



УДК 629.78

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

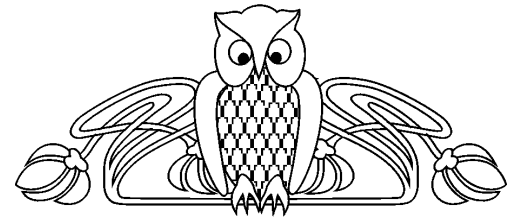
Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², М. С. Комарова¹

¹ Саратовский государственный университет
E-mail: AndreichenkoDK@info.sgu.ru, welecat@gmail.com

² Саратовский государственный технический университет
E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

Предложено новое доказательство некоторых теорем об устойчивости комбинированных динамических систем и развит метод их параметрического синтеза на примере задачи о программном развороте космического аппарата наблюдения.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, параметрический синтез, системы стабилизации.



The Choice of Optimal Parameters for Combined Dynamical Systems

D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, M. S. Komarova

The new proof of some theorems of a stability for combined dynamical systems is offered, and the method of their parametrical synthesis on example of a program turn for the space vehicle of observation is developed.

Key words: combined dynamical systems, parametrical synthesis, stabilization systems.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуются управляемые комбинированные динамические системы (КДС), представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, динамически связанных через граничные условия и условия связи, при соответствующих начальных условиях (структурная схема приведена на рис. 1, а).

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N_x}(t))^T$ — кусочно-непрерывная входная вектор-функция; $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N_y}(t))^T$ — непрерывная выходная вектор-функция. Ряд теорем об устойчивости КДС ранее сформулирован и доказан в [1]. В статье [2] был предложен аналог метода D -разбиений для построения границ областей устойчивости управляемых КДС в пространстве параметров обратных связей, а в работе [3] — алгоритм параметрического синтеза, т. е. выбора значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. Некоторые ограничения сугубо формального характера в применении эффективных с вычислительной точки зрения алгоритмов метода D -разбиений и параметрического синтеза были связаны с тем, что приведенное ранее в [1] доказательство теоремы об устойчивых, но не асимптотически, КДС требовало дополнительных ограничений на свойства выходных вектор-функций. Целью данной работы является устранение подобных ограничений и дальнейшее развитие алгоритмов параметрического синтеза управляемых КДС. В качестве приложения приведено решение задачи о программном развороте космического аппарата наблюдения.

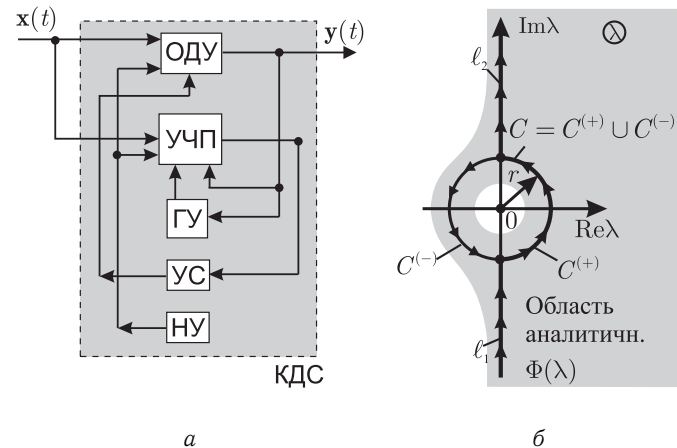


Рис. 1. а — структурная схема КДС; б — иллюстрация к доказательству теоремы

1. УСТОЙЧИВОСТЬ КДС

После линеаризации и выполнения одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ динамическая модель КДС сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda)$, причем

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = [\Phi_{kj}(\lambda)] = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)], \quad (1)$$

$$D(\lambda) = D(\bar{\lambda}), \quad Q_{kj}(\bar{\lambda}) = Q_{kj}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x.$$



Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение. Учет малой, но конечной диссипации энергии в математических моделях объектов с распределенными по пространству параметрами приводит к тому, что и характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$, и возмущающие квазимногочлены $Q(\lambda)$ (индексы k, j далее опущены) аналитичны при $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$. Под обобщенными степенями квазимногочленов $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ будем понимать такие $n, m \in \mathbb{R}$, что при $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda) = c_a, \quad 0 < |c_a| < \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-m} Q(\lambda) = c_b, \quad 0 < |c_b| < \infty. \quad (2)$$

Поскольку уравнения движения элементов КДС с сосредоточенными по пространству параметрами содержат обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка по времени t

$$n > m + 1. \quad (3)$$

В работе [1] КДС, удовлетворяющие условиям (1)–(3), названы физически возможными. Там же были сформулированы и доказаны теоремы об устойчивом квазимногочлене, об асимптотически устойчивых и неустойчивых КДС. С вычислительной точки зрения исследование устойчивости сводилось к проверке выполнения условия

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = n\pi/2. \quad (4)$$

Приведенная далее теорема, а также аналогичная ей теорема об устойчивых, но не асимптотических КДС (в смысле [1]), ранее были доказаны при значительных ограничениях. Ниже приводится доказательство, свободное от ограничений на поведение выходных функций КДС.

Теорема. Пусть $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ — передаточная функция физически возможной КДС, квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны при $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$, все корни $D(\lambda)$, за исключением изолированного корня $\lambda = 0$, расположены в комплексной плоскости (λ) слева от мнимой оси, и $Q(0) \neq 0$. Тогда: 1) если корень $\lambda = 0$ имеет кратность $k = 1$, то КДС устойчива, но не асимптотически; 2) если корень $\lambda = 0$ имеет кратность k выше 1, то КДС неустойчива.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что функция $\Phi(\lambda)$ имеет простой или кратный изолированный полюс $\lambda = 0$, и можно провести окружность C с центром в точке $\lambda = 0$ (рис. 1, б) некоторого малого, но конечного радиуса r , целиком лежащую в области аналитичности функции $\Phi(\lambda)$. Пусть $C = C^{(+)} \cup C^{(-)}$, где $C^{(+)}$ и $C^{(-)}$ — полуокружности, лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно. Путь интегрирования в интеграле Меллина для импульсной переходной функции $q(t)$ проходит правее всех особенностей функции $\Phi(\lambda)$, и в качестве такового можно взять $\ell_1 \cup C^{(+)} \cup \ell_2$, где ℓ_1 и ℓ_2 — лежащие на мнимой оси лучи $(-\infty, -ir]$ и $[ir, \infty)$. Соответственно:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_1 \cup C^{(+)} \cup \ell_2} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\ell_1} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda + \int_{\ell_2} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda - \int_{C^{(-)}} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda + \oint_C \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Так как КДС физически возможная, а квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны при $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$, функция $\Phi(i\omega)$ абсолютно интегрируема на полубесконечных интервалах $-\infty < \omega \leq -r$ и $r \leq \omega < \infty$ и не имеет особенностей на указанных интервалах. Согласно теореме Римана [4, с. 281]

$$\int_{\ell_1} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = i \int_{-\infty}^{-r} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{\ell_2} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = i \int_r^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Так как производная $\Phi'(\lambda)$ существует и ограничена при $\lambda \in C^{(-)}$, то

$$\begin{aligned} \int_{C^{(-)}} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda &= \frac{1}{t} \left[\Phi(-ir) e^{-irt} - \Phi(ir) e^{irt} - \int_{C^{(-)}} \Phi'(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \end{aligned}$$

и поведение $q(t)$ при $t \gg 1$ определяется вычетом в точке $\lambda = 0$, т. е. выражением

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} (\lambda^k \Phi(\lambda) e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=0}.$$

Следовательно, импульсная переходная функция $q(t)$ будет ограниченной лишь при кратности $k = 1$.



2. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЯЕМЫХ КДС

Передаточные функции управляемых КДС (1) зависят от набора параметров обратных связей $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$, т.е. $\Phi = \Phi(\lambda, \mathbf{p})$, $D = D(\lambda, \mathbf{p})$. Как следует из [1] и доказанной выше теоремы, потеря устойчивости соответствует прохождению через мнимую ось $\text{Re } \lambda = 0$ одного или нескольких корней квазимногочлена $D(\lambda, \mathbf{p})$, и уравнения возможных границ области устойчивости $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ в пространстве параметров обратных связей суть

$$\text{Re } D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \quad \text{Im } D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (5)$$

Многообразие (5) (размерности $N_p - 1$) разделяет пространство параметров обратных связей на некоторое множество областей Ω_ν , $\nu = 1, 2, \dots$. Проверка принадлежности текущей области Ω_ν области устойчивости Ω_{st} в пространстве параметров обратных связей выполняется на основе однократной проверки устойчивости КДС для некоторого фиксированного набора $\mathbf{p} \in \Omega_\nu$ при помощи теорем об устойчивости [1], т.е. при помощи (4). Задача параметрического синтеза, т.е. выбора значений параметров $\mathbf{p} \in \Omega_{st}$, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, сводится к задаче минимизации функции $F: \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0)\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p})\|^{-2} \right) \times \\ \times \int_0^\infty \sum_{k=0}^2 c_k \|d^k R_A(\omega, \mathbf{p})/d\omega^k - R_A(0, \mathbf{p})d^k R_A^*(\omega)/d\omega^k\|^2 d\omega, & \mathbf{p} \in \Omega_{st}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega_{st}, \end{cases} \quad (6)$$

$$R_A(\omega, \mathbf{p}) = [R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p})], \quad R_A^*(\omega) = \text{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\},$$

$$R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} \text{Re } \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \text{Re} [\Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p})/(i\omega)], & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2}(1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p})|^2 \right]^{1/2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x.$$

Здесь $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$ — начальные значения параметров обратных связей. Поскольку число N_p параметров обратных связей относительно невелико (не более нескольких десятков), при минимизации функции (6) используется безградиентный метод Нелдера–Мида. Заметим, что при выполнении параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации области устойчивости, а достаточно лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости: $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$.

3. ЗАДАЧА О ПРОГРАММНОМ РАЗВОРОТЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрим далее упрощенную линеаризованную математическую модель газореактивной системы стабилизации спутника с упругодеформируемыми элементами конструкции. Расчетная схема для задачи о программном развороте спутника (космического аппарата наблюдения) представлена на рис. 2, а.

В данном случае входная вектор-функция $\mathbf{x}(t) = (L(t), \alpha_0(t))^T$ содержит две компоненты: возмущающий момент $L(t)$ и желаемый угол поворота спутника $\alpha_0(t)$, а выходная вектор-функция $\mathbf{y}(t) = \{\alpha(t)\}$ содержит одну компоненту — угол поворота спутника $\alpha(t)$. Газореактивная система создает управляющий момент, соответствующий пропорционально-интегрально-дифференциальному регулятору в системе управления:

$$M_c(t) = -p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} (\alpha(\xi) - \alpha_0(\xi)) d\xi.$$

Здесь $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ — набор параметров обратных связей; τ — характерное время запаздывания в газореактивных двигателях; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t . Модельные



