## Semisimple Graded Rings

**I. N. Balaba, E. N. Krasnova**

Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina pr., 125, ibalaba@mail.ru, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

The graded version of Wedderburn–Artin theorem is obtained. It gives description of semisimple $G$-graded ring for arbitrary group $G$. Homological classification of graded semisimple rings is given.

*Key words:* graded rings, graded modules, semisimple rings.

### References

1. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. *Method of graded rings*. Berlin, Springer, 2004, 295 p.
2. Hwang Y.-S., Wadsworth A. R. Correspondences between valued division algebras and graded division algebras. *J. Algebra*, 1998, vol. 220, pp. 73–114.
3. Bahturin Yu. A. Zaicev M. V., Sehgal S. K. Finite-dimensional simple graded algebras. *Sbornik : Mathematics*, 2008, vol. 199, no. 7, pp. 965–983. DOI:10.1070/SM2008v199n07ABEH003949
4. Balaba I. N. Mikhalev A. V. Isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 156, no. 2, pp. 209–218.
5. Balaba I. N. Graduirovannye prostye artinovy kol'tsa [Graded simple artinian rings]. *Algebra i matematicheskaia logika : materialy mezhdunar. konf., posviashch. 100-letiiu so dnia rozhdeniia prof. V. V. Morozova* [Algebra and Mathematical Logika : Trans. Intern. Confer., dedicated to 100th anniversary of V. V. Morozov]. Kazan, 2011, pp. 43–44 (in Russian).
6. Liu S.-X., Beattie M., Fang H. Graded division rings and the Jacobson density theorem. *J. Beijing Normal University (Natural Science)*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 129–134.
7. Balaba I. N. Izomorfizmy graduirovannykh kolets lineinykh preobrazovanii graduirovannykh vektornykh prostranstv [Isomorphisms of graded rings of linear transformations of graded vector spaces]. *Chebyshevckiy sbornik*, 2005, vol. 6. no. 4(16), pp. 6–23 (in Russian).
8. Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings. *J. Algebra*, 1999, vol. 220, pp. 709–728.
9. Bahturin Yu. A., Sehgal S.K., Zaicev M.V. Group graging on associative algebras. *J. Algebra*, 2001, vol. 241, pp. 677–698.
10. Bahturin Ju. A., Zaicev M. V. Group gradings on matrix algebras. *Canad. Math. Bulletin*, 2002, vol. 45, pp. 499–508.
11. Zalesskii A. E., Mikhalev A. V. Group rings. *J. of Soviet Math.*, 1975, vol. 4, no. 1, pp. 1–78.

УДК 501.1

# О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

**Д. А. Бредихин**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., bredikhin@mail.ru

В работе находятся базисы тождеств многообразий, порожденных классами группоидов бинарных отношений с диофантовыми операциями.

*Ключевые слова:* алгебры отношений, диофантовые операции, тождества, многообразия, группоиды.

## ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений $\Phi$, замкнутое относительно некоторой совокупности $\Omega$ операций над ними, образует алгебру $(\Phi, \Omega)$, называемую *алгеброй отношений*. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах

А. Тарского (A. Tarski) [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов [3–5]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в работах [5–7].

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть группоиды бинарных отношений. Классификацию бинарных диофантовых операций над отношениями можно найти в [8]. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций, в частности, к свойствам, выразимым тождествами. Это приводит к необходимости изучения многообразий, порожденных различными классами группоидов бинарных отношений. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [8–10].

## 1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Группоидом называется алгебра $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией.

Сосредоточим свое внимание на следующей диофантовой операции над бинарными отношениями, определяемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists\, z, w)(x, z) \in \rho \wedge (z, w) \in \sigma\},$$

где $\rho$ и $\sigma$ — бинарные отношения, заданные на множестве $X$. Заметим, что отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат применения операции цилиндрофикации [11] к произведению $\rho \circ \sigma$ бинарных отношений $\rho$ и $\sigma$.

Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$ является группоидом бинарных отношений.

