НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ РУКИ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

С. П. Безгласный[1], Е. С. Батина[2], А. С. Воробьёв[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, bezglasnsp@rambler.ru

[2]Студентка кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, katja4-2@mail.ru

[3]Инженер-конструктор, Государственный научно производственный ракетно-космический центр «ЦСКБ-Прогресс», Самара, svirex.hide@gmail.com

Работа посвящена проблеме синтеза активных управлений, решающих обратную задачу динамики о построении программных движений неавтономных механических систем. Актуальность исследований определена необходимостью в приборостроении математического конструирования систем управления автоматических механизмов, в частности — различных многозвенных аппаратов и роботов-манипуляторов. В работе решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных программных движений модели руки робота-манипулятора, моделируемой механической системой с тремя степенями свободы. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными. Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления механизмами в робототехнике и приборостроении.

Ключевые слова: программные движения, стабилизирующее управление, метод функции Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях системы являются актуальными, привлекают внимание многих исследователей в связи с бурным развитием робототехники и расширением сфер применения роботизированных систем и рассматриваются авторами во многих работах, например [1–5].

В данной работе ставится и решается задача об определении управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения модели руки робота-манипулятора. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [6]. Метод предельных систем [7] и его модификация [8] позволяют при использовании функции Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение механической системы с тремя степенями свободы, моделирующей руку робота-манипулятора. Эта система представляет собой два цилиндра, вставленных один в другой, и некое тело (кисть, штапм) на конце выдвигаемого цилиндра. Параметры первого цилиндра: длина l_1, внешний радиус R, внутренний радиус r, масса m_1; второго цилиндра: длина l_2, радиус r, масса m_2. Тело на конце второго цилиндра имеет массу m_3 и тензор инерции $J_3 = \mathrm{diag}\,(A_3, B_3, C_3)$. $Oxyz$ — жестко связанная с первым цилиндром система координат, в точке O двустепенной шарнир, позволяющий манипулятору вращаться вокруг вертикали и поворачиваться вокруг горизонтали, совпадающей с осью Oy (рис. 1). Движение описывается тремя переменными: углом φ вращения вокруг вертикальной оси, углом ψ отклонения от вертикали и длиной x выдвижения второго цилиндра относительно первого.

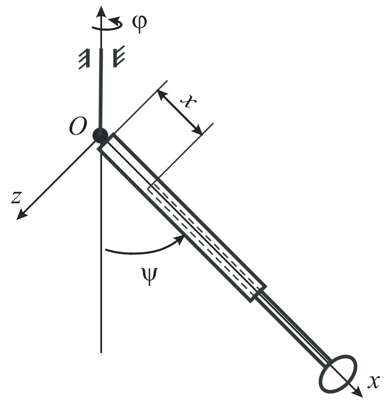


Рис. 1. Система

Закон движения имеет вид

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t), \\ \psi = \psi(t), \\ x = x(t). \end{cases}$$

Поставим задачу о реализации управляющими силами произвольных заданных (программных движений) и о стабилизации этих движений.

Программным (желаемым) движением механической системы назовем ограниченную, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $r(t) = (\varphi^*(t), \psi^*(t), x^*(t))^T$, описывающую некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения для рассматриваемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода в связанной системе координат $Oxyz$. Выберем вектор обобщенных координат $q = (\varphi, \psi, x)^T$, запишем кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{48}(24(m_2+m_3)\dot{x}^2 + ((3(r^2+R^2)(3+\cos(2\psi)) + 8\sin(\psi)^2 l_1^2)m_1 + 24(A_3\cos(\psi)^2 +$$
$$+C_3\sin(\psi)^2 + \sin(\psi)^2 l_2^2 m_3 + 2\sin(\psi)^2 l_2 m_3 x + \sin(\psi)^2 m_3 x^2) + m_2(8\sin(\psi)^2 l_2^2 +$$
$$+24\sin(\psi)^2 l_2 x + 3(r^2(3+\cos(2\psi)) + 8\sin(\psi)^2 x^2)))\dot{\varphi}^2 + 2((3(r^2+R^2) + 4l_1^2)m_1 +$$
$$+m_2(3r^2 + 4l_2^2 + 12 l_2 x + 12x^2) + 12(B_3 + l_2^2 m_3 + 2 l_2 m_3 x + m_3 x^2))\dot{\psi}^2) = T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}.$$

