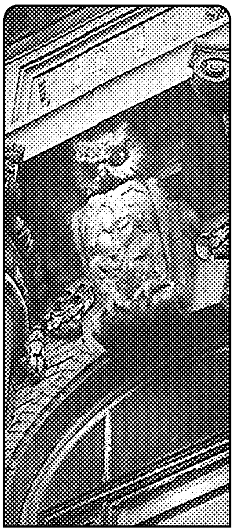
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ-ЦИКЛЕ

М.Ш. Бурлуцкая*, **А.П. Хромов****

*Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
**Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из трех ребер, образующих цикл.

On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigenfunctions of a Functional-Differential Operator on a Cycle-Graph

M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov

The paper deals with necessary and sufficient conditions of uniform convergence of generalized Riesz means for the expansions in eigen and associated functions of the 1-st order functional-differential operator on the graph with three ribs forming a cycle.

Пусть Γ — геометрический граф из трех ребер, образующих цикл. Используем векторный подход [1, с. 21], когда каждое ребро графа параметризуется отрезком $[0,1]$, и функция на графе понимается как вектор-функция $y(x)=(y_1(x),y_2(x),y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), компонента которой $y_k(x)$, соответствующая k-му ребру, есть скалярная функция на отрезке $[0,1]$. В соответствии с таким подходом зададим на Γ следующий оператор:

$$(Ly)(x)=$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x)+\beta_1 y_1'(1-x)+p_{11}(x)y_1(x)+p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x)+\beta_2 y_2'(1-x)+p_{21}(x)y_2(x)+p_{22}(x)y_2(1-x) \\ y_3'(x)+p(x)y_3(x) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$y(x)=(y_1(x),y_2(x),y_3(x))^T, \qquad x\in[0,1],$$

$$y_1(0)=y_3(1), \quad y_2(0)=y_1(1), \quad y_3(0)=y_2(1), \qquad (2)$$

где $\alpha_i^2<\beta_i^2$, $p_{ij}(x)\in C^1[0,1]$. Краевые условия (2) — это условия непрерывности $y(x)$ во внутренних узлах Γ.

Оператор (1) с общими краевыми условиями $U(y)=0$ относится к классу функционально-дифференциальных операторов с операторами отражения, исследование которых получило интенсивное развитие [2]–[12]. В числе прочих изучаются и вопросы о разложении по собственным функциям таких операторов [5], [7]–[12]. Главные части первых двух компонент оператора L представляют собой линейную комбинацию производных $y'(x)$ и $y'(1-x)$, квадрат которой есть оператор двукратного дифференцирования $y''(x)$. Поэтому эти компоненты есть функционально-дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией $\nu(x)=1-x$, представляющие обобщения квадратного корня из $y''(x)$. Данные функционально-дифференциальные операторы приводятся к операторам Дирака, и тем самым мы рассматриваем случай графа-цикла из трех ребер, когда на двух ребрах заданы операторы Дирака, а на одном — обычный дифференциальный оператор первого порядка.

В данной статье получим полное решение вопроса о равномерной сходимости на всем графе Γ обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L. Подобные результаты для интегральных операторов содержатся, например, в [13] и [14].

1. Построим краевую задачу для резольвенты $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр). Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$, где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Тогда $y(x)$ есть решение системы

$$\alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \tag{3}$$

$$\alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \tag{4}$$

$$y_3'(x) + p(x)y_3(x) = \lambda y_3(x) + f_3(x), \tag{5}$$

подчиненное краевым условиям (2).

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 5:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + m(x), \tag{6}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{7}$$

где $Q = \operatorname{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$, $k=1,2$, $Q_3 = (1)$, $P(x) = \operatorname{diag}(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k=1,2$, $P_3(x) = (p(x))$, $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x), m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x), m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$; M_0 и M_1 — квадратные (5×5) матрицы, для которых $(M_0)_{11} = (M_0)_{32} = (M_0)_{54} = (M_1)_{22} = (M_1)_{41} = 1$, $(M_0)_{33} = (M_0)_{55} = (M_1)_{15} = (M_1)_{25} = (M_1)_{44} = -1$, а остальные элементы равны нулю.

