

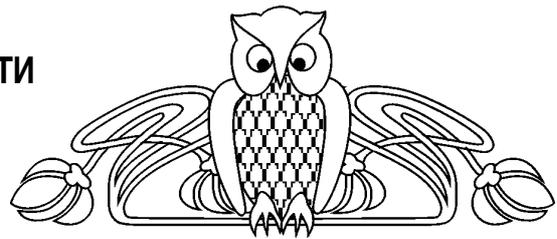


## Библиографический список

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. 272 с. [Pokornyi Y. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borowski A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. Differential equations on geometric graphs. Moscow : Fizmatlit. 2004. 272 p.]
2. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Моделирование процесса теплопроводности в материале трубы при наличии внешнего и внутреннего продольного оребрения // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования «ПМТУММ-2012». Воронеж : Издат.-полиграф. центр ВГУ, 2012. С. 86–88. [Gladyshev Y. A., Loshkareva E. A. Modeling of the thermal conductivity of the material in the pipe with an external and internal longitudinal fins // Recent developments in applied mathematics, control theory, and mathematical modeling «PMTUMM-2012». Voronezh, 2012. P. 86–88.]
3. Гладышев Ю. А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга : КГУ, 2011. 201 с. [Gladyshev Y. A. The method of generalized degrees of Bers and its applications. Kaluga : KGU, 2011. 201 p.]
4. Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В. Об одном методе решения второй краевой задачи на графе // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 48–49. [Gladyshev Y. A., Afanasenkova Y. V. A method for the second boundary value problem on a graph // Modern problems of functions theory and their applications : Proc. of the 16th Sarat. Winter School. Saratov, 2012. P. 48–49.]
5. Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В. Об использовании матрицы потоков и матрицы потенциалов при решении задач теории переноса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 49–51. [Gladyshev Y. A., Afanasenkova Y. V. On the use of the matrix of flows and the potential matrix in the solution of problems in the theory of transference // Modern problems of functions theory and their applications : Proc. of the 16th Sarat. Winter School. Saratov, 2012. P. 49–51.]

УДК 517.51

## НОВЫЕ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИН ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Н. В. Байдакова

Институт математики и механики УрО РАН  
E-mail: baidakova@imm.uran.ru

Рассматривается один из способов выбора условий интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, порождающий непрерывную результирующую кусочно-полиномиальную функцию на триангулированной области. Получено усиление оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных третьего порядка интерполируемой функции без снижения точности оценок величин погрешности аппроксимации функции и производных первого и второго порядков.

**Ключевые слова:** многомерная интерполяция, метод конечных элементов.

### New Estimates of the Error of Approximation of Derivatives under Interpolation of a Function on a Triangle by Polynomials of the Third Degree

N. V. Baidakova

We consider a method of interpolation by polynomials of the third degree which gives continuity of the resulting piecewise polynomial function on the triangulated domain. We get improved estimates for the error of approximation of derivatives of order 3 and keep accuracy of other estimates.

**Key words:** multidimensional interpolation, finite element method.

Пусть функция  $f$ , определенная на триангулированной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ , принадлежит множеству  $W^4M$  функций, непрерывных на  $\Omega$  вместе со всеми своими частными производными до 4-го порядка включительно, у которых все производные 4-го порядка ограничены по модулю константой  $M$ . На каждом треугольнике из триангуляции для  $f$  строится интерполяционный многочлен типа Биркгофа 3-й степени по совокупности переменных такой, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция была непрерывна на  $\Omega$ . В силу того что речь идет о локальных методах построения кусочно-полиномиальной функции на  $\Omega$ , далее можно ограничиться рассмотрением одного треугольника триангуляции.

