



УДК 62.534(031)

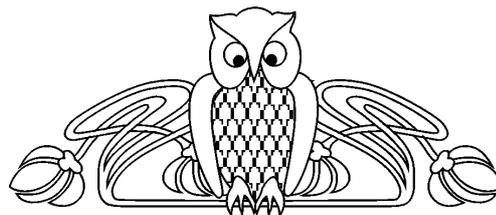
СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ

С.П. Безгласный, О.А. Мысина

Самарский государственный аэрокосмический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, olgamysina@yandex.ru

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных программных движений твердого тела, закрепленного на подвижной платформе. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: механическая система, стабилизация, программное движение, функция Ляпунова, предельные функции, твердое тело.



The Stabilization of Program Motions of Firm Body on a Moving Platform

S.P. Bezglasnyi, O.A. Mysina

We consider firm body with fixed point on a moving platform. We solve the problem of construction asymptotically stability program motion. The program motion can be any function. Control is received in the form the analytical solution. We solve the problem of stabilization by the direct Lyapunov's method and the method of limiting functions and systems. In this case we can use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives.

Key words: mechanical system, stabilization, program motion, Lyapunov's function, limiting functions, rigid body.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях твердого тела на подвижном основании являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей в связи с проблемой конструирования приборов на движущихся объектах (летательных аппаратах, кораблях и др.). Проблема построения и исследования свойств и условий устойчивости таких движений рассматривалась в работах многих ученых, например [1–3].

В данной работе ставится и решается задача об определении двухуровневого управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения твердого тела на подвижной платформе при заданном движении платформы. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [4]. Метод предельных систем [5] и его модификация [6] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение платформы относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$, при котором оси жестко связанной с платформой подвижной системы координат $OXYZ$ остаются параллельными осям абсолютной системы $O_1\xi\eta\zeta$ при произвольном заданном законе движения

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \\ \zeta = \zeta(t) \end{cases}$$

точки O платформы. Пусть на платформе в точке O закреплено твердое тело массы m , имеющее одну неподвижную относительно платформы точку. Введем жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы центр масс тела C лежал на оси Oz и имел координату $z = a > 0$. Предположим, что Oz — главная центральная ось инерции тела, а оси Ox и Oy параллельны двум другим главным осям инерции. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к телу, произвольных заданных (программных) движений твердого тела и стабилизации этих движений.



Программным (желаемым) движением системы назовем пару $(r(t), \dot{r}(t))$, где $r(t)$ — ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения для рассматриваемого тела составим в форме уравнений Лагранжа второго рода в подвижной системе координат $Oxyz$, считая силу тяжести $F = mg$ и силы инерции $F_1 = -m\ddot{\xi}$, $F_2 = -m\ddot{\eta}$, $F_3 = -m\ddot{\zeta}$, возникающие из-за движения платформы, внешними силами, приложенными к центру масс тела. Составив вектор обобщенных координат $q^T = (\varphi, \psi, \theta)$ из переменных Эйлера (символ $()^T$ обозначает транспонирование), запишем кинетическую энергию тела в виде

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} = \frac{1}{2} A_1 (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} B_1 (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2,$$

где $A_1 = I_1 + ma^2$, $B_1 = I_2 + ma^2$ и $C_1 = I_3$, $I_{1,2,3}$ — центральные осевые моменты инерции тела; квадратичная по скоростям форма T_2 определяется симметричной положительно-определенной ограниченной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$\begin{aligned} a_{11} &= C_1, & a_{12} &= a_{21} = C_1 \cos \theta, & a_{13} &= a_{31} = 0, \\ a_{22} &= (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta, & a_{23} &= a_{32} = G \sin 2\varphi \sin \theta, \\ a_{33} &= A_1 \cos^2 \varphi + B_1 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

где $G = \frac{1}{2}(A_1 - B_1)$.

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q$$

можно переписать в виде

$$A\ddot{q} + M = Q^e + Q^c, \quad (1)$$

где через $M = M(q, \dot{q})$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot{q}^T \frac{\partial A_i}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q} \quad (i = \overline{1,3}), \quad (2)$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (i = \overline{1,3}).$$

Вектор обобщенных сил $Q = Q^e + Q^c$ в правой части уравнений Лагранжа представляет собой сумму внешних сил Q^e , действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q^c , определяемых в дальнейшем.

