УДК 517.984

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В работе исследуются вопросы о сходимости разложений произвольной функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией $Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x)+p_2(x)y(1-x)$, $y(0) = \gamma y(1)$. Основываясь на исследовании резольвенты более простого функционально-дифференциального оператора и используя метод контурного интегрирования резольвенты, получены достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ (аналог теоремы Жордана–Дирихле).

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, равносходимость, ряд Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \qquad y(0) = \gamma y(1),$$

где $x \in [0,1]$, $\alpha^2 \neq 1$, α, γ — комплексные постоянные, $p_i(x) \in C^1[0,1]$.

Исследование различных свойств таких операторов проводится, например, в работах [1–4] (см. также библиографию).

В [4] установлена равносходимость на отрезке $[0,1]$ рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) для оператора L и оператора

$$L_0 y = y'(1-x) + \alpha y'(x), \qquad y(0) = \gamma y(1).$$

А именно доказана следующая теорема

Теорема 1 [4]. *Пусть $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - S_r^0(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x)$ $(S_r^0(f,x))$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k| < r$ $(|\lambda_k^0| < r)$.

В данной работе получены достаточные условия сходимости ряда Фурье по с.п.ф. оператора L (аналог теоремы Жордана–Дирихле). На основании теоремы 1 исследование достаточно провести лишь для оператора L_0.

1. ФОРМУЛА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА L_0

В этом пункте приведем некоторые вспомогательные факты из [4].

Обозначим через $\widetilde{L}_0$ следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$\widetilde{L}_0 z = Bz'(x), \qquad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0.$$

Здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}$.

Пусть $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0 (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $\widetilde{R}_\lambda^0$ — резольвента оператора $\widetilde{L}_0$.

Теорема 2. *Если λ таково, что резольвента R^0_λ оператора L_0 существует и $y = R^0_\lambda f$, то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, является решением краевой задачи*

$$Bz'(x) - \lambda z(x) = F(x), \tag{1}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{2}$$

с $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$. Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (1), (2) *и задача* (1), (2) *невырождена, то R^0_λ существует и $(R^0_\lambda f)(x) = z_1(x)$, где z_1 — первая компонента решения $z(x) = \widetilde{R}^0_\lambda F$ системы* (1), (2).

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где $b = \alpha - \widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (числа $\pm\widetilde{\omega}$ — собственные значения матрицы B). Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где $D^{-1} = \mathrm{diag}(\widetilde{\omega}, -\widetilde{\omega})$. Выполнив в (1), (2) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$:

$$u'(x) - \mu D_1 u(x) = \Phi(x), \tag{3}$$

$$U_0(u) = M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{4}$$

где $D_1 = \mathrm{diag}(1, -1)$, $\mu = \lambda\omega$, $\omega = 1/\widetilde{\omega}$, $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$.

Лемма 1. *Если μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$, где $V(x,\mu) = \mathrm{diag}\,(e^{\mu x}, e^{-\mu x})$, обратима, то краевая задача* (3), (4) *однозначно разрешима при любой $\Phi(x)$ с компонентами из $L[0,1]$ и ее решение $u(x) = u(x,\mu)$ имеет вид*

$$u(x,\mu) = R_{0\mu}\Phi(x) = -V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi) + g_\mu \Phi(x), \tag{5}$$

где $g_\mu \Phi(x) = \int_0^1 g(x,t,\mu)\Phi(t)\,dt$, $U_0(g_\mu\Phi) = \int_0^1 U_{0x}(g(x,t,\mu))\Phi(t)\,dt$, ($U_{0x}$ означает, что U_0 применяется к g по переменной x), $g(x,t,\mu) = \mathrm{diag}(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu))$, $g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x) \times \times \exp\{(-1)^{k-1}\mu(x-t)\}$, при $(-1)^{k-1}\,\mathrm{Re}\,\mu \ge 0$, $g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)\exp\{(-1)^{k-1}\mu(x-t)\}$, при $(-1)^{k-1}\,\mathrm{Re}\,\mu \le 0$, $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x < t$.

Таким образом, $z(x) = \widetilde{R}^0_\lambda F(x) = \Gamma u(x,\mu) = \Gamma R_{0\mu}\Phi(x)$ и тем самым по теореме 2

$$R^0_\lambda f = [\Gamma R_{0\mu}\Phi]_1, \tag{6}$$

где $[\cdot]_1$ означает первую компоненту вектора.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Пусть $f(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ (непрерывная функция ограниченной вариации) и удовлетворяет краевому условию:

$$f(0) = \gamma f(1). \tag{7}$$

Будем считать, что $\mathrm{Re}\,\mu \ge 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

Для исследования резольвенты оператора L_0 оценим компоненты решения в (5).

