ИНФОРМАТИКА

УДК 512.572

О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Д. А. Бредихин

Саратовский государственный технический университет
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находятся базисы тождеств многообразий, порожденных классами группоидов бинарных отношений.

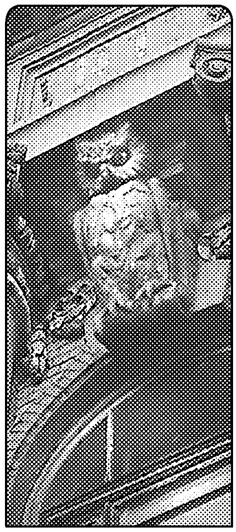
Ключевые слова: тождества, многообразия, группоиды, бинарные отношения.

On Varieties of Groupoids of Binary Relations

D. A. Bredikhin

In the paper, the bases of identities of varieties generated by classes of groupoids of the binary relations are found.

Key words: identities, varieties, groupoids, binary relations.



ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая алгебра отношений может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в статьях А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется диофантовой [3] (в другой терминологии — примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описание с помощью графов [3, 4]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в статьях Д. А. Бредихина [5, 6].

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, т. е. группоиды бинарных отношений. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естествен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций, в частности, к свойствам, выражаемым тождествами. Это приводит к необходимости изучения многообразий, порожденных различными классами группоидов бинарных отношений. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [7, 8].

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $\mathrm{Var}\,\{\Omega\}$ ($\mathrm{Var}\,\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Сосредоточим свое внимание на следующей диофантовой операции над бинарными отношениями, задаваемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(x, y) : \ (\exists\ z, w)\ (x, z) \in \rho \wedge (w, z) \in \sigma\}.$$

Группоидом называется алгебра $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией. Упорядоченным группоидом $(A, \cdot, \leq)$ назовем группоид с заданным на множестве A отношением порядка, согласованным с операцией группоида. Полурешеточно упорядоченный группоид — это алгебра $(A, \cdot, \vee)$ типа $(2, 2)$, где $(A, \cdot)$ — группоид, $(A, \vee)$ — верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$, $(\Phi, *, \subset)$ и $(\Phi, *, \cup)$ образуют соответственно группоид, упорядоченный группоид и полурешеточно упорядоченный группоид бинарных отношений.

Теорема 1. *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)x = xy, \tag{1}$$

$$(xy)y = xy, \tag{2}$$

$$(xy)^2 = xy, \tag{3}$$

$$x^2y = xy^2 = x^2y^2, \tag{4}$$

$$x^2(yz) = x^2(zy), \tag{5}$$

$$(x^2y)z = (x^2z)y, \tag{6}$$

$$(xy^2)z = x(y^2z). \tag{7}$$

Теорема 2. *Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $\mathrm{Var}\,\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам* (1)–(7) *и тождествам:*

$$x \leq x^2, \tag{8}$$

$$xy \leq x^2. \tag{9}$$

Теорема 3. *Полурешеточно упорядоченный группоид $(A, \cdot, \vee)$ принадлежит многообразию $\mathrm{Var}\,\{*, \cup\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам* (1)–(7) *и тождествам:*

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \tag{10}$$

$$(x \vee y)z = xz \vee yz, \tag{11}$$

$$x \vee x^2 = x^2, \tag{12}$$

$$xy \vee x^2 = x^2. \tag{13}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теорем основывается на результатах работы [5]. Разобьем его на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работы [5].

Пусть $\mathrm{Rel}(U)$ — множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов

$r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $\mathrm{Rel}(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $\mathrm{Rel}(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3, 4].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V,\ E)$, где $V = V(G)$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v).

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника, соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода.

Пусть $F = F_\varphi$ — диофантова операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ – множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \xrightarrow{1} \cdot \xleftarrow{2} \cdot \quad \cdot = out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [4]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Обозначим через pr(E) множество всех вершин помеченного графа, которые инцендентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Отображение $f : pr(E_2) \to pr(E_1)$ называется гомоморфизмом G_2 в G_1, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1, и $G_1 \cong G_2$, если $G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) и сформулируем основной результат работы [5].

Тождество $p = q$ ($p \leq q$)принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$ ($G(p) \prec G(q)$).