В общем случае функция $r(t)$, описывающая программное движение тела, может не являться решением системы (1). Поэтому реализацию программных движений будем рассматривать как задачу о двухуровневом управлении, разделив управляющие воздействия на две группы:

$$Q^c = Q^p + Q^s,$$

где Q^p — силы, реализующие программное движение, Q^s — стабилизирующие его.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $(r(t), \dot{r}(t))$. Прямой подстановкой функции $r(t)$ в уравнения (1) определим управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q^p = A(r)\ddot{r} + M(r, \dot{r}) - Q^e(t, r, \dot{r}), \quad (3)$$

где координаты вектора $M = M(r, \dot{r})$ вычисляются по формулам, получающимся из формул (2) заменой величин q и \dot{q} на r и \dot{r} соответственно.



Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^\top A(x+r) \dot{x} + \dot{r}^\top A(x+r) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^\top A(x+r) \dot{r}.$$

Вычислив производные

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = A \ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{x} + A \ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2} \dot{x}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r},$$

получим уравнения движения в отклонениях:

$$A \ddot{x} + M + M' + M'' + A \ddot{r} = Q^e + Q^c, \tag{4}$$

где $Q^e = Q^e(t, r + x, \dot{r} + \dot{x})$, $M = M(x, \dot{x})$ обозначает вектор-столбец, компоненты которого M_i определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}),$$

M' — вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}),$$

M'' — вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j \quad (i = \overline{1,3}).$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C — диагональная матрица, удовлетворяющая условию:

$$c_0 E \leq C = \text{const} \leq c_1 E, \quad (0 < c_0 < c_1 - \text{const}), \tag{5}$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно-определенную по отклонениям x и скоростям \dot{x} , допускающую бесконечно-малый высший предел функцию Ляпунова

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^\top C x + \frac{1}{2} \dot{x}^\top A \dot{x}. \tag{6}$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^\top \dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)^\top \ddot{x} = \dot{x}^\top C x + \dot{x}^\top A \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{x},$$

и в силу системы (4) получим

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^\top C x + \dot{x}^\top (-M - M' - M'' - A \ddot{r} + Q^e + Q^c) + \frac{1}{2} \dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} \right) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{x}.$$



Пусть

$$-\dot{x}^\top M + \frac{1}{2} \dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{x}^\top N,$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}).$$

Учтя, что

$$M' = \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} \right) \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} \right) \dot{x} - \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x},$$

перепишем полученное выражение для производной следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^\top \left(\dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} \right) \dot{x} + \dot{x}^\top (Cx - M'' - A\ddot{r} + Q^e + Q^c) + \frac{1}{2} \dot{x}^\top N. \quad (7)$$

Пусть существует положительно определенная диагональная матрица D такая, что выполняется условие

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} - \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \geq d_0 E \quad (d_0 > 0 - \text{const}), \quad (8)$$

где L — матрица, задающая квадратичную форму $\dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{x} \right) \dot{r}$, т.е. матрица с элементами $\{l_{ik}\}$, вычисляемыми через элементы матрицы A по правилу:

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_j \quad (i, k = \overline{1,3}).$$

Выберем стабилизирующее управление согласно равенству

$$Q^s = -Cx - D\dot{x} + M'' + A\ddot{r} - Q^e - Q^p. \quad (9)$$

При управлении (9) уравнения движения (4) будут иметь вид

$$A\ddot{x} + M + M' + D\dot{x} + Cx = 0, \quad (10)$$

а полная производная (7) от функции (6) по времени в силу системы (10)

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^\top \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} - \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^\top N,$$

где последнее слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей \dot{x} , при выполнении условия (10) и при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) будет иметь оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{x}^\top \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^\top} \dot{r} - \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \dot{x} \leq -d_0 \|\dot{x}\|^2 \leq 0$$

и тем самым будет определено-отрицательной по скоростям функцией. Пусть вектор-функции M и M' в уравнении (10) удовлетворяют условию Липшица равномерно по x относительно t , тогда предельная система к системе уравнений (10) существует [5], имеет аналогичный ей вид, и множество $\{\dot{x} = 0\}$ не содержит решений предельной системы, кроме $x = \dot{x} = 0$. Тогда на основе теоремы из [6] об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы можно сделать вывод, что управление (9) при выполнении условия (8) решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (4). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Полученный результат развивает и обобщает соответствующие результаты из [2, 7, 8] и может быть использован при построении заданных движений твердого тела на движущихся объектах.



4. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В выбранных переменных для вектора M в системе (1) согласно формулам (2) получим выражение компонент

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} + \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} - \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right), \\ M_2 &= \dot{\theta}^2 \frac{\partial a_{23}}{\partial \theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi} \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} + \dot{\theta}\dot{\varphi} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right) + \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta}, \\ M_3 &= -\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi} \left(-\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right) + \dot{\theta}\dot{\varphi} \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} = -C_1 \sin \theta$, $\frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} = 2G \sin 2\varphi \sin^2 \theta$, $\frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} = (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi - C_1) \sin 2\theta$,
 $\frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} = 2G \cos 2\varphi \sin \theta$, $\frac{\partial a_{23}}{\partial \theta} = G \sin 2\varphi \cos \theta$, $\frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} = -G \sin 2\varphi$.

Действие сил инерции и силы тяжести описываются обобщенными силами Q^e , вычисляемыми в подвижной системе координат $Oxyz$ согласно равенствам

$$\begin{aligned} Q_1^e &= 0, \quad Q_2^e = -am\ddot{\xi} \cos \psi \sin \theta - am\dot{\eta} \sin \psi \sin \theta, \\ Q_3^e &= -am\ddot{\xi} \sin \psi \cos \theta + am\dot{\eta} \cos \psi \cos \theta + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin \theta. \end{aligned}$$

Тогда уравнения управляемых движений (1) твердого тела можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_1\ddot{\varphi} + C_1\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta}(2G \cos 2\varphi + C_1) \sin \theta - \dot{\psi}^2 G \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \dot{\theta}^2 G \sin 2\varphi &= Q_1^s + Q_1^p, \\ \ddot{\varphi} C_1 \cos \theta + \ddot{\psi} ((A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta) + \ddot{\theta} G \sin \theta \sin 2\varphi + \dot{\varphi}\dot{\psi} 2G \sin 2\varphi \sin^2 \theta + \\ + \dot{\varphi}\dot{\theta} (2G \cos 2\varphi - C_1) \sin \theta + \dot{\psi}\dot{\theta} (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi - C_1) \sin 2\theta + \dot{\theta}^2 G \cos \theta \sin 2\varphi &= \\ = -am\ddot{\xi} \cos \psi \sin \theta - am\dot{\eta} \sin \psi \sin \theta + Q_2^s + Q_2^p, \\ \ddot{\psi} G \sin \theta \sin 2\varphi + \ddot{\theta} (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) + \dot{\varphi}\dot{\psi} (2G \cos 2\varphi + C_1) \sin \theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} 2G \sin 2\varphi - \\ - \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 ((A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) - C_1) \sin 2\theta = -am\ddot{\xi} \sin \psi \cos \theta + am\dot{\eta} \cos \psi \cos \theta + \\ + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin \theta + Q_3^s + Q_3^p. \end{aligned}$$

Зная заданное программное движение как функции времени

$$r(t) = \begin{pmatrix} \varphi^*(t) \\ \psi^*(t) \\ \theta^*(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}^*(t) \\ \dot{\psi}^*(t) \\ \dot{\theta}^*(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

и введя новые обобщенные координаты (отклонения) $x = q - r(t)$,

$$\begin{cases} \varphi = x_1 + \varphi^* \\ \psi = x_2 + \psi^* \\ \theta = x_3 + \theta^* \end{cases},$$

вычислим в переменных x , \dot{x} кинетическую энергию

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} A_1 ((\dot{x}_3 + \dot{\theta}^*) \cos(x_1 + \varphi^*) + (\dot{x}_2 + \dot{\psi}^*) \sin(x_3 + \theta^*) \sin(x_1 + \varphi^*))^2 + \frac{1}{2} B_1 (-\dot{x}_3 + \dot{\theta}^*) \sin(x_1 + \varphi^*) + \\ &+ (\dot{x}_2 + \dot{\psi}^*) \cos(x_1 + \varphi^*) \sin(x_3 + \theta^*)^2 + \frac{1}{2} C_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \cos(x_3 + \theta^*) + \dot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* \cos(x_3 + \theta^*))^2, \end{aligned}$$

