

МЕХАНИКА

УДК 539.3

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ПЛАСТИНАХ

Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

Саратовский государственный университет

E-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru, mv_wilde@mail.ru, rector@sgu.ru

Исследуются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластины (кромочные волны). Рассматриваются антисимметричные колебания пластины, поверхности которой свободны от напряжений. Для описания колебаний пластины применяются трехмерные уравнения теории упругости, что позволяет изучить кромочные волны высшего порядка. Выполнен асимптотический анализ задачи, показывающий, что в пластине существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Получены асимптотики фазовых скоростей для больших значений волнового числа. Показано, что с увеличением волнового числа фазовые скорости всех кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея, а их коэффициенты затухания стремятся к нулю. Представлены численные результаты для первых четырех кромочных волн высшего порядка в широком частотном диапазоне.

Ключевые слова: поверхностные волны, кромочные волны, волна Рэлея, упругая пластина, асимптотические методы.

Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates

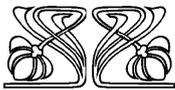
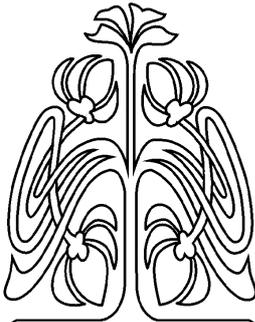
R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

This paper is concerned with the propagation of surface waves localized near the edge of plate (edge waves). Antisymmetric waves in a plate subject to traction free boundary conditions are considered. To study higher order edge waves three-dimensional equations of theory of elasticity are used. Asymptotic analysis is performed, which shows that there are an infinite spectrum of higher order edge waves. For the large values of wave number asymptotics of phase velocities are obtained. It is demonstrated that in the short-wave limit the phase velocities of all higher order edge waves tend to the velocities of Rayleigh wave, while the damping ratios tend to zero. Numerical results for first four higher order edge waves are presented in a wide frequency range.

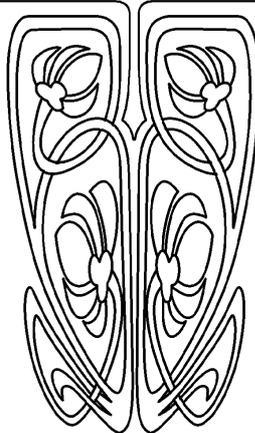
Key words: surface waves, edge waves, Rayleigh wave, elastic plate, asymptotic methods.

ВВЕДЕНИЕ

Кромочными волнами в [1] названы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. До последнего времени эти волны, как правило, изучались на основе тех или иных двумерных теорий пластин. Для пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, кромочная волна представляет собой классическую волну Рэлея [2] с заменой скорости распространения волн расширения на соответствующую скорость в пластинах. Кромочная волна при изгибных колебаниях пластины была впервые рассмотрена в [3], где для описания колебаний пластины применялась теория изгиба пластин Кирхгофа. Существование и единственность изгибной кромочной волны в анизотропных тонких пластинах изучались в [4]. Собственные колебания оболочек, связанные с кромочными волнами, рассмотрены в работах [5, 6].



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Двумерные теории пластин описывают только первую, или фундаментальную, кромочную волну в длинноволновом диапазоне. Если применить для описания колебаний пластины трехмерную теорию упругости, то окажется, что кроме этой волны существуют другие кромочные волны, которые можно назвать кромочными волнами высшего порядка. До последнего времени такие волны были практически не изучены. В работе [7] получено простое аналитическое решение для кромочных волн высшего порядка в случае перекрестных граничных условий на лицевых поверхностях пластины. В работах [8, 9] рассмотрены кромочные волны в пластине со свободными либо жестко защемленными лицевыми поверхностями для случая симметричных колебаний пластины.

В данной работе рассматриваются кромочные волны высшего порядка при антисимметричных колебаниях пластины со свободными лицевыми поверхностями.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим гармонические колебания упругой пластины, занимающей в декартовых координатах (x, y, z) область $0 \leq x < \infty, |y| \leq h, -\infty < z < \infty$ (рис. 1). Для описания колебаний пластины примем трёхмерные уравнения теории упругости. Введём безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = h\pi^{-1}\tilde{x}, \quad y = h\pi^{-1}\tilde{y}, \quad z = h\pi^{-1}\tilde{z}, \quad \mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\} = h\pi^{-1}\{\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z\}, \quad (1)$$

$$\tilde{\omega} = h\pi^{-1}\omega c_2^{-1}, \quad \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} = E[2(1 + \nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xy}, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}\},$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ — компоненты тензора напряжений, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, c_2 — скорость волны сдвига, ω — круговая частота. Временной множитель $e^{i\omega t}$ и знак « \sim », обозначающий безразмерные переменные, далее опущены. Запишем выражения перемещений через упругие потенциалы Ламе φ и ψ :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi. \quad (2)$$