Пусть  $T$  — произвольный треугольник, на котором интерполируется функция  $f$ ;  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — вершины  $T$ ;  $\alpha, \beta, \theta$  — углы при вершинах  $a_1, a_2, a_3$  соответственно. Поместим треугольник  $T$  в пря-



моугольную систему координат  $Oxy$  таким образом, что для некоторых положительных  $a, b, h$  координаты вершин будут записываться следующим образом:  $a_1 = (a + b, 0)$ ,  $a_2 = (0, 0)$ ,  $a_3 = (a, h)$ . Пусть  $0 < \alpha \leq \beta \leq \theta$ , откуда следует, что  $a \leq b$  и диаметр  $T$  равен  $a + b \triangleq H$ . Через  $\tau_{ij}$  будем обозначать единичные векторы, направленные от  $a_i$  к  $a_j$ , через  $D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s$  — производную порядка  $s$  по направлениям произвольных единичных векторов  $\xi_1, \dots, \xi_s$ . Положим  $e(x, y) = f(x, y) - P_3(x, y)$ , где  $P_3$  — некоторый интерполяционный многочлен 3-й степени.

Договоримся далее писать, что для величин  $g_1$  и  $g_2$  имеет место отношение  $g_1 \stackrel{(\geq)}{\sim} g_2$ , если существует константа  $C > 0$  такая, что  $g_1 \stackrel{(\geq)}{\leq} Cg_2$ .

Для определения многочлена  $P_3(x, y)$  на  $T$  требуется задать 10 условий. Пусть 9 из них имеют следующий вид:

$$P_3(a_i) = f(a_i), \quad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial y}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Эти условия обеспечивают непрерывность итоговой кусочно-полиномиальной функции на  $\Omega$  и часто выбираются в методе конечных элементов. Остается одно условие, выбор которого разными авторами осуществляется по-разному (см., например, работы [1–5]). Например, в [1] в качестве этого условия берется равенство

$$\frac{\partial P_3(a_{23})}{\partial x} = \frac{\partial f(a_{23})}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $a_{23}$  — середина отрезка  $a_2a_3$ , а в [2] — условие

$$\frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}}. \quad (3)$$

Условия (1), объединенные с условиями (2) или (3), позволили получить [1, 2] следующие оценки сверху величин погрешности аппроксимации функции и ее производных, не зависящие от синуса наименьшего угла треугольника  $T$  в знаменателе:

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \lesssim MH^{4-n} (\sin \beta)^{-j}, \quad (4)$$

где  $0 \leq n \leq 3$ ,  $0 \leq j \leq n$ ,  $(x, y) \in T$ . Оценки (4) означают, что для любого  $n = \overline{0, 3}$ , любых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и любой точки  $(x, y) \in T$  имеет место оценка

$$|D_{\xi_1 \dots \xi_n}^n e(x, y)| \lesssim MH^{4-n} (\sin \beta)^{-n}. \quad (5)$$

В данной работе предлагается вместо условий (2) или (3) использовать следующее условие:

$$\frac{\partial^3 P_3(a_2)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3}, \quad (6)$$

которое позволяет усилить правую часть (5) следующим образом:

$$|D_{\xi_1 \dots \xi_n}^n e(x, y)| \lesssim MH^{4-n} (\sin \beta)^{-\min\{2, n\}}. \quad (7)$$

Вопрос интерполяции функции в соответствии с условиями (1), (6) уже рассматривался в [4], однако в знаменателях полученных там оценок сверху для производных второго и третьего порядков присутствует синус наименьшего угла треугольника.

**Теорема.** Пусть многочлен  $P_3(x, y)$  определяется условиями (1), (6). Тогда для любой точки  $(x, y) \in T$  имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} MH^{4-n} & \text{при } j = 0, \quad 0 \leq n \leq 3, \\ MH^{4-n} (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \quad 1 \leq n \leq 3, \\ MH^{4-n} (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2, 3, \quad 2 \leq n \leq 3. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что оценки (7) являются очевидным следствием оценок (8).



**Доказательство.** Как и в работах [1, 2], используем разложение остатка  $e(x, y)$  и его производных по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} &= \sum_{i=s}^{3-n+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \sum_{k=0}^{3-n+s-i} \frac{\partial^{n-s+i+k} e(0, 0)}{\partial x^{n-s+k} \partial y^i} \frac{x^k}{k!} + \\ &+ \sum_{i=s}^{3-n+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \int_0^x \frac{(x-v)^{3-n+s-i}}{(3-n+s-i)!} \frac{\partial^4 f(v, 0)}{\partial v^{4-i} \partial y^i} dv + \int_0^y \frac{(y-t)^{3-n}}{(3-n)!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^{n-s} \partial t^{4-n+s}} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Для доказательства (8) достаточно оценить величины  $\frac{\partial^n e(0, 0)}{\partial x^{n-j} \partial y^j}$ ,  $0 \leq n \leq 3$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Так как значение погрешности интерполяции функции  $e(x, y)$  и ее первых производных в точке  $a_2 = (0, 0)$  согласно условиям (1) равно нулю, остается оценить производные второго и третьего порядков. Далее через  $C_i$  будем обозначать некоторые подходящие константы, через  $\zeta_{ij}^s$  — некоторые внутренние точки отрезков  $a_i a_j$ .

