ХРОНИКА

ПЕТР ЛАВРЕНТЬЕВИЧ УЛЬЯНОВ

С.И. Дудов[*], А.М. Захаров[**], Д.В. Прохоров[**], А.П. Хромов[***]

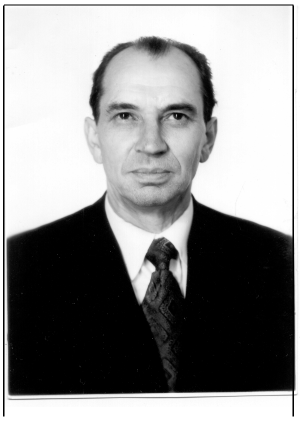
Саратовский государственный университет,
[*]кафедра математической экономики,
[**]кафедра математического анализа,
[***]кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Статья посвящена памяти Петра Лаврентьевича Ульянова –- выдающегося математика, действительного члена Российской академии наук, заведующего кафедрой теории функций и функционального анализа Московского государственного университета. В ней приводятся биографические данные и основные научные достижения П.Л. Ульянова.

Petr Lavrentievich Ulianov

S.I. Dudov, A.M. Zakharov, D.V. Prokhorov, A.P. Khromov

The paper is dedicated to the memory of prof. P. L. Ulyanov, a remarkable mathematician, a full member of Russian Academy of Sciences, a head of the function theory and functional analysis department of Moscow State University. The paper tells about prof. P.L. Ulyanov biography and his major scientific achievements.



13 ноября 2006 года перестало биться сердце Петра Лаврентьевича Ульянова — выдающегося математика, действительного члена Российской академии наук, заведующего кафедрой теории функций и функционального анализа Московского государственного университета, а также нашего земляка, имя которого вошло в энциклопедию Саратовского края.

П.Л. Ульянов родился 3 мая 1928 года в селе Слепцовка Аткарского уезда Саратовской области в семье крестьянина. Когда он заканчивал среднюю школу, то узнал об открытии механико-математического факультета в Саратовском университете и решил пойти туда учиться. Его учителями в университете были профессора Г.П. Боев, С.Г. Лехницкий, Н.Г. Чудаков, доценты Ю.Е. Пензов, Г.Н. Положий и другие. На третьем курсе он писал курсовую работу под руководством Г.П. Боева по аналитической теории дифференциальных уравнений, а на четвертом курсе — под руководством Г.Н. Положего о продолжении аналитических функций. В 1949 году Г.Н. Положий уехал в Киевский университет, и Петр Лаврентьевич стал писать дипломную работу у Н.П. Купцова, который только что приехал в Саратов после окончания аспирантуры в МГУ у профессора Д.Е. Меньшова. В дипломной работе Петр Лаврентьевич дал новое доказательство теоремы Каратеодори о соответствии границ при конформном отображении.

Все годы учебы в университете П.Л. Ульянов получал на экзамене только отличные оценки, занимался научной работой, с третьего курса был сталинским стипендиатом. Прекрасную учебу он сочетал с активной работой (был секретарем комсомольской организации факультета) и занятиями спортом: он закончил трехгодичную

ХРОНИКА

спортивную школу при обществе «Наука» и довольно часто выступал в соревнованиях по лыжным гонкам, завоевывая первые места. До конца жизни лыжные прогулки по лесу были для него лучшим зимним отдыхом. После окончания Саратовского университета П.Л. Ульянов был рекомендован в аспирантуру СГУ, но по совету одного аспиранта решил попытаться сдать экзамены в аспирантуру МГУ, куда и был принят. Его научным руководителем была профессор Н.К. Бари. В 1953 году П.Л. Ульянов досрочно защитил кандидатскую диссертацию «Применение A-интеграла к тригонометрическим рядам и некоторые теоремы о сходимости рядов Фурье», признанную ученым советом выдающейся. После окончания аспирантуры встал вопрос: где работать? Можно было вернуться в Саратовский университет, но возникли проблемы с жильем. Единственное, на что можно было рассчитывать — это комната в общежитии на Цыганской улице. Поэтому Петр Лаврентьевич согласился на предложение остаться работать в Московском университете, где ему дали комнату в коммунальной квартире в новом доме. И с этого времени вся его жизнь связана с кафедрой теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ. С 1953 года он работал на этой кафедре сначала ассистентом, потом доцентом и профессором, а с 1979 года — заведующим кафедрой. Одновременно по совместительству он работал в отделе теории функций Математического института им. В.А. Стеклова.