Для заданного множества $\Omega$ операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из $\Omega$. Пусть $Var\{\Omega\}$ — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

**Теорема.** *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)x = xy, \tag{1}$$

$$(xy)y = xy, \tag{2}$$

$$(x^2y)z = (x^2z)y, \tag{3}$$

$$(xy^2)z = x(y^2z) \tag{4}$$

*и для каждого натурального $k > 2$ тождеству:*

$$(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-2}}(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-3}}(x_{i_{k-2}}x_{i_{k-1}})\ldots) = x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots). \tag{$5_k$}$$

Заметим, что приведенный в теореме базис тождеств является бесконечным. В связи с этим естественно возникает следующая проблема, в настоящее время остающаяся открытой.

**Проблема.** *Является ли многообразие $Var\{*\}$ конечно базируемым?*

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство теорем основывается на результатах работы [5]. Разобьем его на ряд последовательных шагов.

*Шаг 1.* Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работ [5].

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на $U$. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая $m$ бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные $z_0$, $z_1$, определяет $m$-арную операцию $F_\varphi$ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула $\varphi$ выполняется, если $z_0$, $z_1$ интерпретируются как $x$, $y$ и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3–5].

Обозначим через $N$ множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $(V,\ E)$, где $V$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины $u$ в вершину $v$, помеченным меткой $k$, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \overset{k}{\to} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины $u$ и $v$ инцидентны ребру $(u, k, v)$.

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где $(V, E)$ — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода.

Пусть $F = F_\varphi$ — диофантова операция, задаваемая формулой $\varphi$. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу $\varphi$; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в $\varphi$; если формула $z_i = z_j$ входит в $\varphi$, то вершины $i$ и $j$ отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \overset{1}{\to} \cdot \overset{2}{\to} \cdot \quad \cdot = out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [4]: возьмем двухполюсник $G$ и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник $G_k$, отождествляя при этом вершину $in_k$ с вершиной $u$ и вершину $out_k$ с вершиной $v$.

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ – универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма $p$ алгебры $A$ определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$ :

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \overset{k}{\to} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Обозначим через pr(E) множество всех вершин помеченного графа, которые инцидентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа $(V_1, E_1)$ и $(V_2, E_2)$. Отображение $f : pr(E_2) \to pr(E_1)$ называется гомоморфизмом $E_2$ в $E_1$, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из $G_2$ в $G_1$, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $E_1 \prec E_2$ ($G_1 \prec G_2$), если существует гомоморфизм из $E_2$ в $E_1$ (из $G_2$ в $G_1$), и $E_1 \cong E_2$ ($G_1 \cong G_2$), если $E_1 \prec E_2$ и $E_2 \prec E_1$ ($G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$).

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [5]: *тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$.*

*Шаг 2.* Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если $p_1$ и $p_2$ — термы, то выражение $(p_1 p_2)$ является термом, называемым произведением термов $p_1$ и $p_2$. В дальнейшем внешние скобки в записи термов, как правило, будут опускаться. Множество $\Xi$ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через $\Sigma$ эквациональную теорию класса группоидов, удовлетворяющих тождествам (1)–(4) и ($5_k$). Для термов $p_1$ и $p_2$ из $\Xi$ будем писать $p_1 \cong p_2$, когда тождество $p_1 = p_2$ принадлежит $\Sigma$. Отношение $\cong$ является отношением конгруэнции группоида $\Xi$, а фактор группоид $\Xi/\cong$ является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемым тождествами (1)–(4) и ($5_k$).

Пусть $(A, \cdot)$ — группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(4). Тогда он удовлетворяет тождествам:

$$(xy) = (xy)^2, \tag{6}$$

$$((xy)z)t = ((xy)t)z, \tag{7}$$

$$(x(yz))t = x((yz)t). \tag{8}$$

Действительно, используя тождество (1), получаем $(xy) = (xy)x = ((xy)x)(xy) = (xy)(xy) = (xy)^2$. Используя тождества (3), (6), получаем $((xy)z)t = ((xy)^2 z)t = ((xy)^2 t)z = ((xy)t)z$. Используя тождества (4), (6), получаем $(x(yz))t = (x(yz)^2)t = x((yz)^2 t) = x((yz)t)$.

