,\varphi, l) = (x,l) \geq \|x\|\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 0.$$

Поэтому для всех $x \in S_t$ существуют $\dfrac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \dfrac{\partial F}{\partial l}(x) + t(x,l) > 0$ для любых $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$. Тогда по теореме 2 область D_t — α-достижима для любого $t \in (0,T)$.

Покажем теперь, что для любого $x_0 \in D$ найдется такая область D_t, где $0 < t < T$, что $x_0 \in D_t$.

Пусть $x_0 \in D$, $x_0 \neq 0$ и $F(x_0) = -C < 0$. Тогда $x_0 \in D_t$ для всех $t : 0 < t < \dfrac{2C}{\|x_0\|^2} = t_0$, так как

$$F_t(x_0) = F(x_0) + t\,\frac{\|x_0\|^2}{2} = -C + t\,\frac{\|x_0\|^2}{2} < 0.$$

Таким образом, $D = \bigcup\limits_{0<t<T} D_t$, где каждая область D_t — α-достижима. В [5] доказано, что объединение α-достижимых областей есть α-достижимая область, что и доказывает теорему 3.

Из доказательства теоремы 3 видна возможность ее усиления. Действительно, для $x \in S_t$ (обозначения из доказательства теоремы 3) $t = \dfrac{-F(x)}{\varphi(x)}$. Поэтому

$$\frac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) + t(x,l) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) - \frac{F(x)}{\varphi(x)}(x,l) \geq \frac{\partial F}{\partial l}(x) - \frac{2F(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 0$$

для любых $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$, если $\dfrac{\partial F}{\partial l}(x) > \dfrac{2F(x)}{\|x\|}\cdot\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$, $x \in S_t$. Отсюда получаем

Следствие 1. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторых $\alpha \in [0;1)$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial l}(x) > \dfrac{2F(x)}{\|x\|}\cdot\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$ для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, то D — α-достижимая область.*

Из этого следствия, в частности, получим условие звездообразности области (случай $\alpha = 0$).

Следствие 2. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x) > \dfrac{2F(x)}{\|x\|}$ для любых $x \in D^\delta$, то D — звездообразная область.*

Заметим, что выражения в правой части неравенств из следствия 1 и следствия 2 отрицательны. Это может существенно упрощать проверку выполнения условия α-достижимости или звездообразности. Следующий пример показывает, как следствие 2 позволяет сделать вывод о звездообразности области, тогда как условия теоремы A не применимы.

Пример. Пусть множество $D \in \mathbb{R}^2$ задано условием

$$F(X) = (\|X\|^2 - 1)\|X - e\|^2 < 0, e = (1;0) \iff X \in \mathbb{B}^2(0,1).$$

Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \partial\mathbb{B}^2(0,1)$.

Обозначим $X = (x;y)$, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = 2x((x-1)^2 + y^2) + 2(x-1)(x^2+y^2-1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(X) = 2y((x-1)^2 + y^2) + 2y(x^2+y^2-1).$$

Так как функция $F(X)$ дифференцируема на $\mathbb{R}^2$, то для $\|l\| = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial l}(X) = (\operatorname{grad} F(X), l).$$

А значит, $\dfrac{\partial F}{\partial l}(1;0) = (\operatorname{grad} F(1;0), l) = 0$ для любого $l \in \mathbb{R}^2$. Тогда в теореме A

$$\varnothing = \overline{\gamma}_F(1;0) \neq \gamma_{1,F}(1;0) = \mathbb{R}^2,$$

т. е. условия теоремы A не выполнены.