уравнения КДС в безразмерных переменных и параметрах аналогичны [2] и имеют вид

$$\begin{aligned}
 J_c \ddot{\alpha} &= L + 2M_0 - 2aP_0 - p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} (\alpha(\xi) - \alpha_0(\xi)) d\xi, \\
 J_1 (\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) &= -M_1, \quad m_1 [\ddot{y}_1 + (1+a)\ddot{\alpha}] = P_1, \\
 \ddot{u} + u'''' + \gamma \dot{u}'''' + (a+x)\ddot{\alpha} &= 0, \quad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x, \\
 u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) &= y_1(t), \quad u'(1, t) = \alpha_1(t), \\
 M_0 = u''(0, t) + \gamma \dot{u}''(0, t), \quad P_0 &= u'''(0, t) + \gamma \dot{u}'''(0, t), \\
 M_1 = u''(1, t) + \gamma \dot{u}''(1, t), \quad P_1 &= u'''(1, t) + \gamma \dot{u}'''(1, t), \\
 -\tau \leq t \leq 0: \quad \alpha(t) = \dot{\alpha}(t) &= 0, \\
 \alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) &= u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $u(x, t)$ — прогиб срединной линии стержня; $y_1(t)$ — смещение центра масс закрепленного тела; P_0, M_0, P_1 и M_1 — соответственно силы и момент сил реакции стержня в точках его заделки в спутнике; m_1 — характерная масса закрепленного тела; J_c, J_1 — характерные моменты инерции спутника и закрепленного тела. Первое уравнение в (7) является интегродифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Матрица передаточных функций $\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = [\Phi_{11}(\lambda, \mathbf{p}) \ \Phi_{21}(\lambda, \mathbf{p})]$ фактически представляет собой строчный вектор, а ее элементы, после выполнения в (7) одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени t , находятся аналогично [2].

При выполнении параметрического синтеза использовались формулы (6), а моделирование переходных процессов выполнялось на основе эффективного алгоритма численного обращения интегрального преобразования Лапласа [5]. Результаты моделирования переходных процессов для значений расчетных параметров $J_c = 0.07442, m_1 = 3, J_1 = 0.007, a = 0.05, \gamma = 0.01, \tau = 0.01, t_0 = 1$ приведены на рис. 2, б (до процедуры параметрического синтеза — штриховой линией, после — сплошной). В верхней части рис. 2, б показана реакция на входное возмущение, соответствующее возмущающему моменту в форме единичного скачка Хевисайда $L(t) = \mathbf{1}(t)$. Как видно, выполнение параметрического синтеза обеспечивает подавление ошибки системы стабилизации от входного возмущения $L(t)$. В нижней части рис. 2, б показана реакция на входное возмущение:

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Выполнение параметрического синтеза обеспечивает поворот спутника практически в соответствии с желаемым углом поворота (8) (показан на рис. 2, б пунктиром).