В 1960 году П.Л. Ульянов защитил докторскую диссертацию на тему «Интеграл типа Коши. Сходимость и суммируемость». Диссертация, так же как и кандидатская, была признана ученым советом выдающейся.

Основные направления научной деятельности П.Л. Ульянова посвящены теории интеграла и его применениям в вещественном и комплексном анализе, теории тригонометрических и ортогональных рядов, вопросам суммирования рядов и последовательностей по системе Хаара, теоремам вложения, теории приближения функций, вопросам представления и изучения пространств функций $\varphi(L)$, алгебрам функций.

Сформулируем некоторые наиболее значимые утверждения П.Л. Ульянова, полученные им в теории функций.

1. A-ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция $f(t)$ называется A-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если мера $\mu(\{t:\ |f(t)|\geq n\}) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b [f(t)]_n\,dt = J,$$

где $[f(t)]_n = f(t)$ при $|f(t)|\leq n$ и $[f(t)]_n = 0$ при $|f(t)|>n$. В этом случае полагают

$$J = (A)\int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

Данное определение было введено в теории вероятностей А.Н. Колмогоровым и в теории функций Титчмаршем.

Аналогичное определение вводится и для A-интеграла по кривым от функций комплексного переменного.

Справедливы утверждения:

1) Для достаточно гладких замкнутых жордановых контуров $\ell = \{z:\ z = z(s)\}$ (например, $z'(s)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с некоторым $\alpha>0$) всякий интеграл типа Коши – Лебега является *A-интегралом Коши* от предельных значений (результат нов и для случая окружности $\{|\xi|=1\}$). Более точно, пусть G — конечная область, ограниченная кривой ℓ, и суммируемая функция $f(\xi)\in L(\ell)$. Тогда интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}(L)\int\limits_\ell \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}(A)\int\limits_\ell \frac{F_i(\xi)}{\xi - z}\,d\xi,$$

для $z\in G$, где $F_i(\xi)$ — угловые предельные значения $F(z)$ при $z\to\xi\in\ell$ с $z\in G$. Функция $F_i(\xi)$ может оказаться неинтегрируемой на ℓ ни в смысле Лебега, ни в смысле Данжуа.

2) Из утверждения 1) вытекает, что если функция $F_i(\xi)$ *интегрируема по Лебегу* на ℓ, то интеграл *типа Коши – Лебега* от f превращается в *интеграл Коши – Лебега* от $F_i(\xi)$ на ℓ. Для случая единичной окружности этот результат был получен В.И. Смирновым.

3) Если $a_n \downarrow 0$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = f(t)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt = g(t)$ сходятся на $(0, 2\pi)$ к A-интегрируемым функциям и являются рядами Фурье в смысле A-интегрирования от этих функций. При этом данные функции могут быть неинтегрируемы по Лебегу на $[0, 2\pi]$.

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Базис $\{f_n\}$ в пространстве $L^2(a,b)$ (в частности, полная ортонормированная система (ОНС)) является *системой сходимости почти всюду*, если ряд Фурье от любой функции $f \in L^2(a,b)$ по системе $\{f_n\}$ сходится почти всюду на (a,b).

1) Всякий базис $\{f_n\}$ в пространстве $L^2(a,b)$ после некоторой перестановки $\{f_{\sigma(n)}\}$ не является системой сходимости почти всюду, т.е. после некоторой перестановки базис становится «плохим» для сходимости почти всюду.

Для тригонометрической системы этот результат был сформулирован А.Н. Колмогоровым в 1927 году.

Заметим, что до сих пор не решена проблема о том, можно ли *любую* ОНС переставить так, чтобы она стала системой сходимости почти всюду.

2) Существуют *полные* ОНС, которые *не имеют* точного множителя Вейля для безусловной (т.е. при всех порядках) сходимости почти всюду рядов Фурье из L^2.