Лемма 1. *Если λ таково, что R_λ существует, и $y = R_\lambda f$, то $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x), z_5(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x), z_2(x) = y_1(1-x), z_3(x) = y_2(x), z_4(x) = y_2(1-x), z_5(x) = y_3(x)$, является решением (6)–(7). Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (6)–(7) и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует, и $(R_\lambda f)(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, где $y_1(x) = z_1(x)$, $y_2(x) = z_3(x)$, $y_3(x) = z_5(x)$.*

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ удовлетворяет системе (3)–(5). Меняя в (3)–(4) x на $1-x$ получим еще два уравнения, образующие вместе с (3)–(5) систему, которая при переходе к функциям $z_i(x)$ приводится к (6). Далее, так как $y_1(0) = z_1(0) = z_2(1)$, $y_1(1) = z_1(1) = z_2(0)$, $y_2(0) = z_3(0) = z_4(1)$, $y_2(1) = z_3(1) = z_4(0)$, $y_3(0) = z_5(0)$, $y_3(1) = z_5(1)$, то краевые условия (2) дают следующие условия для $z_i(x)$: $z_1(0) = z_5(1)$, $z_2(1) = z_5(1)$, $z_2(0) = z_3(0)$, $z_1(1) = z_4(1)$, $z_4(0) = z_5(0)$, которые и есть (7).

Обратно, пусть $z(x)$ является решением задачи (6)–(7). Преобразовывая первые четыре уравнения в системе (6) с использованием замены x на $1-x$, получим, что вектор-функция $(z_2(1-x), z_1(1-x), z_4(1-x), z_3(1-x), z_5(x))^T$ является решением (6)–(7). В силу невырожденности задачи (6)–(7) имеем, в частности, соотношения $z_2(x) = z_1(1-x)$, $z_4(x) = z_3(1-x)$, с учетом которых из (6)–(7) получим (3), (4), (5), (2) относительно $z_1(x)$, $z_3(x)$, $z_5(x)$. Так как однородная задача для (3)–(5), (2) имеет только нулевое решение, то R_λ существует, и $(R_\lambda f)(x) = (z_1(x), z_3(x), z_5(x))^T$. $\square$

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу:

$$u'(x) + \widetilde{P}(x)u(x) = \lambda D u(x) + \widetilde{m}(x), \tag{8}$$

$$\widetilde{M}_0 u(0) + \widetilde{M}_1 u(1) = 0, \tag{9}$$

где $\widetilde{P}(x) = \operatorname{diag}\left(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1,\ B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3\right)$, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \operatorname{diag}\left(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k}\right)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $(k=1,2)$, $D_3 = (1)$, $\widetilde{m}(x) = \operatorname{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1},\ B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $\widetilde{M}_0 = M_0 B$, $\widetilde{M}_1 = M_1 B$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \beta_k^{-1}\left[i\sqrt{d_k} + \alpha_k\right]$, $(k=1,2)$, $B_3 = (1)$.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Если $u(x,\lambda)$ — решение краевой задачи (8)–(9), то $z(x,\lambda) = Bu(x,\lambda)$ есть решение задачи (6)–(7), и наоборот.*

2. При исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи (8)–(9) возникают трудности, связанные с наличием ненулевой матрицы $\widetilde{P}(x)$. Поэтому далее проводится преобразование системы (8), заменяющее $\widetilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\lambda^{-1}\right)$ [15, с. 48–58].

Пусть $H_0(x) = \mathrm{diag}\,(H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \mathrm{diag}\,(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \mathrm{diag}\,(h_3(x), h_4(x))$, $H_{03}(x) = (h_5(x))$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x \widetilde{p}_{ii}(t)\,dt\right\}$ и $\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$; $H_1(x) = \mathrm{diag}\,(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $H_{13}(x) \equiv 0$, а $H_{1k}(x)$ $(k = 1,2)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H'_{0k}(x) + \widetilde{P}_k(x) H_{0k}(x) + (H_{1k}(x) D_k - D_k H_{1k}(x)) = 0,$$

где $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1} Q_k^{-1} P_k(x) B_k$. Так как элементы матрицы $P(x)$ и соответственно $\widetilde{P}(x)$ из $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$.

