# МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.7

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

**А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева**

Самарский государственный технический университет
E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В работе исследуется корректная, по Адамару, постановка характеристической задачи для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками.

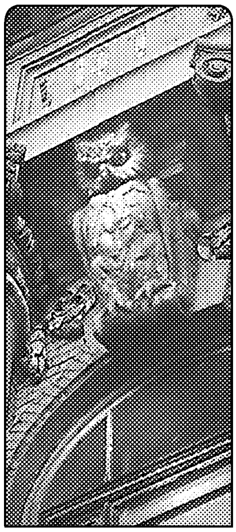
**Ключевые слова:** гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, характеристическая задача, корректность по Адамару.

**The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differential Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics**

**A. A. Andreev, J. O. Yakovleva**

In the paper we consider the well-posed characteristics problem for the one hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics.

**Key words:** hyperbolic differential equation of the third order, nonmultiple characteristics, characteristic problem, Hadamard's well-posedness.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Известно [1], что классическая задача Гурса для уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными с граничными условиями на двух характеристиках из различных семейств всегда является корректной по Адамару.

Исследованию начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными порядка выше второго в случае кратных характеристик посвящены работы многих авторов. Например, в монографии А. В. Бицадзе [2] приведена характеристическая задача для систем второго порядка с кратными характеристиками. В статье С. С. Харибегашвили [3] рассмотрена характеристическая задача для вырождающихся гиперболических систем второго порядка. М. Х. Шхануковым [4] исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. В статье А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова [5] приведены краевые задачи с общим нелокальным условием для псевдопараболического уравнения высокого порядка. В [6] В. И. Жегаловым, Е. А. Уткиной также изучена характеристическая задача для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка. О. М. Джохадзе [7] рассмотрена общая характеристическая задача типа Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, а также сформулирована и исследована общая трехмерная характеристическая задача Гурса для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с доминированными младшими членами [8]. О. С. Зикировым [9] исследована характеристическая задача Гурса для линейного гиперболического уравнения третьего порядка в прямоугольной области.

Характеристические задачи для систем и уравнений гиперболического типа в частных производных с некратными характеристиками изучены явно недостаточно. В монографии [2] приводятся примеры, показывающие, что для системы второго порядка с некратными характеристиками задача Гурса является некорректной по Адамару [10].

Целью нашей статьи является исследование корректности, по Адамару, характеристических задач для гиперболического уравнения от двух независимых переменных третьего порядка с некратными характеристиками.

В плоскости независимых переменных $x$, $y$ рассмотрим строго гиперболическое уравнение третьего порядка:

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

**Лемма.** *Общее решение уравнения* (1) *из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций $C^3(\mathbb{R})$ представляется в виде суммы*

$$u(x,y) = f(x - C_1) + g(y - C_2) + h(x + y - C_3) \tag{2}$$

*любых трех функций $f, g$ и $h$ из класса $C^3(\mathbb{R})$ от аргументов $x - C_1$, $y - C_2$, $x + y - C_3$ соответственно, где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные константы из $\mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Как известно, семейство линий $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ является характеристиками уравнения (1), если функция $\varphi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно дифференциальному уравнению:

$$(dy)^2dx + dy(dx)^2 = 0.$$

Его решениями являются семейства линий, определяемые формулами

$$x = C_1, \qquad y = C_2, \qquad x + y = C_3.$$

Уравнение (1) допускает следующую факторизацию:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(v(x,y)\right) = 0,$$

где $v(x,y) = u_x - u_y$.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка $u_x - u_y = F(x) + G(y)$ имеет вид

$$u(x,y) = h(x+y) + \int\limits_0^x F(t)dt + \int\limits_0^y G(s)\,ds.$$

Таким образом, получаем общее решение $u(x,y)$ в виде (2). Лемма доказана.

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + h(x+y). \tag{4}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса на плоскости, независимых переменных $x, y$ для уравнений гиперболического типа третьего порядка.

**Пример.** Однородное уравнение (1), удовлетворяющее однородным условиям на характеристиках

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad u(x,-x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение:

$$u(x,y) = h(x+y) - h(x) - h(y), \qquad h(0) = 0, \tag{6}$$

где $h(t) \in C^3(\mathbb{R})$ — любая нечетная функция.

Таким образом, нетривиальное решение (6) уравнения (1) удовлетворяет однородным граничным условиям (5) на трех характеристиках из различных семейств. В приведенной постановке характеристическая задача является некорректной по Адамару.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НА ПЛОСКОСТИ

Возникает вопрос: какая характеристическая задача будет являться корректной? Для уравнения (1) рассмотрим общую характеристическую задачу $G1$.

Пусть $x \in I_c$, где $I_c$ имеет центральную симметрию, т. е. для любого $x \in I_c$ $2c - x \in I_c$, тогда для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f^c_{\textit{н}} = \frac{f(x) - f(2c-x)}{2}, \qquad f^c_{\textit{ч}} = \frac{f(x) + f(2c-x)}{2}, \qquad f(x) = f^c_{\textit{н}} + f^c_{\textit{ч}}. \tag{7}$$

При $c = 0$ будем обозначать $f_{\textit{н}}$, $f_{\textit{ч}}$ соответственно.