**Замечание 1.** Из тождества (8) следует, что подгруппоид $(A^2, \cdot)$, где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$ — множество разложимых элементов, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из $A^2$, могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Обозначим через $\Lambda_k$, где $k \geq 1$, множество термов вида $x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}} x_{i_k})\dots)$. Положим

$$\tilde{\Lambda}_k = \bigcup \{\Lambda_i : i \geq k\}.$$

**Лемма 1.** *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие термы $p_1, p_2, \dots, p_m$ из $\tilde{\Lambda}_1$ ($m \geq 1$), что $p \cong (\dots(p_1 p_2) p_3)\dots) p_{m-1}) p_m$, и $p_1 \in \tilde{\Lambda}_2$,* если $p \notin \Lambda_1$.

**Доказательство.** Покажем сначала, что если $p \cong (\dots(p_1 p_2) p_3)\dots) p_{m-1}) p_m$ и $p \notin \Lambda_1$, то без ограничения общности можно считать, что $p_1 \in \tilde{\Lambda}_2$. Действительно, если $p \notin \Lambda_1$ и $p_1 \in \Lambda_1$, то $m > 1$ и $p_1 p_2 \in \tilde{\Lambda}_2$. Тогда, пологая $\tilde{p}_1 = p_1 p_2$, получим требуемое представление $(\dots(\tilde{p}_1 p_3) p_4)\dots) p_{n-1}) p_m$ терма $p$.

Утверждение очевидно для $p \in \Lambda_1$. Пусть теперь $p = (\dots(p_1 p_2) p_3)\dots) p_{m-1}) p_m$ и $q = (\dots(q_1 q_2) q_3)\dots) q_{n-1}) q_n$.

Если $n = 1$, то $pq = (\dots(p_1 p_2) p_3)\dots) p_{m-1}) p_m) q_1$, то есть произведение $pq$ имеет требуемое представление. Если $n > 1$, то, учитывая, что $q_1 \in \tilde{\Lambda}_2$, и, используя тождества (8), получаем:

$$pq = (\dots(p_1 p_2) p_3)\dots) p_{m-1}) p_m)(\dots(q_1 q_2) q_3)\dots) q_{n-1}) q_n) \cong$$

$$(\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)(\dots(q_1q_2)q_3)\dots)q_{n-1}))q_n \cong$$
$$(\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)(\dots(q_1q_2)q_3)\dots))q_{n-1})q_n \cong \dots$$
$$\cong (\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)q_3)\dots)q_{n-1})q_n.$$

Таким образом, и в этом случае произведение $pq$ имеет требуемое представление. Лемма 1 доказана.

*Шаг 3.* Двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$ для терма $p$ из леммы 1 согласно определению может быть построен следующим образом.

Пусть $p \in \Lambda_k$, то есть $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)$. Тогда $V(p) = \{v_0, v_1, v_2, \dots v_{k+1}\}$, $E(p) = \{(v_{i-1}, i, v_i) : i = 1, \dots k\}$, и $in(p) = v_0$, $out(p) = v_{k+1}$:

$$in(p) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_k} \cdot v_k \quad \cdot v_{k+1} = out(p).$$

Пусть $p = (\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ из $\tilde{\Lambda}_1$ $(m > 1)$. Мы будем предполагать, что множества $V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_m)$ попарно не пересекаются. Тогда $V(p) = V(p_1) \cup pr(E(p_2)) \cup \dots \cup pr(E(p_m))$, $E(p) = E(p_1) \cup E(p_2) \cup \dots \cup E(p_m)$ и $in(p) = in(p_1)$, $out(p) = out(p_1)$. Заметим, что в этом случае $G(p)$ содержит $m + 1$ компоненту связности.

Следующая лемма непосредственно вытекает из строения соответствующих графов и определения гомоморфизма.

**Лемма 2.** *Пусть* $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)$, $q = x_{j_1}(x_{i_j}(\dots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\dots)$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $l \le k$ *и* $j_1 = i_t$, $j_2 = i_{t+1}, \dots, j_l = i_{t+l-1}$ *для некоторого* $t \in \{1, \dots, k\}$. *В частности, если* $E(p) \cong E(q)$, *то* $p = q$.