Покажем, что для области D выполняются условия следствия 2. Это условие $\dfrac{\partial F}{\partial X}(X) > \dfrac{2F(X)}{\|X\|}$ в гладком случае перепишется как $(\operatorname{grad} F(X), X) > 2F(X)$, т. е.

$$\begin{gathered}[(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2) + (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-x)] > ((x-1)^2+y^2)(x^2+y^2-1) \iff \\ \iff (x-1)^2 + y^2 + (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-x) > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Рассмотрим приграничный слой:

$$D^\delta = \left\{X = (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (1-\delta) < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\},$$

где $0 < \delta < 1$. Тогда для любого $X = (x;y) \in D^\delta$ с постоянной нормой $\|X\| = \sqrt{R} > 1 - \delta > 0$. Поэтому условие (1) примет вид

$$R - 2x + 1 + (R-1)(R-x) > 0 \iff \frac{R^2+1}{1+R} > x.$$

А так как $X \in \partial\mathbb{B}^2(0, \sqrt{R})$, т. е. $x \in [-\sqrt{R}; \sqrt{R}]$, то достаточно показать, что

$$\frac{R^2+1}{1+R} > \sqrt{R} \quad \Longleftrightarrow \quad R^4 + 1 > R + R^3. \tag{2}$$

Обозначим $t = 1 - R > 0$. Тогда неравенство (2) равносильно $(1-t)^4 + 1 > 1 - t + (1-t)^3$, что равносильно верному неравенству $t^2 - 3t + 3 > 0$. Таким образом, условия следствия 2 выполнены.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и поддержке РФФИ (*проект* 11-01-00952а).

Библиографический список

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480 с.
2. *Долженко Е. П.* Граничные свойства произвольных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31. С. 3–14. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.
3. *Adams R. A., Fournier J.* Cone conditions and properties of Sobolev spaces // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1
4. *Zaremba S.* Sur le principe de Direchlet // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.
5. *Liczberski P., Starkov V. V.* Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. (to appear).
6. *Liczberski P., Starkov V. V.* Planar α-angularly starlike domains, α–angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case // 60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel. Innovatio Press Sciebtific publishing house. University of Economics and Innovation in Lublin, 2012. P. 117–124.
7. *Дудова А. С.* Условия звездности лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 30–33.
8. *Старков В. В.* Условия звездообразности областей в $\mathbb{R}^n$ // Труды ПетрГУ. Сер. мат. 2011. Вып. 18. С. 70–82.

α-accessible Domains, a Nonsmooth Case

K. F. Amozova, V. V. Starkov

Petrozavodsk State University, Russia, 185910, Petrozavodsk, Lenin st., 33, amokira@rambler.ru, VstarV@list.ru

This paper continues the study of α-accessible domains in $\mathbb{R}^n$. They are starlike domains and satisfy cone condition which is important for applications. Conditions of α-accessibility of domain, defined by the inequality $F(x) < 0$, is obtained for a continuous function F in $\mathbb{R}^n$. Thus these conditions are written in the form of inequalities for the directional derivatives; necessary and sufficient conditions differ only in the sign of equality in these inequalities. We obtain new results even in the case where $\alpha = 0$ (the case of starlike domains).

Key words: cone condition, α-accessible domains, starlike sets.

References

1. Besov O. V., Ilin V. P., Nikolskij S. M. *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems.* New York; Toronto; Ontario; London, John Wiley & Sons, 1978, 1979, vol. 1, 2. (Russ. ed.: Besov O. V., Ilin V. P., Nikolskij S. M. *Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija.* Moscow, Nauka, 1975. 480 p.)
2. Dolženko E. P. Boundary properties of arbitrary functions. *Math. USSR Izv.*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 1–12. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.
3. Adams R. A., Fournier J. Cone conditions and properties of Sobolev spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, vol. 61. pp. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.
4. Zaremba S. Sur le principe de Direchlet. *Acta Math.*, 1911, vol. 34, pp. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.
5. Liczberski P., Starkov V. V. Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary. *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).
6. Liczberski P., Starkov V. V. Planar α-angularly starlike domains, α-angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case. *60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel.* Innovatio Press Sciebtific publishing house. University of Economics and Innovation in Lublin, 2012, pp. 117–124.
7. Dudova A. S. Uslovija zvezdnosti lebegova mnozhestva differenciruemoj po napravlenijam fynkcii [Starlikeness conditions of Lebesgue set of directionally differentiable function]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, 2003, iss. 5, pp. 30–31 (in Russian).
8. Starkov V. V. Starlikeness criteria for domains of $\mathbb{R}^n$. *Trudy PGU, Ser. Math.*, 2011, vol. 18, pp. 70–82 (in Russian).