**Задача G1.** *Найти решение* $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,y) = \beta(y), \quad y \in \mathbb{R}, \qquad u(x,-x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

*где* $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

**Теорема 1.** *Если* $\gamma_{\textit{н}} = \alpha_{\textit{н}} - \beta_{\textit{н}}$, *где* $\alpha_{\textit{н}}$, $\beta_{\textit{н}}$, $\gamma_{\textit{н}}$ *— нечетные части функций* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ *соответственно, то задача* $G1$ *корректна по Адамару.*

Определим функции $f, g$ и $h$ таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (8), учитывая при этом условия согласования $f(0) + g(0) = \alpha(0) - h(0)$, получим:

$$\begin{gathered} f(x) = \alpha(x) - h(x) - g(0), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ g(y) = \beta(y) - h(y) - f(o), \qquad y \in \mathbb{R}, \\ h(x) + h(-x) = \alpha(x) + \beta(-x) - \gamma(x) - \alpha(0) + 2h(0), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда

$$h(-x) + h(x) = \alpha(-x) + \beta(x) - \gamma(-x) - \alpha(0) + 2h(0), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$\gamma_{\textit{н}} = \alpha_{\textit{н}} - \beta_{\textit{н}}, \tag{11}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_{\textit{ч}}(x) + \beta\textit{ч}(x) - \gamma\textit{ч}(x) - \alpha(0) + 2h(0)\right]. \tag{12}$$

Подставляя (9), (11) и (12) в (4), получим:

$$\begin{gathered} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha_{\textit{ч}}(x+y) - \alpha_{\textit{ч}}(x) - \alpha_{\textit{ч}}(y)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\beta_{\textit{ч}}(x+y) - \beta_{\textit{ч}}(x) - \beta_{\textit{ч}}(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma_{\textit{ч}}(x+y) - \gamma_{\textit{ч}}(x) - \gamma_{\textit{ч}}(y)\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Формула (13) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся решением характеристической задачи $G1$.

## 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассмотрим общую характеристическую задачу $G2$ для уравнения (1) в области, ограниченной характеристиками.

**Задача G2.** *Найти решение* $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,\,0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad u(0,\,y) = \beta(y), \quad 0 \le y \le 1, \qquad u(x,\,1-x) = \gamma(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

*где* $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

**Теорема 2.** *Если* $\gamma^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}} = \alpha^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}} - \beta^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}}$, *где* $\alpha^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}}$, $\beta^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}}$, $\gamma^{\frac{1}{2}}_{\textit{н}}$ *— нечетные части функций* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, *то задача* $G2$ *корректна по Адамару.*

Аналогично задаче $G1$ получим:

$$\begin{gathered} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x+y) - \alpha^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x) - \alpha^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(y)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\beta^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x+y) - \beta^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x) - \beta^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x+y) - \gamma^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(x) - \gamma^{\frac{1}{2}}_{\textit{ч}}(y)\right]. \end{gathered} \tag{14}$$

Формула (14) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся решением характеристической задачи $G2$.

Нетрудно убедиться, что и в задаче $G1$ и в задаче $G2$ выбор характеристики, на которой задается видоизмененное условие, несущественен.

Отметим, что применение функциональных уравнений (7) с инволютивным сдвигом было предметом рассмотрения А. П. Хромова [11] и А. А. Андреева [12].

## Библиографический список

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 831 с. [*Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. II : Partial differential equations. New York; London : Interscience Publishers, 1962. 830 p.]

2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differentional equations. Moscow : Nauka, 1981. 448 p.]

3. *Харибегашвили С. С.* О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 154–162. [*Kharibegashvili S. S.* Solvability of a characteristic problem for second-order degenerate hyperbolic systems // Differ. Equ. 1989. Vol. 25, № 1. P. 123–131.]

4. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 145–152. [*Soldatov A. P., Shkhanikov M. Kh.* About some boundary value problems for third order equations // Differ. Equ. 1983. Vol. 19, № 1. P. 145–152.]

5. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552. [*Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh.* Boundary value problems with A. A. Samarski's general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations // Soviet Math. Dokl. 1988. Vol. 36, № 3. P. 507–511.]

6. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10 (449). С. 73–76. [*Zhegalov V. I., Utkina E. A.* Pseudoparabolic equation of the third order // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1999. Vol. 43, № 10. P. 70–73.]

7. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528. [*Dzhokhadze O. M.* Influence of lower terms on the well-posedness of characteristics problems for third-order hyperbolic equations // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 4. P. 491–501.]

8. *Джохадзе О. М.* О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения вольтерры первого рода // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 385–394. [*Dzhokhadze O. M.* About the three-dimensional Goursat problem for third order differentional equations and related general-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Differ. Equ. 2006. Vol. 42, № 2. P. 385–394.]

9. *Зикиров О. С.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // Современная математика и ее приложения. 2011. Т. 68. С. 101–120. [*Zikirov O. S.* Local and nonlocal boundary-value problems for third-order hyperbolic equations // J. Math. Sci. Vol. 175, № 1. P. 104—123.]

10. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М. : Физматлит, 1994. 544 с. [*Adamar J.* Problem Cauchy for linear hyperbolic partial differential equations. Moscow : Phismathlit, 1994. 544 p.]

11. *Хромов А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22. [*Khromov A. P.* The mixed problem for the differential equation with involution and potential of the special kind // Izv. Saratov. Univer. New Series. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2010. Vol. 10, iss. 4. P. 17–22.]

12. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. 2-го Междунар. семинара. Самара : Изд-во Самар. ун-та, 1998. С. 5–18. [*Andreev A. A.* On the correctness of boundary value problems for some partial differential equations with a Carleman shift // Differential Equations and Their Applications : Proc. of the Second Intern. Seminar. Samara, 1998. P. 5–18.]