УДК 517.51

СОХРАНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СИМПЛЕКСА ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

А. В. Болучевская

Волгоградский государственный университет
E-mail: a.v.boluch@gmail.com

Статья посвящена проблеме сохранения ориентации симплекса при квазиизометричном отображении в $\mathbb{R}^n$. Данная проблема возникает в задачах построения расчетных сеток с помощью отображений различных классов. Найдены условия на отображение, обеспечивающие сохранение ориентации.

Ключевые слова: симплекс, ориентация, квазиизометричное отображение, триангуляция.

On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation

A. V. Boluchevskaya

The paper concerns simplex orientation preserving under the quasiisometric mapping. This problem arises from the problem of mesh generation using different kinds of mappings. We find the conditions for the quasiisometric mapping to be simplex orientation preserving.

Key words: simplex, orientation, quasiisometric mapping, triangulation.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При численном решении различных задач существует множество способов построения расчетных сеток. Один из таких способов — отображение некоторой стандартной сетки на заданную область. Однако при этом важно контролировать искажение исходных ячеек, чтобы не допустить их вырождения при отображении. Этот вопрос исследуется, например, в работах [1–7].

Для частного случая нерегулярных сеток — триангуляций — в [5–7] показано, что одним из наиболее важных условий сохранения триангуляции является сохранение ориентации каждого симплекса. В [6, 7] найдены условия на отображения некоторых классов, обеспечивающие сохранение ориентации треугольника на плоскости. Кроме того, в [7] поставлена задача нахождения аналогичных условий для сохранения ориентации симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решению этой задачи для квазиизометричных отображений посвящена данная статья.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть задана область $D \subset \mathbb{R}^n$ и ориентированный симплекс $S \Subset D$, образованный точками $P_0, P_1, P_2, \dots P_n \in D$.

Для набора векторов $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ введем обозначение

$$\det(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})$, $i = 1, \dots, n$.

Будем говорить, что симплекс S имеет положительную ориентацию, если точки $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ заданы так, что

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0) > 0,$$

и отрицательную ориентацию, когда

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0) < 0.$$

Пусть отображение $f\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо п. в. и квазиизометрично [7], т. е. существуют такие положительные L, l, $l \le L$, что для любых $x, y \in D$ выполнено

$$l|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Пусть f дифференцируемо в точке P_0. Через $J_f(P_0)$ обозначим якобиан f в этой точке, через $\omega(t)$ — модуль непрерывности [8] дифференциала f, d_m — длина максимальной стороны симплекса S и $g(\tau) = \dfrac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega(t)\, dt$, $\tau > 0$. Тогда выполнена следующая теорема.

Теорема. *Если якобиан отображения f в точке p_0 симплекса S удовлетворяет неравенству*

$$J_f(P_0) > \frac{L^n}{Vn!}\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^{n}|P_i - P_0|,$$

где V — объем симплекса S, то симплекс S' с вершинами $P_0' = f(P_0)$, $P_1' = f(P_1)$, …, $P_n' = f(P_n)$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

Доказательство. Предположим, что симплекс S имеет положительную ориентацию.

Величина $\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0)$ равна увеличенному в $n!$ раз ориентированному объему симплекса, натянутого на векторы $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0$. Следовательно, если V — объем симплекса S, то в силу его положительной ориентации получим:

$$n! \cdot V = \det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0).$$

Пусть V' обозначает ориентированный объем симплекса S'. Необходимо показать, что $V' > 0$.

Для вершин этого сиплекса имеем:

$$P_k' - P_0' = f(P_k) - f(P_0) = d_{P_0}f(P_k - P_0) + H(P_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $H(P_k) = f(P_k) - f(P_0) - d_{P_0}f(P_k - P_0)$, $d_{P_0}f$ — дифференциал f в точке P_0.

Тогда

$$\begin{gathered}
V' = \frac{1}{n!}\det\bigl(P_1' - P_0', P_2' - P_0', \ldots, P_n' - P_0'\bigr) = \\
= \frac{1}{n!}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1 - P_0), d_{P_0}f(P_2 - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_n - P_0)\bigr) + \frac{1}{n!}\det\bigl(H(P_1), \ldots, H(P_n)\bigr) + \\
+ \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1 - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1} - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_n - P_0)\bigr) + \\
+ \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1 - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1} - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_2-1} - P_0), H(P_{i_2}), d_{P_0}f(P_{i_2+1} - P_0), \ldots, \\
d_{P_0}f(P_n - P_0)\bigr) + \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-2}\sum_{i_2=i_1+1}^{n-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1 - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1} - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_2-1} - P_0), H(P_{i_2}), \\
d_{P_0}f(P_{i_2+1} - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_3-1} - P_0), H(P_{i_3}), d_{P_0}f(P_{i_3+1} - P_0), \ldots, \\
d_{P_0}f(P_n - P_0)\bigr) + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1 - P_0), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0), \\
H(P_{i_1}), \ldots, d_{P_0}f(P_{i_{n-1}-1} - P_0), H(P_{i_{n-1}}), \ldots, d_{P_0}f(P_n - P_0)\bigr).
\end{gathered}$$