координаты векторов M , M' , M''

$$M_1 = -\frac{1}{2}\dot{x}_3^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\dot{x}_3^2 \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \dot{x}_3 \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right),$$



$$\begin{aligned}
 M_2 &= \dot{x}_3^2 \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot{x}_2 \dot{x}_1 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{x}_1 \dot{x}_3 \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_2 \dot{x}_3 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3}, \\
 M_3 &= -\frac{1}{2} \dot{x}_2^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot{x}_3 \dot{x}_1 \left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_1 \dot{x}_3 \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1}, \\
 M'_1 &= -\dot{x}_2 \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \dot{x}_3 \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \dot{\theta}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_3 \dot{\psi}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right), \\
 M'_2 &= \dot{x}_1 \left(\dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_2 \left(\dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} \right) + \\
 &\quad + \dot{x}_3 \left(2\dot{\theta}^* \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot{\varphi}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right), \\
 M'_3 &= \dot{x}_2 \left(-\dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot{\varphi}^* \left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_1 \left(\dot{\theta}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{\psi}^* \left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_3 \dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1}, \\
 M''_1 &= -\frac{1}{2} (\dot{\psi}^*)^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (\dot{\theta}^*)^2 \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \dot{\psi}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right), \\
 M''_2 &= (\dot{\theta}^*)^2 \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \dot{\varphi}^* \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{\theta}^* \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_3}, \\
 M''_3 &= -\frac{1}{2} (\dot{\psi}^*)^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\psi}^* \dot{\varphi}^* \left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{\theta}^* \dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1},
 \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} = -C_1 \sin(\theta^* + x_3), \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} = 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3),$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} = (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3),$$

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} = 2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*), \quad \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} = G \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_3 + \theta^*), \quad \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} = -G \sin 2(\varphi^* + x_1),$$

и обобщенные внешние силы, действующие на систему

$$Q_1^e = 0,$$

$$Q_2^e = -am\ddot{\xi} \cos(\psi^* + x_2) \sin(\theta^* + x_3) - am\dot{\eta} \sin(\psi^* + x_2) \sin(\theta^* + x_2),$$

$$Q_3^e = -am\ddot{\zeta} \sin(\psi^* + x_2) \cos(\theta^* + x_3) + am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_3) \cos(\psi^* + x_2) + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_3).$$

Тогда, учитывая (9), управление $Q^c = Q^p + Q^s$ с компонентами

$$\begin{aligned}
 Q_1^c &= -c_{11}x_1 - d_{11}\dot{x}_1 + C_1\ddot{\varphi}^* + \ddot{\psi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_3) - \left(\dot{\psi}^* \right)^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3) - \\
 &\quad - \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_3) + C_1 \sin(\theta^* + x_3)) + (\dot{\theta}^*)^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2^c &= -c_{22}x_2 - d_{22}\dot{x}_2 + \ddot{\varphi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_3) + \ddot{\psi}^* ((A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1)) \sin^2(\theta^* + x_3) + \\
 &\quad + C_1 \cos^2(\theta^* + x_3)) + \ddot{\theta}^* G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3) + \\
 &\quad + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_3) - C_1 \sin(\theta^* + x_3)) + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + \\
 &\quad + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3) + (\dot{\theta}^*)^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_3 + \theta^*) + \\
 &\quad + am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_2) \cos(\theta^* + x_3) - am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_3) \cos(\psi^* + x_2) - a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3^c &= -c_{33}x_3 - d_{33}\dot{x}_3 + \ddot{\psi}^* G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + \ddot{\theta}^* (A_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \sin^2(\varphi^* + x_1)) + \\
 &\quad + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + C_1 \sin(x_3 + \theta^*)) + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) - \\
 &\quad - (\dot{\psi}^*)^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_2) \cos(\theta^* + x_3) - \\
 &\quad - am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_3) \cos(\psi^* + x_2) - a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_3)
 \end{aligned}$$



реализует асимптотически устойчивое программное движение (11), и при этом уравнения (10) движения в отклонениях имеют вид