Шаг 2. Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если p_1 и p_2 — термы, то выражение $(p_1 p_2)$ является термом, называемым произведением термов p_1 и p_2. В дальнейшем внешние скобки в записи термов как правило будут опускаться. Множество Ξ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через Σ ($\Sigma^{\leq}$) эквациональную теорию класса группоидов (упорядоченных группоидов), удовлетворяющих тождествам (1)–(7) ((1)–(9)). Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$ ($p_1 \prec p_2$), когда тождество $p_1 = p_2$ ($p_1 \leq p_2$) принадлежит Σ ($\Sigma^{\leq}$). Отношение $\cong$ является отношением конгруэнции группоида Ξ, а фактор группоид $\Xi/\cong$ является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемым тождествами (1)–(7). Класс отношения эквивалентности, содержащий терм p, обозначим через $[p]$. Фактор группоид $\Xi/\cong$, упорядоченный отношением $\leq$, задаваемый следующим образом: $[p] \leq [q] \Leftrightarrow p \prec q$, является свободным счетно порожденным упорядоченным группоидом в многообразии, задаваемый тождествами (1)–(9).

Пусть $(A, \cdot)$ — группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(7). Тогда он удовлетворяет тождеству

$$(x(yz))t = x((yz)t). \tag{14}$$

Действительно, используя тождества (3) и (7), получаем:

$$(x(yz))t = (x(yz)^2)t = x((yz)^2 t) = x((yz)t).$$

Замечание 1. Из тождества (14) следует, что подгруппоид $(A^2, \cdot)$, где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из A^2, могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Обозначим через Λ множество всех термов вида $(x_i x_j)$.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$, отличного от индивидуальной переменной, существуют такие термы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из Λ ($n \geq 1$), что $[p] = [p_1][p_2]\ldots[p_n]$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией. Утверждение очевидно для $p \in \Lambda$. Далее рассмотрим следующие возможные случаи.

Пусть $p = x_k$ и $q = q_1 q_2 \ldots q_m$, где $q_1, q_2, \ldots, q_m \in \Lambda$. Тогда используя тождества (3), (4), (14), получаем:

$$[x_k q] = [x_k]([q_1][q_2]\ldots[q_m]) = ([x_k][q_1])([q_2]\ldots[q_m]) = ([x_k][q_1]^2)([q_2]\ldots[q_m]) =$$
$$= ([x_k]^2[q_1])([q_2]\ldots[q_m]) = ([x_k x_k][q_1])([q_2]\ldots[q_m]) = [x_k x_k][q_1] q_2]\ldots[q_m].$$

Пусть $p = p_1 p_2 \ldots p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Lambda$ и $q = x_k$. Тогда используя тождества $(3, 4, 13)$, получаем

$$[p x_k] = ([p_1][p_2]\ldots[p_n])[x_k] = ([p_1][p_2]\ldots[p_{n-1}])([p_n])[x_k]) =$$
$$= ([p_1][p_2]\ldots([p_{n-1}])([p_n]^2[x_k]) = ([p_1][p_2]\ldots([p_{n-1}])([p_n][x_k]^2) = [p_1][p_2]\ldots[p_{n-1}][p_n][x_k x_k].$$

Пусть $p = p_1 p_2 \ldots p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Lambda$ и $q = q_1 q_2 \ldots q_m$, где $q_1, q_2, \ldots, q_m \in \Lambda$. Тогда используя замечание 1, получаем:

$$[pq] = ([p_1][p_2]\ldots[p_n])([q_1][q_2]\ldots[q_m]) = [p_1][p_2]\ldots[p_n][q_1][q_2]\ldots[q_m]. \qquad \square$$

Шаг 3. Двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$ для $p = p_1p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$, согласно определению может быть построен следующим образом.

Пусть $p \in \Lambda$, т. е. $p = x_ix_j$. Тогда $V(p) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $E(p) = \{(v_0, i, v_1), (v_2, j, v_1)\}$, и $in(p) = v_0$, $out(p) = v_3$:

$$in = \cdot \xrightarrow{i} \cdot \xleftarrow{j} \cdot \quad \cdot = out.$$

Пусть $p = p_1p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$. Мы будем предполагать, что множества $Vp_1, Vp_2 \dots, Vp_n$ попарно не пересекаются. Тогда $V(p) = V(p_1) \cup pr(E(p_1)) \cup \dots \cup pr(E(p_n))$, $E(p) = E(p_1) \cup E(p_2) \cup \dots \cup Ep_n)$ и $in(p) = in(p_1)$, $out(p) = v$, где v — новая вершина, отличная от вершин двухполюсников $G(p_1), G(p_2), \dots, G(p_n)$. Заметим, что в этом случае $G(p)$ содержит $n + 1$ компоненту связности.