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$g_\mu \Phi(x) = \frac{1}{\mu}\left\{G_1(x) + G_2(x,\mu) + G_3(x,\mu)\right\},$$

где

$$G_1(x) = (-\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T, \qquad G_2(x,\mu) = \left(e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1), -e^{-\mu x}\Phi_2(0)\right)^T,$$

$$G_3(x,\mu) = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t), -\int_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right)^T.$$

Доказательство. Имеем, используя интегрирование по частям:

$$(g_\mu \Phi(x))_1 = \int_0^1 g_1(x,t,\mu)\Phi_1(t)\,dt = -\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\Phi_1(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) - \Phi_1(x) - \int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t)\right],$$

$$(g_\mu\Phi(x))_2 = \int\limits_0^1 g_2(x,t,\mu)\Phi_2(t)\,dt = \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\Phi_2(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\left[\Phi_2(x) - e^{-\mu x}\Phi_2(0) - \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right],$$

откуда следует утверждение леммы. □

Так как в (3) $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, то очевидно утверждение

Лемма 3. *Для компонент вектора* $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T$ *в* (3) *имеют место формулы*

$$\Phi_1(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|}\left[f(x) - bf(1-x)\right], \qquad \Phi_2(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|}[bf(x) - f(1-x)],$$

где $|\Gamma| = \det\Gamma = 1 - b^2$.

Отсюда и из (7) имеем

Следствие. *Для функций* $\Phi_k(x)$ *справедливы соотношения*

$$\Phi_2(x) = -\Phi_1(1-x),$$
$$\Phi_1(0) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(\gamma - b)f(1), \qquad \Phi_2(0) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(b\gamma - 1)f(1),$$
$$\Phi_1(1) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1 - b\gamma)f(1), \qquad \Phi_2(1) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(b - \gamma)f(1).$$

Из леммы 3 и следствия из нее для компонент $g_\mu\Phi(x)$ легко получим:

$$G_1(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|}\left(bf(1-x) - f(x), bf(x) - f(1-x)\right)^T, \tag{8}$$

$$G_2(x,\mu) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1 - b\gamma)f(1)\left(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x}\right)^T. \tag{9}$$

Лемма 4. *Для компонент* $U_0(g_\mu\Phi)$ *имеют место соотношения*

$$U_0\left(G_1\right) = (0,0)^T,$$
$$U_0\left(G_2\right) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1 - b\gamma)f(1)\left[(1 - b\gamma)e^{-\mu} + (b - \gamma)\right](1,-1)^T. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем:

$$M_0\Gamma = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_1\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma - b & b\gamma - 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая (8) и (7), получим:

$$U_0(G_1) = M_0\Gamma G_1(0) + M_1\Gamma G_1(1) = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b - \gamma \\ b\gamma - 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{\omega}{|\Gamma|}f(1) +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma - b & b\gamma - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\gamma - 1 \\ b - \gamma \end{pmatrix}\frac{\omega}{|\Gamma|}f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, так как

$$U_0\left(\left(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x}\right)^T\right) = M_0\Gamma(e^{-\mu}, 1)^T + M_1\Gamma(1, e^{\mu})^T = \left[(1 - b\gamma)e^{-\mu} + (b - \gamma)\right](1,-1)^T,$$

то из (9) следует (10). □

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)}\begin{pmatrix} (b\gamma - 1)e^{-\mu} & \gamma - b \\ (b - \gamma)e^{\mu} & 1 - b\gamma \end{pmatrix},$$

где $\delta_0(\mu) = \det\Delta_0(\mu) = (\gamma - b)^2 e^{\mu} - (1 - b\gamma)^2 e^{-\mu}$.

Доказательство. Имеем:

$$\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu)) = M_0\Gamma + M_1\Gamma\,\mathrm{diag}(e^{\mu}, e^{-\mu}) = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ (\gamma - b)e^{\mu} & (b\gamma - 1)e^{-\mu} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получается явное выражение для $\delta_0(\mu)$.