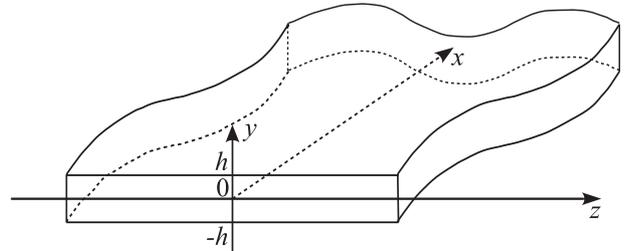


Рис. 1. Геометрия задачи

Выражения напряжений через потенциалы φ и ψ представлены в работе [9]. Уравнение (2) следует дополнить условием

$$\text{div } \psi = 0. \quad (3)$$

Условие (3) является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (2). Функции φ и ψ должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \omega^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + \omega^2 \psi = 0, \quad (4)$$

где Δ — трёхмерный оператор Лапласа, $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$.

На лицевых поверхностях $y = \pm h$ мы будем ставить граничные условия свободного края:

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \quad (5)$$

Считаем, что напряжённо-деформированное состояние изменяется по переменной z по гармоническому закону. При $x = 0$ поставим следующие граничные условия:

$$\sigma_x = T_g(y) \cos sz, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (6)$$

где $T_g(y)$ — заданная функция переменной y , s — некоторое число. Резонансные частоты рассматриваемой задачи соответствуют собственным частотам однородной задачи с граничными условиями при $x = 0$:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (7)$$

при этом следует искать те решения однородной задачи, которые соответствуют принятому закону изменения НДС по переменной z и затухают при $x \rightarrow \infty$. На бесконечности ставится условие отсутствия источников энергии.



Решение однородной задачи (4), (5) можно представить в виде суммы двух кромочных волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси z . Для таких волн параметр s играет роль волнового числа. Таким образом, исследование зависимости от s собственных частот задачи (4), (5) или резонансных частот задачи (4), (5) равносильно исследованию дисперсии кромочных волн. Фазовая скорость кромочной волны определяется по формуле

$$c = \frac{\omega_0}{s}, \quad (8)$$

где ω_0 — собственная частота, или резонансная частота задачи (4), (5).

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРОМОЧНЫХ ВОЛН ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим однородную краевую задачу (4), (5), (7). Построим приближенные собственные формы для этой задачи, используя трёхмерную волну Рэлея. Для случая НДС, антисимметричного по переменной y , форма этой волны определяется потенциалами (см. [9])

$$\begin{aligned} \varphi &= -CK_R \frac{\gamma'}{\gamma} \sin(\gamma y) \cos(sz) \exp(-r_1^R x), \\ \psi_x &= 0, \\ \psi_y &= C \frac{s}{\gamma} \sin(\gamma y) \sin(sz) \exp(-r_2^R x), \\ \psi_z &= C \cos(\gamma y) \cos(sz) \exp(-r_2^R x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $r_1^R = \sqrt{\gamma'^2 - \kappa^2 \omega^2}$, $r_2^R = \sqrt{\gamma'^2 - \omega^2}$, $\gamma' = \sqrt{\gamma^2 + s^2} = \vartheta \omega$, $K_R = \frac{2\vartheta \sqrt{\vartheta^2 - 1}}{2\vartheta^2 - 1}$, C — произвольная константа, ϑ — корень следующего уравнения:

$$[\vartheta^2 - 0.5]^2 - \vartheta^2 \sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2} \sqrt{\vartheta^2 - 1} = 0. \quad (10)$$