Теорема 1. *Преобразование $u(x) = H(x,\lambda)v(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1} H_1(x)$, приводит систему (8)–(9) к виду*

$$v'(x) + P(x,\lambda) v(x) = \lambda D v(x) + m(x,\lambda), \tag{10}$$

$$M_{0\lambda} v(0) + M_{1\lambda} v(1) = 0, \tag{11}$$

где $P(x,\lambda) = \lambda^{-1} H^{-1}(x,\lambda)[H'_1(x) + \widetilde{P}(x) H_1(x)]$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = M_0 B H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1 B H(1,\lambda)$.

Доказательство. Утверждение теоремы получается простой проверкой. Действительно, так как система (8) имеет блочно-диагональный вид, ее можно рассматривать как три системы:

$$u'(x) + \widetilde{P}_k(x) u(x) = \lambda D_k u(x) + \widetilde{m}(x), \quad k = 1,2,3, \tag{12}$$

где $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1} Q_k^{-1} P_k(x) B_k$, $\widetilde{m}(x) = B_k^{-1} Q_k^{-1} m(x)$, а $u(x)$ и $m(x)$ — векторы из двух компонент для $k = 1,2$ и одной компоненты для $k = 3$ (здесь они имеют новый смысл, отличный от (6) и (8)).

Выполняя в каждой системе (12) преобразование $u(x) = H_k(x,\lambda) v(x)$, ($v(x)$ — скалярная функция для $k = 3$, и $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$ для $k = 1,2$), где $H_k(x,\lambda) = H_{0k}(x) + \lambda^{-1} H_{1k}(x)$, получим систему уравнений, которая с помощью указанных выше блочно-диагональных матриц приводится к (10). Краевые условия (11) следуют из (9). $\square$

3. Для того чтобы исследовать решение задачи (10)–(11), рассмотрим сначала краевую задачу

$$w'(x) = \mu \widehat{D} w(x) + m(x), \tag{13}$$

$$U(w) = M_{0\lambda} w(0) + M_{1\lambda} w(1) = 0, \tag{14}$$

где $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, $m_i = m_i(x) \in L[0,1]$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, $\widehat{D} = \mathrm{diag}\,(1, -1, d, -d, \omega)$, $d = \sqrt{d_1/d_2} > 0$, $\omega = \sqrt{d_1}/i$, т. е. $\lambda D = \mu \widehat{D}$.

Общее решение системы (13) имеет вид

$$w(x,\mu) = V(x,\mu) c + \int\limits_0^1 g(x,t,\mu) m(t)\,dt,$$

где $V(x,\mu) = \mathrm{diag}\,\left(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu d x}, e^{-\mu d x}, e^{\mu\omega x}\right)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T$ — произвольный вектор, $g(x,t,\mu) = \mathrm{diag}\,\Big(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu), g_3(x,t,\mu), g_4(x,t,\mu), g_5(x,t,\mu)\Big)$,

$$\begin{aligned} g_k(x,t,\mu) &= \varepsilon(x,t) e^{\mu\omega_k(x-t)}, &\quad \text{если} \quad \mathrm{Re}\,\mu\omega_k \le 0, \\ g_k(x,t,\mu) &= -\varepsilon(t,x) e^{\mu\omega_k(x-t)}, &\quad \text{если} \quad \mathrm{Re}\,\mu\omega_k \ge 0, \end{aligned}$$

$\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \le t$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, $\omega_5 = \omega$. Подчиняя его краевым условиям (14), получим следующий результат.

Лемма 3. *Если μ таково, что матрица $\Delta(\mu) = U(V(x,\mu))$ обратима, то краевая задача (13)–(14) однозначно разрешима при любой $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение имеет вид*

$$w(x,\mu) = R_{1\mu}m(x) = -V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu m(x)) + g_\mu m(x), \tag{15}$$

где $g_\mu m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$, $U(g_\mu m(x)) = \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\mu))m(t)\,dt$, ($U_x$ означает, что U применяется к g по переменной x).