Квадратичная по скоростям форма T_2 определяется симметричной положительно определенной ограниченной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$a_{11} = \frac{1}{24}((3(r^2+R^2)(3+\cos(2\psi)) + 8\sin(\psi)^2 l_1^2)m_1 + 24(A_3\cos(\psi)^2 + C_3\sin(\psi)^2 + \sin(\psi)^2 l_2^2 m_3 +$$
$$+2\sin(\psi)^2 l_2 m_3 x + \sin(\psi)^2 m_3 x^2) + m_2(8\sin(\psi)^2 l_2^2 + 24\sin(\psi)^2 l_2 x + 3(r^2(3+\cos(2\psi)) + 8\sin(\psi)^2 x^2))),$$
$$a_{22} = \frac{1}{12}((3(r^2+R^2) + 4l_1^2)m_1 + m_2(3r^2 + 4l_2^2 + 12 l_2 x + 12x^2) + 12(B_3 + l_2^2 m_3 + 2 l_2 m_3 x + m_3 x^2)),$$
$$a_{33} = m_2 + m_3, \qquad a_{ij} = 0, \qquad i \neq j.$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

можно переписать в виде

$$A\ddot{q} + M = Q_{\text{вн}} + Q_u, \tag{1}$$

где через $M = M(q, \dot{q})$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot{q}^T \frac{\partial A_i}{\partial q}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q} \qquad (i = \overline{1,3}).$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (i = \overline{1,3}). \tag{2}$$

Вектор обобщенных сил $Q = Q_{\text{вн}} + Q_u$ представляет собой сумму внешних сил $Q_{\text{вн}}$, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q_u, определяемых в дальнейшем.

В общем случае функция $r(t)$, описывающая программное движение тела, может не являться решением системы (1). Поэтому реализацию программных движений будем рассматривать как задачу о двухуровневом управлении, разделив управляющие воздействия на две группы:

$$Q_u = Q_{\text{пр}} + Q_{\text{ст}},$$

где $Q_{\text{пр}}$ — силы, реализующие программное движение, $Q_{\text{ст}}$ — стабилизирующие его.

2. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $(r(t), \dot{r}(t))$. Прямой подстановкой функции $r(t)$ в уравнение (1) определим управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_{\text{пр}} = A(r)\ddot{r} + M(r, \dot{r}) - Q_{\text{вн}}(t, r, \dot{r}), \tag{3}$$

где координаты вектора $M = M(r, \dot{r})$ вычисляются по формулам, получающимся из формул (2) заменой q и $\dot{q}$ на r и $\dot{r}$ соответственно.

Сведем решение задачи о стабилизации программнх движенией к задаче о стабилизации решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит, как и в [9], применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты [8], разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения раковесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^T A(x+r)\dot{x} + \dot{r}^T A(x+r)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^T A(x+r)\dot{r}.$$

Вычислив производные

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r},$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r},$$

получим уравнения движения в отклонениях:

$$A\ddot{x} + M + M' + M'' + A\ddot{r} = Q_{\text{вн}} + Q_u, \tag{4}$$

где $Q_{\text{вн}} = Q_{\text{вн}}(t, r+x, \dot{r}+\dot{x})$, $M = M(x, \dot{x})$ обозначает вектор-столбец, компоненты которого M_i определены равенствами:

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j \qquad (i = \overline{1,3}),$$

M' — вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j \qquad (i = \overline{1,3}),$$

M'' — вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j \qquad (i = \overline{1,3}).$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C — неисчезающая ограниченная диагональная матрица, удовлетворяющая условиям

$$c_0E \le C = \text{const} \le c_1E \qquad (0 < c_0 < c_1 \text{ — const}), \tag{5}$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную, допускающую бесконечно малый высший предел функцию Ляпунова:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^TCx + \frac{1}{2}\dot{x}^TA\dot{x}. \tag{6}$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)^T\ddot{x} = \dot{x}^TCx + \dot{x}^TA\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x},$$

и в силу системы (4) получим:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^TCx + \dot{x}^T\left(-M - M' - M'' - A\ddot{r} + Q_{\text{вн}} + Q_u\right) + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x}.$$

Обозначим

$$-\dot{x}^TM + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^TN,$$

где символ N — вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j \qquad (i = \overline{1,3}).$$

Учитывая, что

$$M' = \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x},$$

перепишем полученное выражение для производной следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} + \dot{x}^T\left(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x^T}\right)\dot{x} + \dot{x}^T(Cx - M'' - A\ddot{r} + Q_{\text{вн}} + Q_u) + \frac{1}{2}\dot{x}^TN.$$

Пусть существует положительно определенная матрица D такая, что выполняется условие

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} - \dot{r}\frac{\partial A}{\partial x} + L + D\right) \ge d_0E \qquad (d_0 > 0 \text{ — const}), \tag{7}$$

где L — матрица, задающая квадратичную форму $\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\right)\dot{r}$, т. е. матрица с элементами $\{l_{ik}\}$, вычисляемая через элементы матрицы A по правилу

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_j \qquad (i, k = \overline{1,3}).$$

Выберем стабилизирующее управление согласно равенству

$$Q_{\text{ст}} = -Cx - D\dot{x} + M'' + A\ddot{r} - Q_{\text{вн}} - Q_{\text{пр}}. \tag{8}$$

При управлении (8) полная производная от функции (6) по времени в силу системы (4) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} - \dot{r}\frac{\partial A}{\partial x} + L + D\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^TN, \tag{9}$$

где последнее слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей $\dot{x}$. При управлении (8) и малых скоростях (т. е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) производная (9) согласно условию (7) будет иметь оценку

$$\frac{dV}{dt} \simeq -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r} \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \dot{x} \le -d_0 ||\dot{x}||^2 \le 0$$

и тем самым будет определенно отрицательной по скоростям функцией. Пусть вектор-функции M и M' удовлетворяют условию Липшица равномерно по x относительно t, и предельная система существует, имеет аналогичный вид, и множество $\{\dot{x} = 0\}$ не содержит решений предельной системы, кроме $x = \dot{x} = 0$. Тогда на основе теоремы из [8] об асимптотической устойчивость нулевого решения неавтономной системы можно сделать вывод, что управление (8) при выполнении условия (7) решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (4). При этом устойчивость равномерная асимтотическая.

4. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть движение происходит в поле силы тяжести без внешних возмущающих воздействий, т. е.

$$Q^1_{\text{вн}} = 0, \quad Q^2_{\text{вн}} = \frac{1}{2} l_1 m_1 \sin\psi + g m_2 (\frac{l_2}{2} + x) \sin\psi + g m_3 (l_2 + x) \sin\psi, \quad Q^3_{\text{вн}} = -g m_2 \cos\psi - g m_3 \cos\psi.$$

Для программного движения $r(t) = (\varphi^*(t), \psi^*(t), x^*(t))^T$ и отклонений $\varphi = x_1 + \varphi^*$, $\psi = x_2 + \psi^*$, $x = x_3 + x^*$ согласно (7) имеем, что управление $Q_u = Q_{\text{пр}} + Q_{\text{ст}}$ с компонентами $Q_u = (Q^1_u, Q^2_u, Q^3_u)$ (явный вид опущен ввиду громоздкости) реализует и стабилизирует выбранное программное движение.