$$\begin{aligned}
 & C_1 \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 C_1 \cos(\theta^* + x_3) - \dot{x}_2^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3) - \dot{x}_2 \dot{x}_3 (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_3) + \\
 & \quad + C_1 \sin(\theta^* + x_3)) + \dot{x}_3^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) - \dot{x}_2 (\dot{\theta}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) + C_1) \sin(\theta^* + x_3) + \\
 & \quad + \dot{\psi}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3)) - \dot{x}_3 (\dot{\psi}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_3) + C_1 \sin(\theta^* + x_3)) + \\
 & \quad + \dot{\theta}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1)) + c_{11} x_1 + d_{11} \dot{x}_1 = 0, \\
 & \ddot{x}_1 C_1 \cos(\theta^* + x_3) + \ddot{x}_2 ((A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1)) \sin^2(\theta^* + x_3) + C_1 \cos^2(\theta^* + x_3)) + \\
 & \quad + \ddot{x}_3 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + \dot{x}_1 \dot{x}_2 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(x_3 + \theta^*) + \\
 & \quad + \dot{x}_1 \dot{x}_3 (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_3) - C_1 \sin(\theta^* + x_3)) + \dot{x}_2 \dot{x}_3 ((A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + \\
 & \quad + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3) + \dot{x}_3^2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_3 + \theta^*) + \\
 & \quad + \dot{x}_1 (\dot{\theta}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin(\theta^* + x_3) + \dot{\psi}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3)) + \\
 & \quad + \dot{x}_2 (\dot{\theta}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3) + \dot{\varphi}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_3)) + \\
 & \quad + \dot{x}_3 (\dot{\theta}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(\theta^* + x_3) + \dot{\varphi}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin(\theta^* + x_3) + \\
 & \quad + \dot{\psi}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3)) + c_{22} x_2 + d_{22} \dot{x}_2 = 0, \\
 & \ddot{x}_2 G \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_3 + \theta^*) + \ddot{x}_3 (A_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \sin^2(\varphi^* + x_1)) + \\
 & \quad + \dot{x}_1 \dot{x}_2 \sin(x_3 + \theta^*) (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) + C_1) - \dot{x}_1 \dot{x}_3 2G \sin(\varphi^* + x_1) - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(x_3 + \theta^*) + \\
 & \quad + \dot{x}_1 (\dot{\psi}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) + C_1) \sin(x_3 + \theta^*) - \dot{\theta}^* 2G \sin 2(\varphi^* + x_1)) + \\
 & \quad + \dot{x}_2 (\dot{\varphi}^* (2G \cos 2(\varphi^* + x_1) + C_1) \sin(x_3 + \theta^*) - \dot{\psi}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + \\
 & \quad + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_3)) - \dot{x}_3 \dot{\varphi}^* 2G \sin(\varphi^* + x_1) + c_{33} x_3 + d_{33} \dot{x}_3 = 0.
 \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации численно проинтегрируем и представим графики величин x, \dot{x} для следующего примера. Пусть твердое тело — маятник (рис. 1) в виде однородного диска радиуса

$r = 0,1$ м, массы $m = 1$ кг на невесомом стержне длины $l = 1$ м. Конец стержня O шарнирно закреплен на подвижной платформе. Платформа движется по закону

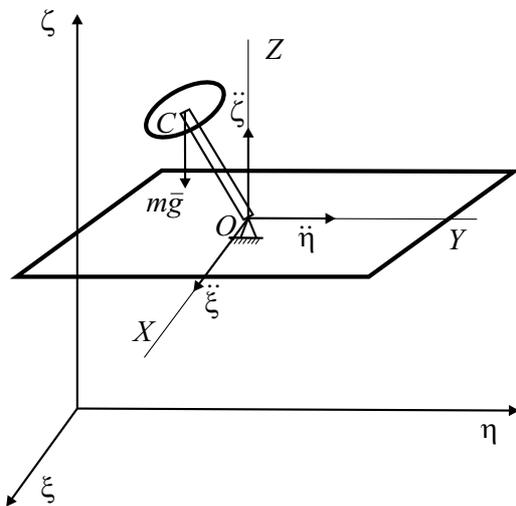


Рис. 1. Система

$$\begin{cases} \xi = \cos(t) \\ \eta = \sin(t) \\ \zeta = 5t^2 \end{cases} .$$

В качестве программного движения зададим равномерное вращение оси маятника вокруг вертикали с постоянным углом наклона:

$$\begin{cases} \varphi^*(t) = 20t \\ \psi^*(t) = 0 \\ \theta^*(t) = \pi/6 \end{cases} .$$

Матрицы C и D — единичные матрицы.



На рис. 2–4 изображены зависимости отклонений x_1, x_2, x_3 от времени при следующих начальных условиях: $x_1(0) = 0.01, \dot{x}_1(0) = 0.02, x_2(0) = 0.05, \dot{x}_2(0) = 0.03, x_3(0) = 0.05, \dot{x}_3(0) = 0.01$.

На рис. 5–7 изображены зависимости скоростей отклонений $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ от времени при тех же начальных условиях.