Заметим, что $\vartheta = 1/c_R$, где c_R — скорость волны Рэлея, отнесённая к скорости волны сдвига. Решение, определяемое потенциалами (9), удовлетворяет однородным условиям (7). Примем, что значение параметра γ фиксировано, и запишем асимптотики при $s \rightarrow \infty$ для напряжений, входящих в граничные условия (5):

$$\begin{aligned} \sigma_y^R &= \frac{C}{\gamma} \left(\frac{K_R}{\vartheta^2} [s^3(1 - 2\kappa^2) + \gamma^2 s(1 + 2\vartheta^2 - 2\kappa^2)] e^{-s\tilde{r}_1^R x} - 2\gamma^2 s \frac{\vartheta_2}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \times \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \sin(\gamma y) \cos(sz), \\ \sigma_{xy}^R &= 2s^2 C \left(K_R \frac{\vartheta_1}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_1^R x} - \left(1 - \frac{1}{2\vartheta^2}\right) e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \cos(sz), \\ \sigma_{yz}^R &= 2s^2 C \left(K_R e^{-s\tilde{r}_1^R x} - \frac{\vartheta_2}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \sin(sz), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{r}_1^R = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$, $\tilde{r}_2^R = \frac{\vartheta_2}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$.

Формулы (11) показывают, что при $s \rightarrow \infty$ наибольшим из напряжений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях, является напряжение σ_y^R . Чтобы удовлетворить всем граничным условиям однородной задачи с асимптотически малой погрешностью, достаточно положить

$$\gamma = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Таким образом, в качестве первого приближения собственной формы колебаний рассматриваемой пластины можно принять форму трёхмерной волны Рэлея. Подставляя (12) в выражение $\gamma' = \vartheta \omega$, связывающее частоту и волновое число в поверхностной волне, получим асимптотику собственных частот при $s \rightarrow \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + n^2}. \quad (13)$$



Формула (13) показывает, что в рассматриваемой пластине существует бесконечное счётное множество кромочных волн высшего порядка. Это соответствует бесконечному спектру частот краевого резонанса в полуполосе, исследованному в работе [9]. По отношению к волнам, рассматриваемым в данной работе, частоты, найденные в работе [9], соответствуют случаю $s = 0$, то есть представляют собой частоты запириания. В работе [9] для них были получены следующие приближенные формулы:

$$\omega_k \approx \omega_k^{(0)} = \frac{(k + \frac{1}{2}) \operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}}}{\sqrt{(\operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}})^2 + (k + \frac{1}{2})^2(\vartheta^2 - 1)}}, \quad (14)$$

где r_{2k-1}^{st} — предельные значения комплексных корней уравнения Рэлея–Лэмба при $\omega \rightarrow 0$:

$$r_{2k-1}^{\text{st}} \approx k + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{arch}[(2k + \frac{1}{2})\pi]}{2\pi\sqrt{(2k + \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}} - \frac{i}{2\pi} \operatorname{arch}\left[\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Очевидно, что при малых s собственные частоты задачи (4), (5), (7) приближенно определяются формулой (14). Следовательно, при увеличении s от нуля до бесконечности должен произойти переход от собственных частот, определяемых формулой (14), к собственным частотам, определяемым формулой (13). На частотах (14) изменение формы волны Рэлея в направлении оси y характеризуется параметром γ , значение которого можно считать близким к величине $\gamma \approx k + 1/2$. Из формулы (13) следует, что при $s \rightarrow \infty$ параметр γ приближенно равен целому числу ($\gamma \approx n$). Это означает, что при увеличении волнового числа s форма кромочной волны эволюционирует от формы трёхмерной волны Рэлея с $\gamma \approx k + 1/2$ до формы той же волны с $\gamma \approx n$. Запишем приближенную формулу в переходной области:

$$\omega_k^{(1)} \approx \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (16)$$

В случае $\nu = 0$ асимптотически главными среди напряжений $\sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ станут напряжения σ_{xy}, σ_{yz} , так как коэффициент при s^3 в (11) обращается в ноль. Чтобы удовлетворить граничным условиям, положим $\gamma \approx n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это даст следующую асимптотическую формулу для собственных частот:

$$\omega_n^{(\infty)} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (17)$$

Таким образом, для $\nu = 0$ приближенная формула в переходной области совпадает с асимптотикой при $s \rightarrow \infty$.

Подставляя (13), (17) в формулу (8), получим асимптотику фазовых скоростей кромочных волн высшего порядка при $s \rightarrow \infty$:

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} c_R \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{при } \nu \neq 0, \\ c_R \sqrt{1 + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{s^2}} & \text{при } \nu = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) следует, что если $s \rightarrow \infty$, то фазовые скорости кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея. Следовательно, дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка $c_n(s)$ сгущаются при $s \rightarrow \infty$ в окрестности прямой $c = c_R$.