В качестве иллюстрации численно проинтегрируем и представим графики величин x_i, $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ для системы. Зададим параметры системы: $l_1 = 0.5\,$м, $R = 0.1\,$м, $r = 0.09$, $m_1 = 0.5\,$кг, $l_2 = 0.5\,$м, $m_2 = 0.15\,$кг, $m_3 = 0.2\,$кг, $A_3 = 1\,$кг$\cdot$м^2, $B_3 = 1\,$кг$\cdot$м^2, $C_3 = 4\,$кг$\cdot$м^2.

В качестве программного движения зададим равномерное вращение вокруг вертикальной оси первого цилиндра с постоянным углом наклона и выдвигающимся по периодическому закону вторым цилиндром:

$$\begin{cases} \varphi^*(t) = t, \\ \psi^*(t) = \pi/2, \\ x^*(t) = \dfrac{l_1}{2} + \dfrac{l_2}{4} \cos t. \end{cases}$$

Для матриц C и D выбраны $c_{ii} = d_{ii} = 35$, $i = 1, 2, 3$.

На рис. 2, *а–в* изображены зависимости отклонений x_1, x_2, x_3 от времени при следующих начальных условиях: $x_1(0) = 0.2$, $\dot{x}_1(0) = 0.01$, $x_2(0) = 0.04$, $\dot{x}_2(0) = 0.02$, $x_3(0) = 0.1$, $\dot{x}_3(0) = 0.03$.

На рис. 2, *г–е* изображены зависимости величин $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ от времени при тех же начальных условиях.

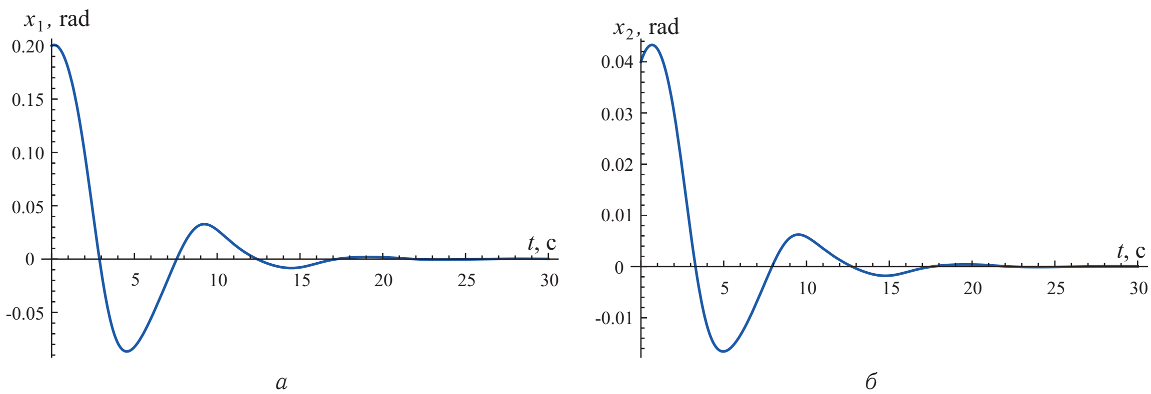
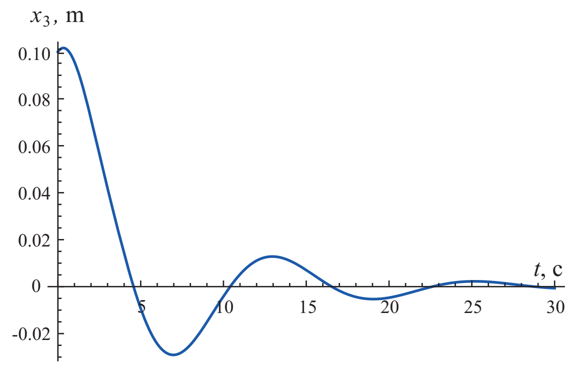
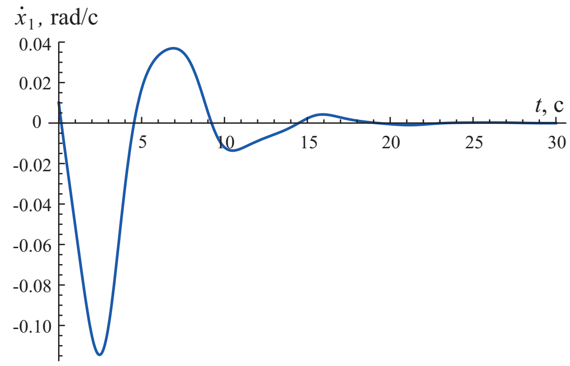