Следующие три леммы непосредственно вытекают из строения соответствующих графов и определения гомоморфизма.

Лемма 2. *Пусть $p \in \Lambda \cup \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $q = x_k$ и $G(p) \prec G(q)$. Тогда $p = q$.*

Лемма 3. *Пусть $p = x_i$, $q = x_kx_l$, $E(p) \prec E(q)$. Тогда $i = k = l$, т. е. $q = p^2$.*

Лемма 4. *Пусть $p = x_ix_j$, $q = x_kx_l$, $E(p) \prec E(q)$ и f — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$. Тогда возможен один из следующих случаев: a) $i = k$ и $j = l$; b) $i = l$ и $j = k$; c) $i = k = l$; d) $j = k = l$. Если при этом $f(in(q)) = in(p)$, то возможны лишь случаи a) и c).*

Лемма 5. *Пусть $p = x_ix_j$, $q = x_kx_l$, $E(p) \prec E(q)$. Тогда $[pq] = [p]$.*

Доказательство. Рассмотрим случаи, обозначенные в лемме 4. В случае a), используя тождество (3), имеем $[pq] = [x_ix_j][x_ix_j] = [x_ix_j]^2 = [x_ix_j] = [p]$.

В случае b), используя тождества (3), (5), имеем:

$$[pq] = [x_ix_j][x_jx_i] = [x_ix_j]^2([x_j][x_i]) = [x_ix_j]^2([x_i][x_j]) = [x_ix_j][x_ix_j]) = [x_ix_j]^2 = [x_ix_j] = [p].$$

В случае c), используя тождества (1), (3), имеем:

$$[pq] = [x_ix_j][x_ix_i] = [x_ix_j][x_i]^2 = [x_ix_j]^2[x_i] = [x_ix_j][x_i] = [x_ix_j] = [p].$$

В случае d), используя тождества (2), (3), имеем:

$$[pq] = [x_ix_j][x_jx_j] = [x_ix_j][x_j]^2 = [x_ix_j]^2[x_j = [x_ix_j][x_j] = [x_ix_j] = [p]. \qquad \square$$

Лемма 6. *Пусть $p = x_ix_j$, $q = x_kx_l$, $E(p) \prec E(q)$ и $f(in(q)) = in(p)$, где f — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$. Тогда $[p] \le [q]$.*

Доказательство. Если $p = x_ix_j$, то рассмотрим случаи a) и c), обозначенные в лемме 4. В случае a) имеем $[p] = [q]$. В случае c), используя тождества (8), получаем:

$$[p] = [x_ix_j] \le [x_i]^2 = [q].$$

Лемма 7. *Пусть $p = x_ix_j$, $q = x_kx_l$, $G(p) \cong G(q)$ и $f_1(in(q)) = in(p)$, $f_2(in(p)) = in(q)$, где f_1 — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$ и f_2 — гомоморфизм из $E(p)$ в $E(q)$. Тогда $[p] = [q]$.*

Доказательство. Действительно, согласно лемме 4 это возможно лишь в случаях, когда $i = l$ и $j = k$ или $i = l = j = k$, следовательно, $p = q$. $\square$

Шаг 4. Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(9). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$ и $\Sigma^{\le} \subset Eq\{*, \subset\}$. Таким образом, для доказательства теорем 1, 2 достаточно показать, что всякое тождество $p = q$ ($p \le q$) из $Eq\{*\}$ ($Eq\{*, \subset\}$) принадлежит Σ ($\Sigma^{\le}$).

Согласно лемме 1 мы можем предположить, что $p, q \in \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ или $p = p_1p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$ и $q = q_1q_2 \dots q_m$, где $q_1, q_2, \dots, q_m \in \Lambda$.

Предположим, что тождество $p \le q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p) \prec G(q)$, т. е. существует гомоморфизм f из $G(q)$ в $G(p)$.