Для подтверждения теоретических выводов численно были найдены частоты кромочных волн высшего порядка, соответствующие различным значениям волнового числа s . При численном исследовании удобно рассматривать задачу о вынужденных колебаниях (4)–(6). В этом случае резонансная частота соответствует частоте колебаний в кромочной волне, а ширина резонанса — коэффициенту затухания кромочной волны, связанному с демпфированием распространяющимися модами (см. [9]). Метод численного решения задачи основан на разложении по модам и описан в работе [9]. При поиске k -го резонанса прикладывалась нагрузка (6) при $T_g = \sin((k + 1/2)y)$. В процессе поиска



резонансных частот удобно использовать приближенные соотношения (13) и (16). Запишем их в виде общей формулы:

$$\omega_{\gamma}^{appr} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \gamma^2}, \quad (19)$$

где $\gamma = k = 1, 2, 3 \dots$ или $\gamma = k + 1/2 = 0.5, 1.5, 2.5 \dots$. При расчётах было обнаружено, что при $s \geq 0.3$ появляются резонансы, частоты которых выше, чем частота «нулевого» резонанса, связанного с фундаментальной кромочной волной, но ниже, чем частота резонанса, соответствующего первому резонансу в двухмерном случае ($s = 0$). С ростом s частота этих дополнительных резонансов растёт. Очевидно, что возникновение дополнительных резонансов — следствие появления кромочной волны высшего порядка, отсутствующей при $s = 0$. Присвоим полученной волне номер $k = 1/2$.

Появление этой волны можно объяснить следующим образом: при $s \rightarrow \infty$ возможна собственная форма, представляющая собой волну Рэлея с $\gamma = 1$, следовательно, должна существовать и волна, выходящая на асимптотику (13) при $n = 1$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчётов для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$ приведены в таблице. Здесь ω_k^{num} и Γ_k^{num} — частота и ширина k -го резонанса, найденные численно, ω_k^{appr} — частота, найденная по формуле (19) при $\gamma = 1, 2, 3, 4$ для $k = 1/2, 1, 2, 3$ соответственно. Для $k = 1$ резонансная частота определялась как частота, на которой достигается максимум величины $|u_y(0, 0, 0)|$, а для $k = 1/2, 2, 3$ — как частота, на которой достигается максимум величины $|u_x(0, \pi/8, 0)|$. Амплитуда резонанса A_k^{num} — значение указанных величин на резонансной частоте. Ширина резонанса искалась как полусумма ширины слева и ширины справа, равных модулю разности между резонансной частотой и частотой, в которой достигается значение $A_k^{num}/\sqrt{2}$. В расчётах при $s \in (0.0, 10.0)$ использовалась 41 плоская мода и 21 антиплоская, $s \in (10.0, 20.0)$ — 81 плоская мода и 41 антиплоская.

s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}	s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}
$k = 0.5$				$k = 1$			
0.3	0.553	0.960	0.121	0.1	1.338	1.841	0.110
0.6	0.711	1.072	0.056	0.3	1.366	1.859	0.125
1.0	1.018	1.300	0.037	0.6	1.379	1.920	0.152
1.3	1.273	1.508	0.034	0.9	1.458	2.016	0.117
2.2	2.088	2.222	0.036	1.5	1.880	2.299	0.110
5.0	4.669	4.688	0.023	5.0	4.804	4.951	0.055
6.0	5.584	5.593	0.019	6.0	5.706	5.815	0.076
10.0	9.239	9.240	$4.474 \cdot 10^{-3}$	10.0	9.361	9.376	0.036
15.0	13.822	13.822	$1.211 \cdot 10^{-3}$	15.3	14.184	14.187	$9.316 \cdot 10^{-3}$
20.0	18.411	18.411	$6.056 \cdot 10^{-4}$	20.0	18.479	18.480	$5.017 \cdot 10^{-3}$
$k = 2$				$k = 3$			
0.1	2.076	2.760	0.175	0.1	3.095	3.679	0.119
0.3	2.098	2.772	0.165	0.3	3.108	3.688	0.121
0.6	2.170	2.813	0.128	0.6	3.150	3.719	0.125
0.9	2.279	2.880	0.103	0.9	3.214	3.770	0.130
1.7	2.688	3.170	0.087	1.5	3.400	3.928	0.120
3.3	3.776	4.100	0.055	2.8	4.074	4.489	0.078
5.8	5.793	6.004	0.049	4.5	5.216	5.536	0.063
10.0	9.501	9.599	0.075	10.0	9.739	9.902	0.055
15.0	14.048	14.064	0.035	15.0	14.206	14.273	0.071
20.0	18.591	18.594	0.021	20.0	18.745	18.752	0.035

На рис. 2 приведены графики для $\nu = 0.25$. На рис. 2, а показаны значения ширины резонансов Γ_k , а также фазовые скорости, рассчитанные по формуле $c_k = \omega_k^{num}/s$. Рис. 2, б иллюстрирует связь результатов численных экспериментов с результатами асимптотического анализа, полученными выше.