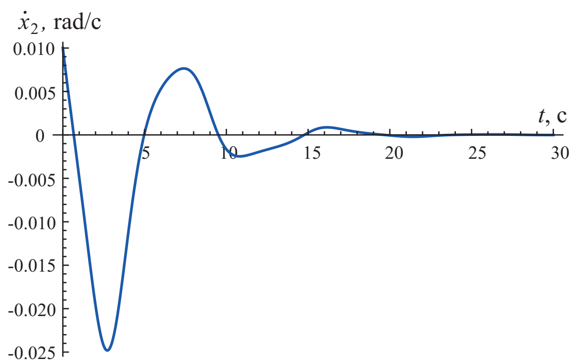
Рис. 2. Графики поведения отклонений $x_1(t)$ (*а*), $x_2(t)$ (*б*)



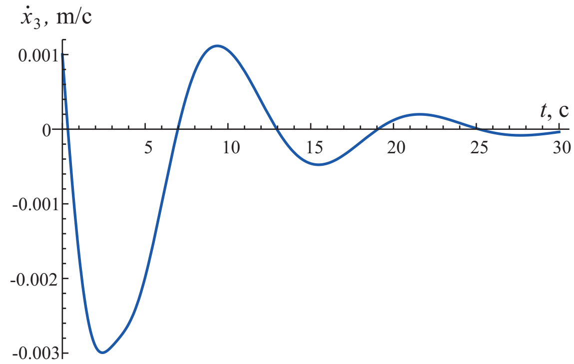
в



г



д



е

Рис. 2. Окончание. Графики поведения отклонения $x_3(t)$ (*в*) и скоростей отклонений $\dot{x}_1(t)$ (*г*), $\dot{x}_2(t)$ (*д*), $\dot{x}_3(t)$ (*е*)

Поведение решений иллюстрирует асимптотическую устойчивость реализованного движения.

В работе синтезированы произвольные асимптотически устойчивые программные движения модели руки робота-манипулятора с помощью активного двухуровневого управления. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Итоги работы развивают соответствующие результаты из [5, 9, 10].

Библиографический список

1. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М. : Высш. шк., 1989. 447 с.

2. *Летов А. М.* Динамика полета и управления. М. : Наука, 1969. 359 с.

3. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения. М. : Наука, 1971. 352 с.

4. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л. : Судостроение, 1980. 375 с.

5. *Смирнов Е. Я., Павликов И. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В.* Управление движением механических систем. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. 347 с.

6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М. : Мир, 1980. 301 с.

7. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216–223.

8. *Андреев А. С* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 225–232.

9. *Bezglasnyi S. P.* The stabilization of program motions of controlled nolinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. Vol. 14, № 1–2. P. 251–266.

10. *Безгласный С. П., Мысина О. А.* Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 44–52.