**Лемма 1.** Для  $j = \overline{0, 3}$  справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^{3-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} MH & \text{при } j = 0, 3 \\ MH (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \\ MH (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2. \end{cases} \quad (10)$$

**Доказательство.** Пусть  $j = 0$ . Рассматривая  $e(x, 0)$  на отрезке  $a_2 a_1$  и используя формулы для оценки производных ошибки интерполяции в одномерном случае (см., например, [6]), получим неравенство  $\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^3} \right| \lesssim MH$ . Для  $j = 3$  оценки (10) являются следствием условия (6). Остается рассмотреть случаи  $j = 1$  и  $j = 2$ .

Применяя последовательно формулы конечных приращений Лагранжа на  $a_2 a_3$  и производной остатка интерполяции на  $a_3 a_1$ , получаем цепочку равенств

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} = \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{31}^3} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2} = C_1 \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4} \frac{b}{\cos \alpha} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2}. \quad (11)$$

С другой стороны, так как  $\tau_{31} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$ , производная по направлению  $\tau_{31}$  в левой части (11) может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} = \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} \cos^3 \alpha - 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \alpha. \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} = C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} (a + b) \quad (13)$$

(используем формулу производной остатка интерполяции на отрезке  $a_2 a_1$ ), получаем равенство

$$-3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \alpha = b m_1, \quad (14)$$

где

$$m_1 = C_1 \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4} \frac{1}{\cos \alpha} - C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} \frac{(a + b)}{b} \cos^3 \alpha - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b}.$$

Первое и второе слагаемые в  $m_1$  определяются условиями (1) и не зависят от условий (2), (3) или (6), а модуль третьего для любой функции  $f \in W^4 M$  оценивается сверху величиной  $M (a^2 + h^2)^{1/2} / b$ . Поэтому сумму первых двух слагаемых в  $m_1$  можно оценить через сумму абсолютных величин третьего слагаемого в  $m_1$  и левой части (14), используя для получения оценок сверху оценки (4) для условий (1), (2) или (1), (3). Тогда

$$|m_1| \lesssim MH \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} \lesssim MH \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (15)$$



С учетом (6) равенство (14) приводит к соотношению

$$-3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha = b m_1. \quad (16)$$

Рассматривая  $e(x, y)$  вдоль отрезка  $a_2 a_3$  и используя формулу производной остатка интерполяции и представление производной по направлению  $\tau_{23} = (\cos \beta, \sin \beta)$  через частные производные по переменным  $x$  и  $y$ , получим последовательность равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{23}^3} &= C_3 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial \tau_{23}^4} (a^2 + h^2)^{1/2} = \\ &= \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} \cos^3 \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \beta \sin \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \beta \sin^2 \beta + \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \beta. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17), (6) и (13) получим соотношение

$$3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \beta \sin \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \beta \sin^2 \beta = b m_2, \quad (18)$$

где

$$m_2 = C_3 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial \tau_{23}^4} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} - C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} \frac{a + b}{b} \cos^3 \beta,$$

т. е.

$$|m_2| \lesssim M \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} + M \cos^3 \beta. \quad (19)$$

Решим систему уравнений (16), (18) (автором использовались формулы Крамера):

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{b(m_1 \cos \beta \sin^2 \beta - m_2 \cos \alpha \sin^2 \alpha)}{3 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}, \quad \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} = \frac{b(m_1 \cos^2 \beta \sin \beta + m_2 \cos^2 \alpha \sin \alpha)}{3 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}.$$

С учетом (15) и (19) получаем оценки

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \right| \lesssim M H (\sin \beta)^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \right| \lesssim M H (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1}.$$