Непосредственным вычислением получаем следующее утверждение:

Лемма 4. *Имеет место формула:*

$$\Delta(\mu) = \begin{pmatrix} 1+\mu^{-1}b_1r_2(0) & b_1+\mu^{-1}r_1(0) & 0 & 0 & -h_5(1)e^{\mu\omega} \\ b_1h_1(1)+\mu^{-1}r_2(1))e^{\mu} & (h_2(1)+\mu^{-1}b_1r_1(1))e^{-\mu} & 0 & 0 & -h_5(1)e^{\mu\omega} \\ b_1+\mu^{-1}r_2(0) & 1+\mu^{-1}b_1r_1(0) & -(1+\mu^{-1}b_2r_4(0)) & -(b_2+\mu^{-1}r_3(0)) & 0 \\ (h_1(1)+\mu^{-1}b_1r_2(1))e^{\mu} & (b_1h_2(1)+\mu^{-1}r_1(1))e^{-\mu} & -(b_2h_3(1)+\mu^{-1}r_4(1))e^{\mu d} & -(h_4(1)+\mu^{-1}b_2r_3(1))e^{-\mu d} & 0 \\ 0 & 0 & b_2+\mu^{-1}r_4(0) & 1+\mu^{-1}b_2r_3(0) & -1 \end{pmatrix},$$

где $b_1 = \beta_1^{-1}\left[i\sqrt{d_1}+\alpha_1\right]$, $b_2 = \beta_2^{-1}\left[i\sqrt{d_2}+\alpha_2\right]$, $h_i(x)$ — элементы матрицы $H_0(x)$, $r_i(x)$ — элементы матрицы $id_1^{-1/2}H_1(x)$.

Для $\det\Delta(\mu)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\det\Delta(\mu) = A_1(\mu)e^{\mu+\mu d+\mu\omega} + A_2(\mu)e^{\mu+\mu d} + A_3(\mu)e^{-\mu-\mu d} + A_4(\mu)e^{-\mu-\mu d+\mu\omega} + \sum_{k=5}^{20} A_k(\mu)e^{a_k\mu+b_k\mu d+c_k\mu\omega},$$

где $A_k(\mu) = \nu_k + O\left(\mu^{-1}\right)$, $k=\overline{1,4}$, $\nu_1 = b_1\,b_2\,h_1(1)h_3(1)h_5(1)$, $\nu_2 = -b_1^2\,b_2^2\,h_1(1)h_3(1)$, $\nu_3 = -h_2(1)h_4(1)$, $\nu_4 = -b_1\,b_2\,h_2(1)h_4(1)h_5(1)$, причем $\nu_k \neq 0$; $A_k(\mu) = O(1)$, $k=\overline{5,20}$, $a_k\mu + b_k\mu d + c_k\mu\omega$ — различные комбинации, отличные от показателей экспонент первых четырех слагаемых (числа a_k, b_k, c_k есть 0, 1 или -1).

Далее предполагаем, что $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu\omega \geq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\det\Delta(\mu) = e^{\mu+\mu d+\mu\omega}T(\mu)$, где $T(\mu) = A_1(\mu) + A_2(\mu)e^{-\mu\omega} + A_3(\mu)e^{-2\mu-2\mu d-\mu\omega} + A_4(\mu)e^{-2\mu-2\mu d} + \sum\limits_{k=5}^{20} A_k(\mu)e^{a'_k\mu+b'_k\mu d+c'_k\mu\omega}$ есть квазиполином. Так как $\nu_k \neq 0$ ($k=\overline{1,4}$), то по лемме 1 [16, с. 113], $T(\mu)$ имеет счетное количество нулей, все они находятся в полосах вдоль мнимой и вещественной осей, причем в любых прямоугольниках $|\operatorname{Im}\mu - t| \leq 1$, $|\operatorname{Re}\mu - t| \leq 1$ соответствующих полос их число ограничено некоторой константой, не зависящей от t. Вырежем из комплексной плоскости эти нули вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Полученную область обозначим S_{δ_0}. Тогда в S_{δ_0} при $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu\omega \geq 0$ для $\delta(\mu) = \det\Delta(\mu)$ справедлива оценка