Synthesis of Asymptotically Stable Motion of a Robot Arm Manipulator

S. P. Bezglasnyi[1], E. S. Batina[1], A. S. Vorobyov[2]

[1]S. P. Korolyov Samara State Aerospace University, Russia, 443086, Samara, Moskovskoe sh., 34 bezglasnsp@rambler.ru, katja4-2@mail.ru

[2]State Research and Production Space-Rocket Center «TsSKB-Progress», Russia, 443009, Samara, Zemets str., 18, svirex.hide@gmail.com

The paper is about an active control problem. It solves the inverse problem of dynamics and concerns with construction of program motions of non-autonomous mechanical systems. This study is important and necessary in software design of automated systems for control of mechanisms. In particular, it is used in various modeling problems of robot-manipulators. Here, we construct all possible asymptotically stable program motions for a model of robots arm-manipulator, which is simulated by a mechanical system with three degrees of freedom. The control force is obtained in the form of closed form solution in the class of continuous functions. The stabilization problem is solved by the direct Lyapunov's method with the use of limiting functions and systems. In this case, we are able to restrict ourselves to Lyapunov's functions having constant sign derivatives. Our results are a valuable contribution to development of control mechanisms in robotics and engineering.

Key words: programm motion, stabilizing control, the method of Lyapunov's functions.

References

1. Afanasyev V. N., Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. *Matematicheskaia teoriia konstruirovaniia sistem upravleniia* [The mathematical theory of design of control systems]. Moscow, Vyssh. shk., 1989, 447 p. (in Russian).
2. Letov A. M. *Dinamika poleta i upravleniia* [Flight Dynamics and Control]. Moscow, Nauka, 1969, 359 p. (in Russian).
3. Galiullin A. S., Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G., Furasov V. D. *Postroenie sistem programmnogo dvizheniia* [Building Systems software movement]. Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
4. Zubov V. I. *Problema ustoichivosti protsessov upravleniia* [Stability problem management processes]. Leningrad, Shipbuilding, 1980, 375 p. (in Russian).
5. Smirnov E. Y., Pavlikov I. J., Shcherbakov P. P., Jurkov A. V. *Upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh sistem* [Motion control of mechanical systems]. Leningrad, Leningrad State University, 1985. 347 p. (in Russian).
6. Rush N., Abets P., Laloy M. *Priamoi metod Liapunova v teorii ustoichivost* [Direct method of Lyapunov stability theory]. Moscow, Mir, 1980, 301 p. (in Russian).
7. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations. *J. Differ. Equat.*, 1977, vol. 23, pp. 216–223.
8. Andreev A. S. The asymptotic stability and instability of the zeroth solution of a non- autonomous system. *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 2, pp. 225–232. (in Russian)
9. Bezglasnyi S. P. The stabilization of program motions of controlled nolinear mechanical systems. *Korean J. Comput. and Appl. Math.*, 2004, vol. 14, no. 1–2, pp. 251–266.
10. Bezglasnyi S. P., Mysina O. A. Stabilization of program motions of a rigid body on a moving platform. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 44–52 (in Russian).

УДК 539.3+612.311

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ ОРТОДОНТИЧЕСКОГО АППАРАТА НА РАСШИРЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ЧЕЛЮСТИ

С. М. Босяков[1], А. Н. Доста[2], А. В. Винокурова[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет, Минск, bosiakov@bsu.by

[2]Кандидат медицинских наук, доцент кафедры ортопедической стоматологии, Белорусский государственный медицинский университет, Минск, dostastom75@mail.ru

[3] Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет, Минск, janeraven@mail.ru

В работе представлены результаты конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния верхнечелюстного комплекса человека, возникающего при активации ортодонтического аппарата HYRAX. Модели черепа и опорных зубов верхнего зубного ряда получены на основании томографических данных для сухого интактного черепа взрослого человека. Конструкции ортодонтического аппарата отличаются расположением винта и стержней относительно неба. Определены эквивалентные напряжения и перемещения костей верхней челюсти и опорных зубов. Показано, что при расположении стержней и винта ортодонтического аппарата в горизонтальной плоскости в верхнечелюстном комплексе