Если $q = x_k$, то согласно лемме 2 имеем $p = q$. Если $p = x_i$ и $q = q_1q_2 \ldots q_m$, то $E(p) \prec E(q_k)$ для всякого $k = 1, \ldots, m$. Отсюда по лемме 3 $q_k = p^2$ и, используя тождества (3), (8), получаем $p \le p^2 = q$.

Предположим теперь, что $p = p_1p_2 \ldots p_n$ и $q = q_1q_2 \ldots q_m$. Ясно, что гомоморфизм f будет отображать всякую компоненту связности графа $E(q)$ в компоненту связности графа $E(p)$, следовательно, существует отображение ϕ из $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$ такое, что $f(G(q_k)) \subset G(p_{\phi(k)})$ для всякого $k = 1, \ldots, m$, следовательно, согласно лемме 5 имеем:

$$[p_{\phi(k)}][q_k] = [p_{\phi(k)}].$$

Учитывая, что $f(in(q_1)) = f(in(q)) = in(p) = in(p_1)$, имеем $\phi(1) = 1$. Отсюда согласно лемме 6 $[p_1] \le [q_1]$. Таким образом, используя тождества (3), (6), (9), получаем:

$$[p] = [p_1][p_2] \ldots [p_n] = [p_1][q_2] \ldots [q_m][p_2] \ldots [p_n] \le [p_1][q_2] \ldots [q_m] \le [q_1][q_2] \ldots [q_m] = [q].$$

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p \le q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 2.

Предположим теперь, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из [5] имеем $G(p) \cong G(q)$, т. е. $G(p) \prec G(q)$ и $G(q) \prec G(p)$, следовательно, существуют гомоморфизмы f_1 из $E(q)$ в $E(p)$ и f_2 из $E(p)$ в $E(q)$.

Если $p = x_i$ или $q = x_k$, то согласно лемме 2 имеем $p = q$.

Предположим теперь, что $p = p_1p_2 \ldots p_n$ и $q = q_1q_2 \ldots q_m$. Поскольку всякая компонента связности графа $E(q)$ при гомоморфизмеf_1 будет отображаться в компоненту связности графа $E(p)$ и всякая компонента связности графа $E(p)$ при гомоморфизме f_2 будет отображаться в компоненту связности графа $E(q)$, существуют отображения ϕ из $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$ и φ из $\{1, \ldots, n\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ такие, что $f(G(q_k)) \subset G(p_{\phi(k)})$ для $k = 1, \ldots, m$ и $f(G(p_k)) \subset G(q_{\varphi(k)})$ для $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, согласно лемме 5 имеем $[p_{\phi(k)}][q_k] = [p_{\phi(k)}]$ и $[q_{\varphi(k)}][p_k] = [q_{\varphi(k)}]$. Учитывая, что $f_1(in(q_1)) = f_1(in(q)) = in(p) = in(p_1)$ и $f_2(in(p_1)) = f_2(in(p)) = in(q) = in(q_1)$, имеем $\phi(1) = 1$ и $\varphi(1) = 1$. Отсюда согласно лемме 7 имеем $[p_1] = [q_1]$. Таким образом, используя тождества (3), (6), получаем $[p] = [p_1][p_2] \ldots [p_n] = [p_1][q_2] \ldots [q_m][p_2] \ldots [p_n]$ и $[q] = [q_1][q_2] \ldots [q_m] = [q_1][p_2] \ldots [p_n][q_2] \ldots [q_m]$. Отсюда, учитывая, что $[p_1] = [q_1]$, и, используя тождество (3), (6), получаем $[p] = [q]$.

Таким образом во всех возможных случаях тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 и следствия 5 работы [5].

Библиографический список

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188–189.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595. [*Bredikhin D. A.* Relation algebras with diophantine operations // Doklady Mathematics. 1998. Vol. 57, № 3. P. 435–436.]
4. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations// Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30. [*Bredikhin D. A.* The equational theory of algebras of relations with positive operations // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1993. Vol. 37, № 3. P. 21–28.]
6. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41. [*Bredikhin D. A.* On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations // Siberian Math. J. 1997. Vol. 38, № 1. P. 23–33.]
7. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
8. *Bredikhin D. A.* Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–192.