$$|\delta(\mu)| \geq c\left|e^{\mu(1+d+\omega)}\right|. \tag{16}$$

Лемма 5. *Компоненты матрицы $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu) = (\eta_{ij}(x,\mu))_{i,j=1}^5$ в области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ имеют оценки $\eta_{ij}(x,\mu) = O(1)$, $(i,j=\overline{1,5})$, равномерные по $x\in[0,1]$.*

Доказательство следует напрямую из (16) и оценки элементов матриц $\Delta^{-1}(\mu)$ и $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)$.

Лемма 6. *Если компоненты вектор-функции $m(x)$ принадлежат $C[0,1]$, то в области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ имеет место следующая оценка:*

$$\|R_{1\mu}m\|_\infty = O\left(\frac{1}{|\operatorname{Re}\mu|} + \frac{1}{|\operatorname{Im}\mu|}\right)\|m\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ есть норма L_∞ в пространстве вектор-функций на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Если $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ и $f(x) \in C[0,1]$, то

$$\left\| \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt \right\|_\infty = O\left(\|f\|_\infty \cdot \left\| \int_0^x |e^{\lambda t}|\,dt \right\|_\infty \right) = O\left(\frac{\|f\|_\infty}{|\operatorname{Re}\lambda|} \right). \tag{17}$$

Если $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, то

$$\left\| \int_x^1 e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt \right\|_\infty = O\left(\|f\|_\infty \cdot \left\| \int_0^{1-x} |e^{-\lambda t}|\,dt \right\|_\infty \right) = O\left(\frac{\|f\|_\infty}{|\operatorname{Re}\lambda|} \right). \tag{18}$$

Поэтому из (17) и (18) получаем такую оценку

$$\|g_\mu m\|_\infty = O\left(\left[\frac{1}{|\operatorname{Re}\mu|} + \frac{1}{|\operatorname{Re}\mu d|} + \frac{1}{|\operatorname{Re}\mu\omega|} \right] \|m\|_\infty \right). \tag{19}$$

Так как существует константа $c > 0$ такая, что $c \le \min\{d, \sqrt{d_1}\}$, то $|\operatorname{Re}\mu d|^{-1} \le \frac{1}{c}|\operatorname{Re}\mu|^{-1}$, $|\operatorname{Re}\mu\omega|^{-1} = |\operatorname{Re}\mu\sqrt{d_1}/i|^{-1} = |\operatorname{Im}\mu\sqrt{d_1}|^{-1} \le \frac{1}{c}|\operatorname{Im}\mu|^{-1}$. Поэтому из (19) получаем

$$\|g_\mu m\|_\infty = O\left(\left[\frac{1}{|\operatorname{Re}\mu|} + \frac{1}{|\operatorname{Im}\mu|} \right] \|m\|_\infty \right).$$

Очевидно, что эта оценка справедлива и для $U(g_\mu m)$ и тем самым, по леммам 3 и 5, для $\|R_{1\mu} m\|_\infty$. Лемма доказана. □

4. Теперь приступим к получению основного результата статьи.

Пусть $g(\mu, r)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) $g(\mu, r)$ непрерывна по μ в круге $|\mu| \le r$ и аналитична по μ в $|\mu| < r$ при любом $r > 0$;

б) существует $C > 0$ такая, что $|g(\mu, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\mu| \le r$;

в) существуют положительные β и h такие, что $g(re^{i\varphi}, r) = O(|\psi|^\beta)$, где $\psi = \varphi$, при $|\varphi| \le h$, $\psi = \varphi - \pi$, при $|\varphi - \pi| \le h$, $\psi = \varphi - \pi/2$, при $|\varphi - \pi/2| \le h$, $\psi = \varphi + \pi/2$, при $|\varphi + \pi/2| \le h$;

г) $g(\mu, r) \to 1$, при $r \to \infty$ и фиксированном μ.