Лемма 1 доказана. □

**Лемма 2.** Для  $j = \overline{0, 2}$  справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^{2-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} M H^2 & \text{при } j = 0, \\ M H^2 (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \\ M H^2 (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2. \end{cases} \quad (20)$$

**Доказательство.** При  $j = 0$  так же, как в лемме 1, рассмотрим  $e(x, 0)$  на отрезке  $a_2 a_1$  и, используя формулы для оценки производной ошибки интерполяции в одномерном случае, получим

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^2} \right| \lesssim M H^2.$$

Для случая  $j = 1$  применим формулу Тейлора на отрезке  $a_2 a_3$ :

$$\frac{\partial e(a_3)}{\partial x} = \frac{\partial e(a_2)}{\partial x} + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2} + \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{23}^2} \frac{(a^2 + h^2)}{2} + \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x \partial \tau_{23}^3} \frac{(a^2 + h^2)^{3/2}}{6}. \quad (21)$$

Левая часть и первое слагаемое в правой части (21) равны нулю в силу условий (1). Тогда

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \cos \beta + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \sin \beta = m_3, \quad (22)$$

где

$$m_3 = -\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{23}^2} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{2} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x \partial \tau_{23}^3} \frac{(a^2 + h^2)}{6}. \quad (23)$$

Для оценки первого слагаемого правой части (23) представим производную по направлению  $\tau_{23} = (\cos \beta, \sin \beta)$  через частные производные по переменным  $x, y$  и воспользуемся оценками (10).



Таким образом,  $|m_3| \lesssim MH (a^2 + h^2)^{1/2}$ . С учетом данной оценки из (20) при  $j = 0$  и (22) получаем, что

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial y} \right| \lesssim MH^2 (\sin \beta)^{-1}.$$

Остается доказать (20) для  $j = 2$ . Аналогично (17) получим последовательность равенств

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{23}^2} = C_4 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4} (a^2 + h^2) = \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \cos \beta \sin \beta + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \sin^2 \beta,$$

откуда с учетом (20) для  $j = 0, 1$  следует, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \right| &\leq \left| C_4 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4} \frac{(a^2 + h^2)}{\sin^2 \beta} \right| + \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right| \lesssim \\ &\lesssim M \left( \frac{a^2}{\sin^2 \beta} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta} + \frac{H^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Так как  $\cos \beta \gtrsim \cos((\pi - \alpha)/2) = \sin(\alpha/2) \gtrsim \sin \alpha$ , то

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{ab} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha} \lesssim \sin \beta, \\ \frac{a^2}{\sin^2 \beta} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta} &\lesssim \frac{a(a^2 + h^2)^{1/2}}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} + \frac{ab \sin \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{a(a^2 + h^2)^{1/2}}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} + \frac{hb}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} \lesssim \frac{H^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Тогда (24) дает оценку

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}.$$

Лемма 2 доказана. □

Таким образом, доказана теорема (объединяем разложение (9), условия (1) при  $i = 2$ , оценки (10) и (20)). □

Отметим, что вопрос оптимальности предложенных условий интерполяции и соответствующих оценок сверху остается открытым (см. оценки снизу в [7]).

*Работа выполнена в рамках программы Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики» при поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).*

### Библиографический список

1. Subbotin Yu. N. A New Cubic Element in the FEM // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2005. Suppl. 2. P. S176–S187.
2. Baidakova N. V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.
3. Ženišek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, № 211. P. 929–941.
4. Латыпова Н. В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. 2003. С. 3–10. [Latypova N. V. Error of interpolation by piecewise cubic polynomial on triangle // Proc. Udmurt. University. Mathematics. 2003. P. 3–10.]
5. Матвеева Ю. В. Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2007. Т. 7. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 23–27. [Matveeva J. V. Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2007. Vol. 7. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 1. P. 23–27.]
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений : в 2 т. Т. 1. М. : Физматгиз, 1962. [Berezin I. S., Zhidkov N. P. Computing Methods. Vol. 1. Oxford : Pergamon Press, 1965.]
7. Байдакова Н. В. Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97. [Baidakova N. V. Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2012. Suppl. 1. P. S33–S47.]