Отсюда в силу неравенства Адамара [9] для определителей получим:

$$\begin{gathered}
V' \geq VJ_f(P_0) - \frac{1}{n!}|H(P_1)| \cdot \ldots \cdot |H(P_n)| - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n}|d_{P_0}f(P_1 - P_0)| \cdot \ldots \cdot |d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0)| \cdot |H(P_{i_1})| \times \\
\times |d_{P_0}f(P_{i_1+1} - P_0)| \cdot \ldots \cdot |d_{P_0}f(P_n - P_0)| - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}|d_{P_0}f(P_1 - P_0)| \cdot \ldots \cdot |d_{P_0}f(P_{i_1-1} - P_0)| \times \\
\times |H(P_{i_1})| \cdot |d_{P_0}f(P_{i_1+1} - P_0)| \cdot \ldots \cdot |d_{P_0}f(P_{i_2-1} - P_0)| \cdot |H(P_{i_2})| \cdot |d_{P_0}f(P_{i_2+1} - P_0)| \times \ldots \\
\times |d_{P_0}f(P_n - P_0)| - \ldots - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{2}\ldots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n}|d_{P_0}f(P_1 - P_0)| \cdot \ldots \cdot |H(P_{i_1})| \times \ldots \\
\times |H(P_{i_{n-1}})| \cdot \ldots \cdot |d_{P_0}f(P_n - P_0)|.
\end{gathered}$$

Из квазиизометричности f имеем:

$$|d_{P_0}f(P_i-P_0)| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(P_0+\varepsilon(P_i-P_0))-f(P_0)}{\varepsilon}\right| \le L|P_i-P_0|, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Кроме того, для всех $i=1,2,\ldots,n$ выполнено [6]

$$\frac{|H(P_i)|}{|P_i-P_0|} = \frac{|f(P_i)-f(P_0)-d_{P_0}f(P_i-P_0)|}{|P_i-P_0|} \le \frac{1}{|P_i-P_0|}\int\limits_0^{|P_i-P_0|}\omega(t)\,dt.$$

Ввиду монотонности функции $\omega(t)$:

$$\frac{|H(P_i)|}{|P_i-P_0|} \le g(d_m).$$

Используя полученные оценки, имеем:

$$V' \ge VJ_f(P_0) - \frac{1}{n!}g^n(d_m)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0| - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^n L^{n-1}g(d_m)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0| -$$
$$-\frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^n L^{n-2}g^2(d_m)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0| - \cdots -$$
$$-\frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n} Lg^{n-1}(d_m)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0| =$$
$$= VJ_f(P_0) - \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n|P_i-P_0|\left(L^{n-1}g(d_m)\frac{n}{1!} + L^{n-2}g^2(d_m)\frac{n(n-1)}{2!} + \right.$$
$$\left. + L^{n-3}g^3(d_m)\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + Lg^{n-1}(d_m)\frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!} + g^n(d_m)\right) =$$
$$= VJ_f(P_0) - \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n|P_i-P_0|\sum_{i=1}^n\frac{n!}{i!(n-i)!}L^{n-i}g^i(d_m).$$

Отсюда,

$$V' \ge VJ_f(P_0) - \frac{L^n}{n!}\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0|.$$

Из условия теоремы получаем, что $V'>0$. □

Замечание. Если величина $\dfrac{V}{\prod\limits_{i=1}^n|P_i-P_0|}$ — отграничена от нуля, $J_f(P_0)>0$, то при достаточно малых d_m выполнено

$$VJ_f(P_0) - \frac{L^n}{n!}\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^n|P_i-P_0| > 0,$$

поскольку $\left(\left(1+\dfrac{g(\tau)}{L}\right)^n - 1\right) \to 0$ при $\tau\to 0$.