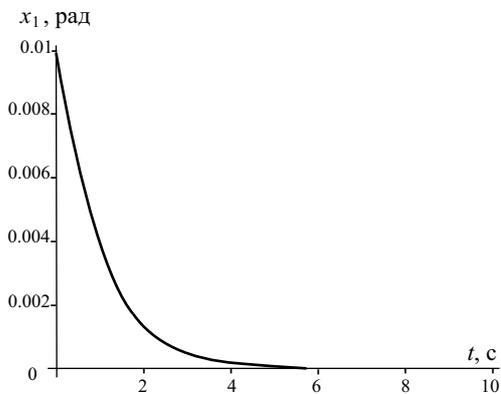


Рис. 2. График поведения отклонения $x_1(t)$

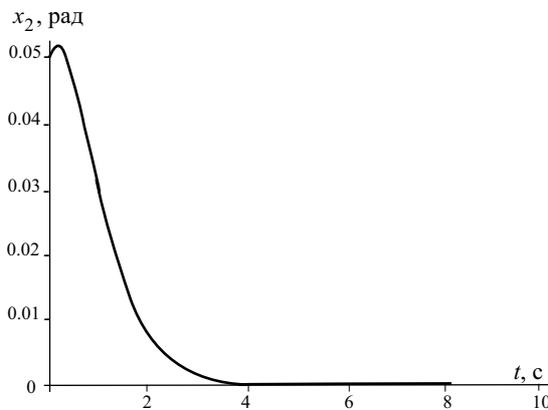


Рис. 3. График поведения отклонения $x_2(t)$

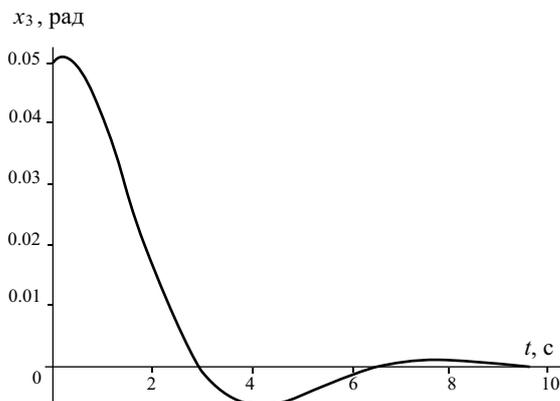


Рис. 4. График поведения отклонения $x_3(t)$

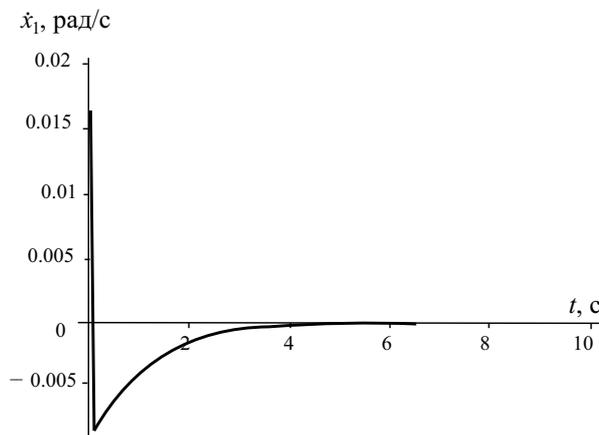


Рис. 5. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_1(t)$

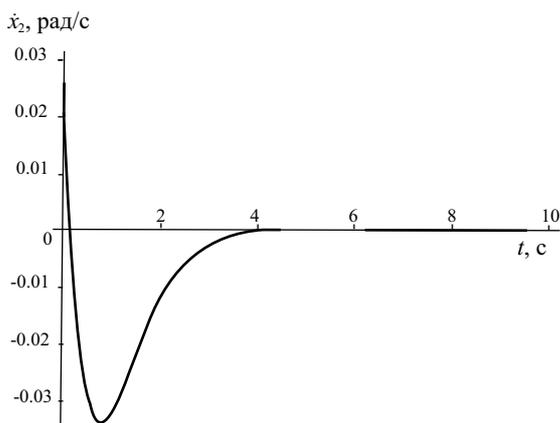


Рис. 6. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_2(t)$

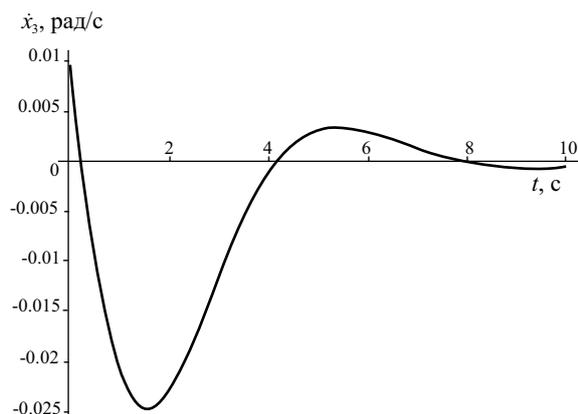


Рис. 7. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_3(t)$

Библиографический список

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.