**Лемма 3.** *Пусть* $p \in \tilde{\Lambda}_2$, $q \in \tilde{\Lambda}_1$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $p \cong pq$ *и* $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)q$ *для любого терма* $\tilde{p}$.

**Доказательство.** Пусть $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)$, $q = x_{j_1}(x_{i_j}(\dots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\dots)$ и $E(p) \prec E(q)$. Используя лемму 2 и тождества (1), (2), $(5_k)$, получаем:

$$p = (x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots) \cong (x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots) \cong$$
$$\cong (x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)((x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots) \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots) \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots) \cong \dots \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)(x_{i_t}(x_{i_{t+1}}(\dots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\dots) =$$
$$= ((x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\dots)(x_{j_1}(x_{i_j}(\dots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\dots) = pq.$$

Далее, используя тождество (8), получаем $\tilde{p}p \cong \tilde{p}(pq) \cong (\tilde{p}p)q$. Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Пусть* $p \in \Lambda_1$, $q \in \tilde{\Lambda}_1$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $p = q$ *и* $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)q$ *для любого терма* $\tilde{p}$.

**Доказательство.** Так как $p \in \Lambda_1$, то $p = x_i$, следовательно, согласно лемме 2 имеем $q = p = x_i$. Отсюда, используя тождество (2), получаем $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)p = (\tilde{p}p)q$. Лемма 4 доказана.

*Шаг 4.* Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(4) и $(5_k)$. Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что всякое тождество из $Eq\{*\}$ принадлежит $\Sigma$. Согласно лемме 1 мы можем предположить, что $p = (\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m$ и $q = (\dots(q_1q_2)q_3)\dots)q_{n-1})q_n$.

Предположим, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p) \cong G(q)$, то есть существуют гомоморфизмы $f_1$ из $G(q)$ в $G(p)$ и $f_2$ из $G(p)$ в $G(q)$. Поскольку всякая компонента связности графа $E(q)$ при гомоморфизме$f_1$ будет отображаться в компоненту связности графа $E(p)$ и всякая компонента связности графа $E(p)$ при гомоморфизме $f_2$ будет отображаться в компоненту связности графа $E(q)$, существуют отображения $\phi$ из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$ и $\varphi$ из $\{1, \dots, n\}$ в $\{1, \dots, m\}$ такие, что $f(E(q_k)) \subset E(p_{\phi(k)})$ для $k = 1, \dots, m$ и $f(E(p_k)) \subset E(q_{\varphi(k)})$ для $k = 1, \dots, n$. Учитывая, что $f_1(in(q_1)) = f_1(in(q)) = in(p) = in(p_1)$, имеем $\phi(1) = 1$. Аналогично, $\varphi(1) = 1$. Следовательно, $G(p_1) \cong G(q_1)$, отсюда согласно лемме 4 имеем $p_1 \cong q_1$.

Далее, используя леммы 3, 4 и тождества (6), (7), получаем:

$$p = (\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m \cong (\dots(p_1)^2)p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m \cong$$
$$\cong (\dots(p_1p_1)p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m \cong (\dots(p_1p_1)p_2)p_3)\dots)p_{\phi(1)})\dots)p_{m-1})p_m \cong$$
$$\cong (\dots(p_1p_1)p_2)p_3)\dots)p_{\phi(1)})q_1)\dots)p_{m-1})p_m \cong (\dots(p_1p_1)p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)q_1 \cong \dots \cong$$
$$\cong (\dots(p_1p_1)p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)\dots)q_n \cong (\dots(p_1p_2)p_3)\dots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)\dots)q_n.$$

Аналогично получаем $q = (\dots(q_1q_2)q_3)\dots)q_{n-1})q_n)p_1)p_2)\dots)p_m$. Отсюда, учитывая, что $p_1 \cong q_1$, используя тождество (7), получаем $p \cong q$, то есть тождество $p = q$ принадлежит $\Sigma$. Теорема доказана.