Примеры таких функций есть в [13].

В качестве обобщенных средних Рисса мы будем брать интегралы:

$$J_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) R_\lambda f(x)\,d\lambda.$$

Теорема 2 (формула остаточного члена). *Пусть $f(x)$ — непрерывная вектор-функция на отрезке $[0,1]$, $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющая условиям (2). Тогда, если на окружности $|\lambda| = r\sqrt{d_1}$ нет собственных значений оператора L, то*

$$\begin{gathered} f(x) - J_r(f, x) = f(x) - f_0(x) + (1 - g(\mu_0, r)) f_0(x) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g_0(x)\,d\lambda - J_r(f - f_0, x), \end{gathered} \tag{20}$$

где λ_0 — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L, $\mu_0 = i\lambda_0/\sqrt{d_1}$ и $g_0 = Lf_0 - \lambda_0 f_0$.

Доказательство. Имеем $g_0 = (L - \lambda E) f_0 + (\lambda - \lambda_0) f_0$. Отсюда $R_\lambda g_0 = f_0 + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_0$. Поэтому

$$\begin{gathered} J_r(f_0, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \left[-\frac{f_0(x)}{\lambda - \lambda_0} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g_0 \right] d\lambda = \\ = f_0(x) g(\mu_0, r) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g_0\,d\lambda. \end{gathered} \tag{21}$$

Теперь из $J_r(f, x) = J_r(f - f_0, x) + J_r(f_0, x)$ и (21) получаем (20). □

Лемма 7. *Пусть вектор-функция $f(x)$ с непрерывными компонентами удовлетворяет (2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор-функция $f_0(x)$ с компонентами из $C^1[0,1]$, удовлетворяющая (2), такая, что $\|f(x) - f_0(x)\|_\infty < \varepsilon$.*

Доказательство. Переходим от $f(x)$ и $f_0(x)$ к скалярным функциям $F(x)$ и $F_0(x)$ по формулам: $F(x) = f_1(x)$ $(F_0(x) = f_{01}(x))$ при $x \in [0,1]$; $F(x) = f_2(x-1)$ $(F_0(x) = f_{02}(x-1))$ при $x \in [1,2]$; $F(x) = f_3(x-2)$ $(F_0(x) = f_{03}(x-2))$ при $x \in [2,3]$ (здесь $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$, $f_0(x) = (f_{01}(x), f_{02}(x), f_{03}(x))^T$). Тогда $F(x)$ $(F_0(x))$ непрерывна (непрерывна и непрерывно дифференцируема, кроме, быть может, точек $x = 1, 2$), и утверждение леммы есть следствие соответствующего утверждения для скалярного случая. □

Теорема 3. *Если $f(x)$ — та же вектор-функция, что и в лемме 7, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - J_r(f,x)\|_\infty = 0. \tag{22}$$

Утверждение теоремы получается из теоремы 2 и леммы 7 так же, как и в [13].

Замечание. Так как $J_r(f,x)$ всегда удовлетворяет условиям (2), то из теоремы 3 следует, что (22) имеет место, тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет непрерывные компоненты и удовлетворяет (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00003).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.

2. *Babbage Ch.* An essay towards the calculus of functions // Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1816. V. 11. P. 179–226.

3. *Андреев А.А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 1126–1128.

4. *Dankl Ch.G.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311, № 1. P. 167–183.

5. *Платонов С.С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. госун-та. Сер. мат. 2004. Вып. 11. С. 15–35.

6. *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949.

7. *Хромов А.П.* Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Доклады РАЕН. 2004. № 4. С. 80-87.

8. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

9. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33-50.

10. *Корнев В.В., Хромов А.П.* Абсолютная сходимость разложений по собственным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 4. С. 59-74.

11. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.

12. *Луконина А.С.* О сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 67–70.

13. *Гуревич А.П., Хромов А.П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814.

14. *Гуревич А.П., Хромов А.П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Изв. вузов. Математика. 2001. № 8 (471). С. 38–50.

15. *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1954.

16. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.