3. *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
4. *Пуш Н., Абетс Р., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 301 с.
5. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. P. 216–223.
6. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной си-

- стемы // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 225–232.
7. *Смирнов Е.Я., Павликов И.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 347 с.
8. *Bezglasnyi S.P.* The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. V. 14, № 1–2. P. 251–266.

УДК 531.38, 575

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

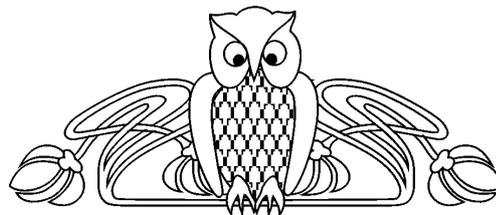
А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко

Таганрогский государственный педагогический институт,
кафедра математического анализа,
E-mail: stab@tgpi.org.ru, dmitrytim@yandex.ru

Осуществлена редукция от трёхмерной задачи несимметричной теории упругости к одномерной посредством расщепления трёхмерной задачи на совокупность двумерной и одномерной задач. Указаны кинематические параметры, которые нужно привлечь, чтобы вместе с системой дифференциальных уравнений Кирхгофа получить замкнутую систему уравнений одномерной микрополярной теории стержней. Остальные геометрические величины найдены из определяющих их соотношений. Получены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в замыкающих соотношениях. Оценён вклад в эти соотношения, который привносит учёт моментных напряжений. Для одномерной теории указано общее решение при наличии жесткостной симметрии.

Ключевые слова: упругий стержень, несимметричная теория упругости, редукция, замыкающие соотношения, моментные напряжения.

Развитие механики сплошной среды тесно связано с появлением обобщенных математических моделей, рассматривающих частицу материала не как материальную точку, а как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру материала. Классическая теория упругости описывает свойства тел, у которых между частицами действуют центральные силы. Эта теория не всеобъемлющая: она, в частности, не в состоянии корректно описать закономерности распространения коротких акустических волн, в особенности в жидких кристаллах, и (в некоторых случаях) законы пьезоэлектрических явлений, а также аномалии динамической упругости пластинок и тонких тел [1, 2]. В связи с этим в работах [1–5] была разработана теория упругости сплошных сред, учитывающая моментное (вращательное) взаимодействие частиц — моментная теория упругости. В значительной степени выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды в данном направлении явилась работа братьев Коссера [3], в которой описана модель, впоследствии получившая название континуума Коссера, или микрополярной среды. В рамках этой модели каждая «микрочастица», образующая тело, представляет собой абсолютно твердое тело. Другими словами, учитывается не только изменение центров тяжести «микрочастиц», но и их ориентации. Поскольку частицы вещества представляют собой не точки, а пространственные образования, расположенные на расстояниях, сравнимых с их размерами, действие одной частицы на другую определяется целой системой сил и моментов. Известно, что даже система одних сил в общем случае не может быть сведена к одной лишь равнодействующей, необходимо введение ещё и результирующего момента [1].



The One-Dimensional Micropolar Theory of Elastic Rods Basic Parities Construction

A.A. Ilyukhin, D.V. Timoshenko

The reduction from a three-dimensional problem of the asymmetrical theory of elasticity to one-dimensional by means of splitting a three-dimensional problem on set of two-dimensional and one-dimensional problems is carried out. Kinematic parameters with which it is necessary to involve are specified that together with system Kirchoff differential equations to receive the closed system of the equations of the one-dimensional micropolar theory of cores. Other geometrical sizes are found from parities defining them. Conditions with which should satisfy factors in closing parities are received. The contribution to these parities which introduces the account moment pressure is estimated. For the one-dimensional theory the common decision at presence stiffness is specified to symmetry.

Key words: elastic rod, asymmetrical theory of elasticity, reduction, closing parities, moment pressures.