3) Функция $f \in H_p^{\omega}(a,b)$, если $\omega_p(\delta, f) \equiv \sup\limits_{0 \le h \le \delta} \left(\int\limits_a^b |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = O(\omega(\delta))$, где $\omega = \omega(\delta)$ — заданная гладкость. Справедливо утверждение: если дано число $p \in (1, \infty)$, то для равномерной сходимости на отрезке $[0, 2\pi]$ тригонометрического ряда Фурье от всякой 2π-периодической функции $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0, 2\pi)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \tag{1}$$

4) Для любой последовательности $\{a_n\} \notin \ell_2$ существует ортогональный ряд $\sum\limits_{\ell_2} a_n \varphi_n(t)$, который всюду сходится к $+\infty$. Это утверждение теряет силу при $\{a_n\} \in \ell_2$.

3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

В этом направлении были получены необходимые и достаточные условия для разных вложений.

1) Пусть даны числа $0 < \alpha \le 1 \le p < \nu < \infty$, класс $\mathrm{Lip}\,(\alpha, \nu) \equiv H_\nu^{\delta^\alpha}(0,1)$. Тогда для вложения $H_p^{\omega(\delta)} \subset \mathrm{Lip}\,(\alpha, \nu)$ необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}})$ при $\delta \to 0$.

Достаточность была установлена Харди и Литтльвудом в 1928 году, а необходимость — П.Л. Ульяновым в 1968 году.

2) Всякая функция $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0,1)$ с $1 \le p < \infty$ эквивалентна непрерывной функции тогда и только тогда, когда выполнено (1).

3) Вложение $H_p^{\omega(\delta)} \subset L^\nu(0,1)$ с $1 \le p < \nu < \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Наиболее сложным было доказательство утверждения 3). Из него можно было выводить результаты, характеризующие взаимосвязь наилучших приближений и модулей непрерывности в различных метриках.

Полученные результаты потом распространялись на функции многих переменных.

4. СИСТЕМА ХААРА $\{X_m\}$

1) Положительная последовательность $\tau(m) \uparrow$ является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе Хаара $\{X_m\}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\tau(m)} < \infty.$$

Для тригонометрических рядов до сих пор не получен окончательный результат в этом направлении.

2) Если $a_m \downarrow 0$, то ряд $\sum a_m X_m(t)$ сходится почти всюду на $[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\{a_m\} \in \ell_2$.

3) Для того чтобы всякая функция $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0,1)$ с $1 \le p < \infty$ раскладывалась в ряд Фурье – Хаара *абсолютно* сходящийся всюду на $[0,1]$, необходимо и достаточно выполнения неравенства (1).

4) Для частных сумм $s_n(t,f)$ ряда Фурье – Хаара от функции $f \in L^p(0,1)$ справедлива оценка типа Джексона, т.е.

$$E_n^{(p)}(f) \le \|f(t) - s_n(t,f)\|_p \le 24\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

при $n \ge 1$ и $p \in [1,\infty)$, где $E_n^{(p)}(f)$ — наилучшие приближения в L^p функции f полиномами порядка n по системе Хаара.

Эта оценка для $p = \infty$ была ранее (в 1953 г.) установлена Б.С. Надем.

5) Пусть $A_1 = \left\{f : \sum\limits_{m=1}^{\infty} |(f, X_m)| < \infty\right\}$, а функция $\varphi(t)$ определена на прямой $(-\infty, +\infty)$. Тогда для того чтобы функция $\varphi(f) \in A_1$ при всякой функции $f \in A_1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi \in \mathrm{Lip}\,1$, т.е. $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le D|x-y|$ при всех x и y из $(-\infty, +\infty)$.

Это утверждение указывает на принципиальное различие поведения рядов Фурье – Хаара от поведения тригонометрических рядов Фурье, где от функции φ требовалась аналитичность на множестве $\{f([0,2\pi])\}$ для сохранения класса A_1 (теоремы Леви и Кацнельсона).

5. КЛАССЫ $\varphi(L)$

$\varphi(L)$ — класс измеримых функций, определяемых следующим образом:

$$\varphi(L) = \left\{f : \int\limits_0^1 \varphi(f(t))\,dt < \infty\right\},$$

где $\varphi(t)$ — конечная, четная, неотрицательная и неубывающая на $[0,\infty)$ функция, такая что $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Под обобщенным φ-расстоянием понимается число $\rho_\varphi(f,g) = \int\limits_0^1 \varphi(f(t) - g(t))\,dt$.