Вычисляя алгебраические дополнения, получим утверждение леммы. □

Из леммы 5 сразу следует

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} (b\gamma-1)e^{-\mu(1-x)} & (\gamma-b)e^{\mu x} \\ (b-\gamma)e^{\mu(1-x)} & (1-b\gamma)e^{-\mu x} \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Имеют место соотношения*

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1) = (0,0)^T,$$
$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1-b\gamma)f(1)\begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)} \\ e^{-\mu x} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 4 первое соотношение очевидно, а для второго, учитывая, что

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)(1,-1)^T = \frac{1}{\delta_0(\mu)}\begin{pmatrix} (b\gamma-1)e^{-\mu(1-x)} - (\gamma-b)e^{\mu x} \\ (b-\gamma)e^{\mu(1-x)} - (1-b\gamma)e^{-\mu x} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\delta_0(\mu)}\begin{pmatrix} [(b\gamma-1)e^{-\mu} - (\gamma-b)]e^{\mu x} \\ [(b\gamma-1)e^{-\mu} - (\gamma-b)]e^{\mu}e^{-\mu x} \end{pmatrix},$$

имеем из (10)

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2) = \frac{\omega f(1)}{|\Gamma|\delta_0(\mu)}(1-b\gamma)\left[(1-b\gamma)e^{-\mu} + (b-\gamma)\right]\left[(b\gamma-1)e^{-\mu} - (\gamma-b)\right]\begin{pmatrix} e^{\mu x} \\ e^{\mu(1-x)}) \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{\omega f(1)}{|\Gamma|\delta_0(\mu)}(1-b\gamma)\left[(b-\gamma)^2 - (b\gamma-1)^2 e^{-2\mu}\right](e^{\mu x}, e^{\mu(1-x)})^T.$$

Отсюда, так как

$$\frac{\left[(b-\gamma)^2 - (b\gamma-1)^2 e^{-2\mu}\right]}{\delta_0(\mu)} = \frac{\left[(b-\gamma)^2 - (b\gamma-1)^2 e^{-2\mu}\right]}{(\gamma-b)^2 e^{\mu} - (1-b\gamma)^2 e^{-\mu}} = e^{-\mu},$$

получим утверждение леммы для G_2. □

Лемма 7. *Если* $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, $f(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ *и* $f(0) = \gamma f(1)$, *то*

$$R_\lambda^0 f = -\frac{\omega}{\mu}f(x) - \frac{1}{\mu}\left(\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t) + b\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right) -$$
$$-\frac{1}{\mu}\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(\left(\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t), \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right)^T\right)\right]_1. \qquad (11)$$

Доказательство. Имеем в силу (6)

$$R_\lambda^0 f = \left[\Gamma R_{0\mu}\Phi\right]_1 = \left[\Gamma(g_\mu\Phi(x) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi))\right]_1.$$

Из (8) и (9) получим:

$$\left[\Gamma G_1(x)\right]_1 = \frac{\omega}{|\Gamma|}(bf(1-x) - f(x) + b^2 f(x) - bf(1-x) = \frac{\omega}{|\Gamma|}(b^2-1)f(x) = -\omega f(x),$$
$$\left[\Gamma G_2(x,\mu)\right]_1 = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1-b\gamma)f(1)\left[\Gamma(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x})^T\right]_1 = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1-b\gamma)f(1)(e^{\mu(x-1)} + be^{-\mu x}).$$

Далее, по лемме 6

$$\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_1\right)\right]_1 = 0,$$
$$\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_2\right)\right]_1 = \frac{\omega}{|\Gamma|}(1-b\gamma)f(1)(e^{\mu(x-1)} + be^{-\mu x}).$$

Из этих соотношений следует утверждение леммы. □

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для получения основного результата используется следующее утверждение.

Лемма 8. *Если* $\varphi(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$, *то при* $\operatorname{Re}\mu \geq 0$

$$\int_0^x e^{\mu t}\, d\varphi(t) = O(e^{\mu x} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{\mu x}, \tag{12}$$

$$\int_x^1 e^{-\mu t}\, d\varphi(t) = O(e^{-\mu x} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{-\mu x}, \tag{13}$$

где $o_\delta(1) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по $x \in [0,1]$, $O(\cdot)$ не зависит от δ.

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ функция $\bigvee\limits_0^x(f) = \int\limits_0^x |df(x)|$ также непрерывна на отрезке $[0,1]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем и $\bigvee\limits_x^{x+\delta}(f) = o_\delta(1)$ для любого $x \in [0,1]$.