Следствие. *Если для отображения f выполнено неравенство*

$$\frac{V}{\prod\limits_{i=1}^n|P_i-P_0|} \ge \frac{1}{n!}\left(\frac{L}{l}\right)^n\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right),$$

то симплекс S' имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

Доказательство. Заметим, что

$$\left|J_M^T(P_0)J_M(P_0)\right| = (J_f(P_0))^2 = \lambda_1(p_0)\cdot\ldots\cdot\lambda_n(p_0) \ge \lambda^n(p_0),$$

где $\lambda_1(p_0), \ldots, \lambda_n(p_0)$ — собственные числа оператора $J_M^T(P_0)J_M(P_0)$, $J_M(P_0)$ — матрица Якоби отображения f в точке p_0, $\lambda(p_0) = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \{\lambda_i(p_0)\}$.

Оценим $\lambda(p_0)$. Выберем $x \in S$ и построим ориентированную спрямляемую кривую $\gamma(s)$ с параметром s, $0 \le s \le M$, где M — длина кривой и $p_0 = \gamma(0), x = \gamma(M)$. Причем касательная к кривой в каждой точке коллинеарна собственному вектору с минимальным собственным значением оператора $J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))$.

В силу квазиизометричности f имеем:

$$l|x-p_0| \le |f(x)-f(p_0)| \le \int\limits_0^M \left|d_{\gamma(s)}f(\gamma'(s))\right| ds \le \left(\int\limits_0^M ds\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^M \left|d_{\gamma(s)}f(\gamma'(s))\right|^2 ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le M^{1/2}\left(\int\limits_0^M \langle J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle ds\right)^{1/2} = M^{1/2}\left(\int\limits_0^M \lambda(\gamma(s))|\gamma'(s)|^2 ds\right)^{1/2},$$

где $\lambda(\gamma(s))$ — минимальное из собственных чисел оператора $J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))$.

Отсюда,

$$l\frac{|x-p_0|}{M} \le \left(\frac{1}{M}\int\limits_0^M \lambda(\gamma(s))\,ds\right)^{1/2}.$$

Если $x \to p_0$, то $\dfrac{|x-p_0|}{M} \to 1$, и $l \le \lambda^{1/2}(p_0)$. Тогда $(J_f(P_0))^2 \ge l^{2n}$ и из теоремы

$$V' \ge Vl^n - \frac{L^n}{n!}\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^n |P_i - P_0|.$$

Отсюда получаем требуемое. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 11-01-97021-р_поволжье_а).

Библиографический список

1. *Азаренок Б. Н.* О построении подвижных адаптивных пространственных сеток. М. : Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2007. 50 с. [*Azarenok B. N.* On generation of dynamically adaptive spatial grids. Moscow, 2007. 50 p.]

2. *Миклюков В. М.* Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти-квазиконформные отображения. Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. 532 с. [*Miklukov V. M.* Geometric analysis. Differential forms, almost-solutions, almost-quasiconformal mappings. Volgograd, 2007. 532 p.]

3. *Ушакова О. В.* Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894. [*Ushakova O. V.* Nondegeneracy conditions for three-dimensional cells and a formula for the cell's volume // Comp. Math. and Math. Phys. 2001. Vol. 41, № 6. P. 832–845.]

4. *Бобылев Н. А., Иваненко С. А., Казунин А. В.* О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложения к теории сеток // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817. [*Bobylev N. A., Kazunin A. V., Ivanenko S. A.* Piecewise smooth homeomorphisms of bounded domains and their applications to the theory of grids // Comp. Math. and Math. Phys. 2003. Vol. 43, № 6. P. 772–781.]

5. *Прохорова М. В.* Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории сеток // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129. [*Prohorova M. V.* Homeomorphism problems arising in the grid theory // Trudy IMM UrO RAN. 2008. Vol. 14, № 1. P. 112–129]

6. *Клячин В. А.* О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». 2009. № 4. С. 169–182. [*Klyachin V. A.* On homeomorphisms preserving triangulation // Zapiski seminara «Sverhmedlennye processy». 2009. № 4. P. 169–182.]

7. *Миклюков В. М.* Введение в негладкий анализ. Волгоград : Изд-во ВолГУ, Лаб. «Сверхмедленные процессы», 2008. [*Miklukov V. M.* Introduction to non-smooth analysis. Volgograd, 2008. 424 p.]

8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. М. : Дрофа, 2004. 720 с. [*Kudryavcev L. D.* Mathematical analysis. Vol. 2. Moscow : Drofa, 2004. 720 p.]

9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 576 с. [*Gantmacher F. R.* The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing : Reprinted by Amer. Math. Soc., 2000. 660 p.]