П.Л. Ульянов показал, что всякую функцию $f \in \varphi(L)$ можно приблизить по φ-расстоянию сколь угодно точно алгебраическими или тригонометрическими полиномами и для этого необходимо и достаточно, чтобы: а) $\varphi(+0) = 0$ и б) $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}} \dfrac{\varphi(u+1)}{\varphi(u)} < \infty$.

Если же функция $f \in \varphi(L)$ неотрицательна, то для ее приближения необходимо и достаточно лишь выполнения условия а).

С помощью φ-расстояния можно сделать множество $\varphi(L)$ топологическим пространством. Оно будет сепарабельным в том и только том случае, когда будут выполнены приведенные выше условия а) и б). Если $\varphi(t) \in C[0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, то для метризуемости пространства необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ при $t \to \infty$.

Исследования П.Л. Ульянова послужили стимулом для их дальнейшего развития в работах многих математиков, отечественных и зарубежных (В.А. Андриенко, С.В. Бочкарев, Р. Ганди, А. Гарсиа, Б.И. Голубов, Л.В. Жижиашвили, Б.С. Кашин, В.И. Коляда, В.Г. Кротов, Л. Лейндлер, Т.П. Лукашенко, Ф. Мориц, Е.М. Никишин, А.М. Олевский, М.К. Потапов, А.И. Рубинштейн, Э.А. Стороженко, Л.В. Тайков, А.А. Талалян, К. Тандори, Н. Термингалиев, М.Ф. Тиман, К. Чень, З. Чисельский, Г.А. Чхаидзе и др.)

Далеко не все поставленные П.Л. Ульяновым задачи и проблемы решены и сегодня.

Научные результаты П.Л. Ульянова представлены в более чем 150 научных работах (среди них монография и более 10 обзорных статей). Среди его учеников около 50 кандидатов наук и 15 докторов.

П.Л. Ульянов являлся членом редколлегий ряда престижных математических журналов («Математический сборник», «Математические заметки», «Известия вузов. Математика», «Analysis Mathematic», «Вестник Московского университета»), был в редакции по изданию «Математической энциклопедии», около 30 лет работал в составе ВАК по присуждению ученых степеней и званий.

Огромна роль Петра Лаврентьевича Ульянова в подготовке и становлении отечественных научных математических кадров. С 1959 года он являлся одним из руководителей научного семинара по теории функций действительного переменного в Московском университете, семинара, ведущего свое начало от Н.Н. Лузина, основателя знаменитой научной школы по теории функций.

На протяжении всей своей жизни Петр Лаврентьевич поддерживал связь с саратовскими математиками: встречался с ними на съездах и конференциях, слушал и обсуждал их научные доклады на семинаре в МГУ. Этот научный контакт наладился после организации в 1981 году саратовских зимних школ по теории функций и приближений. Председателем оргкомитета сначала был академик С.М. Никольский, а позже стал П.Л. Ульянов. В Саратове главным организатором был профессор А.А. Привалов; после его кончины в 1993 году обязанности организатора взял на себя профессор А.П. Хромов. Саратовские зимние школы проводятся каждые два года, эта регулярность является мощным стимулом научной работы, и поэтому зимние школы стали настоящей кузницей научных кадров.

Многие саратовские (и не только саратовские) ученые-математики получили на этих школах путевки в научную жизнь. Организация таких школ — это реальная работа по возрождению и сохранению отечественной науки, и роль Петра Лаврентьевича в этой работе трудно переоценить. При его активном содействии школы по теории функций были организованы и в Воронеже, и в Казани.

П.Л. Ульянов был избран в 1981 году членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 2006 году, за несколько месяцев до кончины, — действительным членом РАН. Кроме этого он являлся действительным членом Международной академии наук высшей школы и заслуженным профессором МГУ.

Основные научные труды П.Л. Ульянова

Об интегралах типа Коши // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 60;

Решённые и нерешённые проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. 1964. Т. XIX, № 1.

Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 2.

Теоремы вложения и отношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1.

Подпоследовательности сходимости рядов // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1965. Т. 86 (в соавт.).

Влияние Андрея Николаевича Колмогорова на мою жизнь // Колмогоров в воспоминаниях. М., 1993.

Мера и интеграл. М., 1998 (в соавт.).

Действительный анализ в задачах. М., 2005 (в соавт.)

Литература о П.Л. Ульянове

Научная элита. Кто есть кто в Российской академии наук. (Справочник)// Успехи мат. наук. 1998. Т.53, № 3.