На нём представлены четыре группы графиков, соответствующих каждой найденной волне. Каждая группа включает три графика, представляющих величину $\delta_R = \omega - c_R s$, где жирным линиям соответствует $\omega = \omega_k^{num}$ при $k = 0.5, \overline{1}, \overline{3}$ (численное решение), тонким линиям — $\omega = \omega_j^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (асимптотика на бесконечности), а штрихпунктирным — $\omega = \omega_{j-1/2}^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (аппроксимация в переходной области).

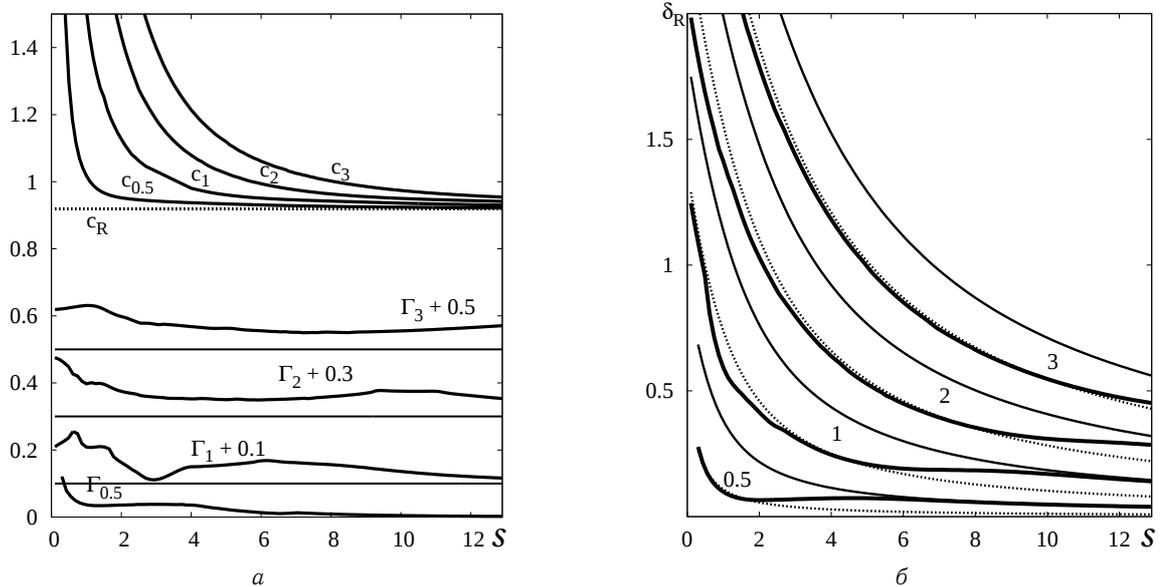


Рис. 2. Результаты расчётов для случая свободных боковых сторон: a — фазовые скорости и ширина резонансов кромочных волн высшего порядка, b — сравнение численных результатов с асимптотиками и приближенными формулами

На основании данных, представленных в таблице и на рис. 2, можно сделать следующие выводы.

1. Результаты численных экспериментов полностью согласуются с результатами теоретического исследования. Поведение частот при $s \rightarrow \infty$ с малой погрешностью описывается асимптотической формулой (13), фазовые скорости при $s \rightarrow \infty$ стремятся к скорости волны Рэлея. Найденная численно дополнительная волна, отсутствовавшая в двухмерном случае, также находит объяснение в асимптотическом анализе. В переходной области поведение частот с большой точностью описывается формулой (16).

2. Все кромочные волны демпфируются распространяющимися модами. При увеличении волнового числа s от нуля до бесконечности коэффициент затухания убывает, затем незначительно возрастает, затем вновь асимптотически убывает до нуля. Первая волна ($k = 1$) имеет особенность: при $s \in (0.4, 0.8)$ её коэффициент затухания демонстрирует резкое возрастание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотическое и численное исследование, проведенное в данной работе, показывает, что кроме фундаментальной волны, исследованной в [3], в пластинах существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Все они являются затухающими, но при больших значениях волнового числа затухание становится малым. С уменьшением длины волны фазовые скорости всех обнаруженных волн стремятся к скорости волны Рэлея, что показывает, что возникновение этих волн связано с накоплением энергии при отражении поверхностной волны Рэлея от лицевых поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Институт механики НАН Армении. Ереван, 1997. С. 79–96. [Belubekyan M. V. Surface waves in elastic media // Problems of Mechanics of Deformed Solids / Institute of Mechanics, National Academy