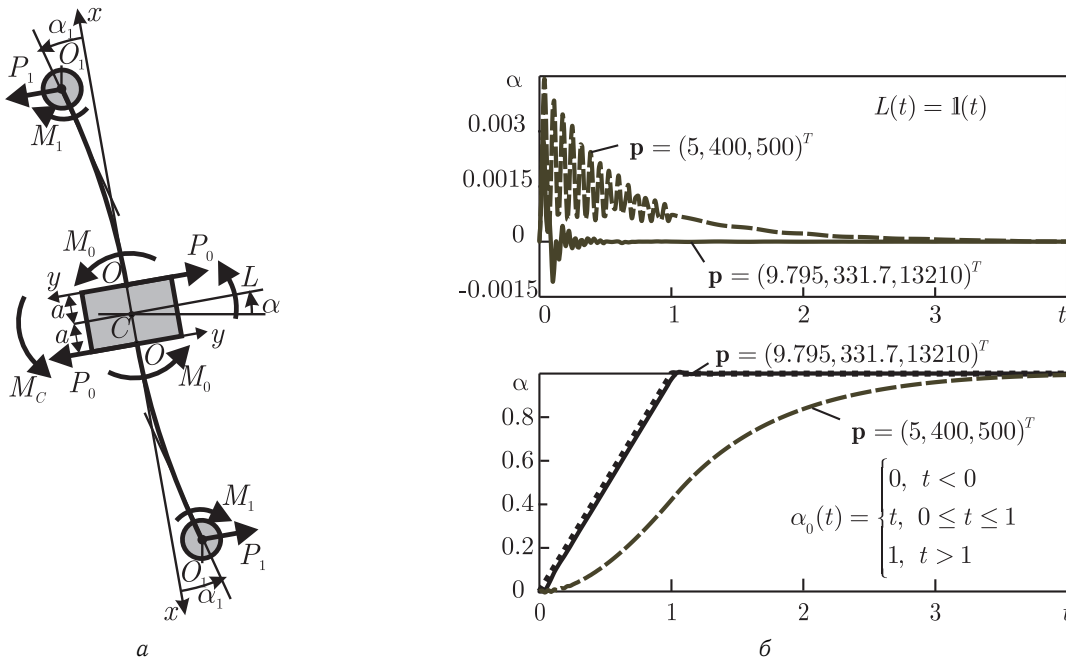


Рис. 2. а — расчетная схема; б — результаты параметрического синтеза

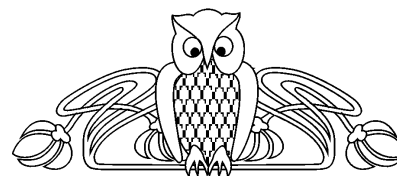


Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69. [Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2000. Vol. 39, № 3. P. 383–398.]
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 150–163. [Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of stabilization of satellites having elastic rods // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2004. Vol. 43, № 6. P. 973–986.]
3. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89. [Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. Dynamic analysis and choice of parameters of a model of gyroscopic integrator of linear accelerations with floating platform // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2008. Vol. 47, № 4. P. 570–583.]
4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : в 2 т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. М. : Физматлит, 2005. 424 с. [Kudryavtsev L. D. A short course of mathematical analysis. Harmonic analysis. Moscow : Phymathlit, 2005. Vol. 2. 424 p.]
5. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044. [Andreichenko D. K. An Efficient Algorithm for Numerical Inversion of the Laplace Transform // Comp. Math. and Math. Phys. 2000. Vol. 40, № 7. P. 987–999.]

УДК 517.958

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЦЫ ПОТОКОВ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ



Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев

Калужский государственный университет
им. К. Э. Циолковского
E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

В работе дан конструктивный метод решения основных краевых задач для системы неоднородных дифференциальных уравнений на графе, удобный для использования ЭВМ. Система уравнений и условия согласования в вершинах выбраны, имея в виду приложение метода к теории переноса и другим проблемам неравновесной термодинамики.

Ключевые слова: граф, вершина, матрица потоков, внешний поток.

On the Use of Streams in the Matrix Solution of Boundary Value Problems for the Graph

Yu. V. Afanasekova, Yu. A. Gladyshev

The paper presents a constructive method for solving the basic boundary value problems for systems of inhomogeneous differential equations on a graph, convenient to use on computer. The system of equations and matching conditions at the vertices are selected, taking into account the application of the method to the theory of transport and other issues of non-equilibrium thermodynamics.

Key words: graph, vertex matrix of flows, external flow.

Далее используется понятие геометрического графа, которое было введено Ю. В. Покорным с соавт. [1]. Однако используется не локальная (по ребру), а общая параметризация, когда выбрана единая, например, декартовая система координат. Это более удобно с точки зрения приложений. Примененный метод P -матрицы в принципе не связан с параметризацией графов и для его использования достаточно ориентированности графа.

Положим, что граф Γ включает n вершин и l ребер. Первоначально считаем, что граф не содержит петель и двух и более ребер, соединяющих одни и те же вершины.

В основу индексации положена нумерация вершин, на которую не положено каких-либо требований. Величина, отнесенная к вершине i обозначена индексом в скобках сверху как $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$. Величины, относящиеся к ребру с вершинами i, j , нумеруются двумя индексами в скобках, например, $P^{(i,j)}$. Если величина имеет какие-либо индексы сверху, то (i, j) переносится вниз. Например, $X_{(i,j)}^{(n)}$.

Считаем, в силу конечного числа ребер, что не одно ребро не нормально к оси X . Граф ориентирован, поэтому можно ввести

Определение 1. Ребра, инцидентные вершине i в введенной системе координат, можно разделить однозначно на *инцидентные слева* γ_l и *справа* γ_r (рис. 1).

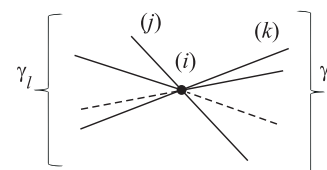


Рис. 1