#### Библиографический список


1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188–189.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. *Andreka H., Bredikhin D. A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.
7. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
8. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
9. *Bredikhin D. A.* Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–192.
10. *Бредихин Д. А.* О многообразии группоидов бинарных отношений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.
11. *Henkin L., Monk J. D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.


## On Classes of Groupoids of Relations with Diophantine Operations


**D. A. Bredikhin**

Saratov State Technical University, Russia, 410054, Politechnicheskaya st., 77, bredikhin@mail.ru



In the paper the bases of identities of varieties generated by classes of groupoids of the binary relations with diophantine operations are found.



*Key words:* algebra of relations, diophantine operations, identities, varieties, groupoids.


#### References


1. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, vol. 4, pp. 73–89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1953, vol. 18. pp. 188–189.
3. Bredikhin D. A. On algebras of relations with Diophantine operations. *Doklady Mathematics*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
4. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
5. Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations. *Rus. Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1993, vol. 37, no. 3, pp. 21–28.
6. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations. *Alg. Univers.*, 1994, vol. 33, pp. 516–532.
7. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 23–33
8. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 1994, vol. 54, pp. 11–124.

9. Bredikhin D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations. *Semigroup Forum*, 1992, vol. 44. pp. 87–192.
10. Bredikhin D. A. On varieties of groupoids of binary relations. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 13–21 (in Russian).
11. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. North-Holland, Amsterdam, 1971, 311 p.

УДК 511

# ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ И ИХ СЛЕДСТВИЯХ

**А. Н. Васильев**

Преподаватель кафедры математики и информатики, Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Астана, Республика Казахстан, antonvassilyev@mail.ru

В работе изучены некоторые свойства распределения членов обобщенной последовательности Фибоначчи по бесквадратному модулю и получены следствия из этих свойств.

*Ключевые слова:* обобщенная последовательность Фибоначчи, тригонометрические суммы, плотность множества.

## 1. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Последовательность Фибоначчи, как известно, задается следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Обобщенная последовательность Фибоначчи задается тем же рекуррентным соотношением и двумя начальными натуральными членами, т. е. $G_1 = a$, $G_2 = b$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, где $a$, $b$ — натуральные числа. Вторую последовательность на протяжении всей работы будем считать наперед заданной.

Пусть, на протяжении всей работы, $d$ — бесквадратное (не делящееся ни на какой квадрат простого) натуральное число, большее 1 и взаимно простое с числами $a$, $b$ и с числом $(a^2 + ab - b^2)$ (это экзотическое условие будет мотивировано позже). Через $p$ будем обозначать, как обычно, простое число. В первой части это будут простые, взаимно простые с числами $a$, $b$ и с числом $(a^2 + ab - b^2)$. Во второй части простые, выступающие делителями какого-нибудь $d$, также будут предполагаться удовлетворяющими этому дополнительному условию.

Введем малый $d$-период последовательности Фибоначчи $t(d) = \min\{\tau : \tau \geq 1,\ d \,|\, F_\tau\}$ и большой $d$-период последовательности Фибоначчи $T(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, F_{n+\mathrm{T}} \equiv F_n (\mathrm{mod}\, d)\ \forall\ n\}$. Аналогично, большой $d$-период обобщенной последовательности Фибоначчи есть $T'(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (\mathrm{mod}\, d)\ \forall\ n\}$ (периодичность по любому модулю доказывается просто). Аналога малого $d$-периода может не существовать (например, если $a = 2$, $b = 1$, $d = 5$).

Выделим необходимые нам свойства последовательности Фибоначчи в следующую лемму.

**Лемма 1.1.**

*А)* $F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ *(формула Бине).*

*Б)* $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

*В1)* $d \,|\, F_n \ \Leftrightarrow\ t(d) \,|\, n$.

*В2)* $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\mathrm{mod}\, d), \\ F_{\alpha+1} \equiv F_{\beta+1} (\mathrm{mod}\, d) \end{cases} \ \Leftrightarrow\ T(d) \,|\, (\alpha - \beta)$.

*Г)* $T(d)/t(d) \in \{1, 2, 4\}$.

*Д)* $d = p_1 p_2 \ldots p_s \ \Rightarrow\ t(d) = [t(p_1), t(p_2), \ldots, t(p_s)]$.