Если $x \geq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t}\, d\varphi(t) \right| = \left| \int_0^{x-\delta} e^{\mu t}\, d\varphi(t) + \int_{x-\delta}^x e^{\mu t}\, d\varphi(t) \right| \leq \left| e^{\mu(x-\delta)} \right| \bigvee_0^1(\varphi) + |e^{\mu x}| \bigvee_{x-\delta}^x(\varphi).$$

Если $x \leq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t}\, d\varphi(t) \right| \leq |e^{\mu x}| \bigvee_0^\delta(\varphi).$$

Отсюда следует (12). Оценка (13) получается из (12) заменой переменной. □

Теорема 3 (Жордана–Дирихле). *Если* $f(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ *и* $f(0) = \gamma f(1)$, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - S_r(f,x)| = 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$S_r^0(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1\, d\lambda. \tag{14}$$

Так как $V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) = O(1)$ и в силу леммы 8, интегралы в (11) имеют оценку $O(e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1)$, то интеграл $\int\limits_{\substack{|\mu|=r \\ \operatorname{Re}\mu\geq 0}}$ от второго и третьего слагаемых в (11) есть $o(1)$. Аналогичный результат может быть получен при $\operatorname{Re}\mu \leq 0$, причем в этом случае первое слагаемое в $R_\lambda^0 f$ имеет тот же вид $-\dfrac{\omega}{\mu} f(x)$. А так как

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\omega}{\mu}\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\omega}{\lambda\omega}\, d\lambda = 2\pi i,$$

то из (14) получим:

$$S_r^0(f,x) = f(x) + o(1),$$

откуда в силу теоремы 1 следует утверждение теоремы. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238а).

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–404.

2. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949. DOI: 10.4213/mzm1472.

3. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С.,*

Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 4. С. 1309–1312.
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 3–10.

Jordan–Dirichlet Theorem for Functional Differential Operator with Involution

M. Sh. Burlutskaya

Voronezh State University, Russia, 394006, Voronezh, Universitetskaya pl., 1, bmsh2001@mail.ru

In this paper the problem of decomposability of a function $f(x)$ into Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of a functional-differential operator with involution $Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x)$, $y(0) = \gamma y(1)$ is investigated. Based on the study of the resolvent of the operator easier and using the method of contour integration of the resolvent, we obtain the sufficient conditions for the convergence of the Fourier series for a function $f(x)$ (analogue of the Jordan–Dirichlet's theorem).

Key words: functional-differential operator, involution, equiconvergence, Fourier series.

References

1. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355.
2. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 5–6, pp. 804–813. DOI: 10.4213/mzm1472.
3. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Lukonina A. S., Khromov A. P. A functional-differential operator with involution. *Doklady Math.*, 2007, vol. 75, no 3, pp. 399–402.

4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 3–10 (in Russian).

УДК 501.1

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НЕКОТОРОГО ОДНОМЕРНОГО ОРБИФОЛДА

Е. Ю. Волокитина

Ассистент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, evgenia.yu@gmail.com

И. М. Гельфанд и Д. Б. Фукс доказали, что когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности изоморфны тензорному произведению кольца полиномов с одной образуюшей степени 2 и внешней алгебры с одной образующей степени 3. В настоящей статье изучаются когомологии алгебры Ли векторных полей одномерного орбифолда $S^1/\mathbb{Z}_2$, который представляет собой пространство орбит при действии группы $\mathbb{Z}_2$ на окружности отражением относительно оси Ox. Доказано, что рассматриваемые когомологии изоморфны тензорному произведению внешней алгебры с двумя образующими степени 1 и кольца полиномов с одной образующей степени 2. В доказательстве используется метод Гельфанда–Фукса с модификациями для данного случая.

Ключевые слова: орбифолд, алгебра Ли, когомологии.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть S^1 — единичная окружность в плоскости комплексного переменного z, t — угловой параметр на окружности. Обозначим через $X = S^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолд, получающийся из окружности, действием группы $\mathbb{Z}_2$, порожденной отражением относительно оси Ox. $S^1/\mathbb{Z}_2$ — один из естественных одномерных орбифолодов. У данного орбифолда существует две особые точки, соответствующие значениям углового параметра $t = 0$ и $t = \pi$. Обозначим через $\mathscr{U}(S^1)$ и $\mathscr{U}(X)$ алгебры Ли гладких векторных полей на окружности и орбифолде X соответственно. Под гладкостью здесь и далее будем понимать гладкость класса C^∞. Алгебра Ли $\mathscr{U}(S^1)$ — топологическая алгебра Ли с C^∞-топологией, $\mathscr{U}(X)$ — ее замкнутая подалгебра.