- of Sciences of Armenia. Erevan, 1997. P. 79–96.]
 2. *Rayleigh J.* On waves propagated along the surface of an elastic solid // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
 3. *Коненков Ю. К.* Об изгибной волне «рэлеевского» типа // *Акуст. журн.* 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [*Konenkov Y. K.* A Rayleigh-type flexural wave // *Soviet Physics Acoustics.* 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 124–126.]
 4. *Fu Y. B.* Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2003. Vol. 56. P. 605–616.
 5. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // *J. Acoust. Soc. America.* 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393.
 6. *Kaplunov J. D., Wilde M. V.* Edge and interfacial

vibrations in elastic shells of revolution // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).* 2000. Vol. 51. P. 29–48.

7. *Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A.* On three-dimensional edge waves in semi-infinite isotropic plates subject to mixed face boundary conditions // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. № 118(5). P. 2975–2983.

8. *Zernov V., Kaplunov J. D.* Three-dimensional edge waves in plates // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2008. Vol. 464. P. 301–318.

9. *Вильде М.В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с. [*Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu.* Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies. Moscow : Fizmatlit, 2010. 280 p.]

УДК 534.121.1

ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН В ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Ю. Д. Каплунов¹, Е. Л. Коссович², Р. Р. Мухомодьяров²,
 О. В. Сорокина²

¹Университет Брюнель, Лондон
 E-mail: Julius.Kaplunov@brunel.ac.uk

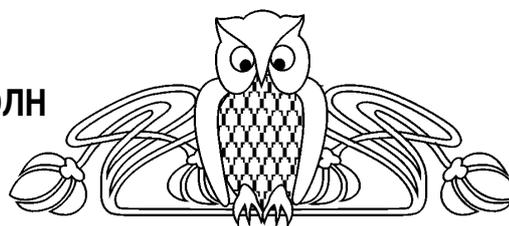
²Саратовский государственный университет
 E-mail: kossovichel@info.sgu.ru, rinatm@mail.ru,
 SorokinaOVA@yandex.ru

В статье приведены общие решения задач о колебаниях тонких изотропных полубесконечных пластин. Приведены основные принципы построения явных параболических эллиптических моделей, описывающих распространение краевых и интерфейсных изгибных волн. Построенные модели позволяют выделить вклад локализованных изгибных краевых и интерфейсных волн в общую деформацию пластин, вызванную приложенным на торце или в месте стыка нагружением. Также они отражают двойственную параболическую эллиптическую природу изгибных краевых и интерфейсных волн.

Ключевые слова: изотропия, прогиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, явная параболическая эллиптическая модель.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что и поверхностные, и краевые волны скрыты в математических постановках исходных задач [1]. Сравнительно недавно была разработана новая методика анализа краевых изгибных волн, заключающаяся в построении явных моделей, описывающих локализованные волны и выделяющие их вклад в общую постановку задачи. Данные модели, отражающие двойственную гиперболически эллиптическую природу поверхностных волн, недавно были построены в работе [1] для упругих и пьезоупругих поверхностных волн (а именно волны Рэлея и Гуляева–Блюштейна). Данные модели состоят из эллиптического уравнения, описывающего затухание волны внутрь по направлению от поверхности и гиперболического уравнения, описывающего распространение волны на поверхности. Модели обеспечивают значительное упрощение постановки и решения задач, связанных с анализом распространения поверхностных волн. Построение таких моделей является сложной задачей, требующей знаний в асимптотическом анализе исследуемых деформаций, представлений о природе рас-



Explicit Models for Flexural Edge and Interfacial Waves in Thin Isotropic Plates

J. D. Kaplunov, E. L. Kossovich, R. R. Mukhomodyarov,
 O. V. Sorokina

Exact solutions for problems of vibrations of isotropic thin elastic plates are presented in the work. Some basic principles of explicit dual parabolic-elliptic models for flexural edge and interfacial waves propagation are revealed. The obtained explicit models extract the contribution of the flexural wave into the full dynamic response. Also, these models reveal a dual parabolic-elliptic nature of the flexural edge and interfacial waves.

Key words: isotropy, deflection, shear force, bending moment, explicit dual parabolic-elliptic model.