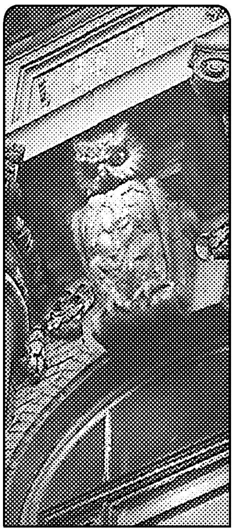

МАТЕМАТИКА

УДК 511.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ Г. И. АРХИПОВА

В. Н. Чубариков

Доктор физико-математических наук, декан механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, chubarik1@mech.math.msu.su

В статье приводятся основные научные открытия выдающегося математика Г. И. Архипова за период с конца 1960-х гг. до середины 2000-х гг.

Ключевые слова: суммы Г. Вейля, оценки простых тригонометрических сумм, проблема Гильберта–Камке.

Геннадий Иванович Архипов родился 12 декабря 1945 г. в г. Ельце Липецкой области. В семье было еще двое детей, старше его, сестра Светлана и брат Александр. Родители, Иван Филиппович и Елена Михайловна, были служащими, во время войны находились в эвакуации в Ельце, после войны вернулись в родной г. Орел. На формирование характера маленького Гены большое влияние оказали бабушка Марфа Давыдовна, сестра Светлана и первый учитель математики и физики Геннадий Николаевич Плотников, к которым Геннадий Иванович сохранил горячую любовь, уважение и искреннюю признательность.

С раннего детства Геннадия окружала послевоенная обстановка почти полностью разрушенного Орла, которая оказала сильное влияние на формирование характера. Это и направило его душу на служение обществу, людям. Отсюда — открытость к их заботам и глубокое сопереживание человеческому горю и невзгодам, резкое неприятие несправедливости, готовность без промедления прийти на помощь и добиваться истины. Геннадий Иванович с участием относился не только к несчастьям, но еще в большей степени — к радостям и успехам окружавших его людей. Он обладал редким чувством неподдельного искреннего сопереживания, и поэтому помощь и советы Геннадия Ивановича воспринимались с благодарностью.

С 1953 г. по 1963 г. Г. И. Архипов успешно учился в 24-й средней школе г. Орла, побеждал в областных школьных олимпиадах по математике и физике и представлял Орловскую область на Всероссийских математических олимпиадах. В 1964 г. он окончил специализированную школу-интернат № 18 физико-математического профиля при МГУ в составе ее первого выпуска. В том же году он стал победителем Международной математической олимпиады школьников и был зачислен студентом механико-математического факультета МГУ. В 1969 г. Г. И. Архипов окончил его и поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, которую закончил в 1972 г. В 1975 г. он защитил там блестящую кандидатскую диссертацию на тему «Кратные тригонометрические суммы и приложения» (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба).

С 1983 г. — по приглашению академика И. М. Виноградова — до последних дней жизни (2013 г.) Г. И. Архипов работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1984 г. он защитил выдающуюся докторскую диссертацию на тему «Исследования по проблеме Гильберта–Камке». В 1992 г. эти исследования были отмечены премией имени А. А. Маркова Российской академии наук. Его научные работы неоднократно признавались лучшими по РАН и по Математическому институту им. В. А. Стеклова РАН.

С 1985 г. Г. И. Архипов начинает работать по совместительству сначала доцентом, а затем профессором кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, являясь одним из ведущих лекторов по основному курсу математического анализа.

В 1999 г. Г. И. Архипов в соавторстве с В. А. Садовничим и автором этой статьи подготовил отвечающий современному уровню преподавания учебник «Лекции по математическому анализу», выдержавший уже 6 изданий. Его первое издание в 2000 г. удостоено диплома Ассоциации книгоиздателей России за создание нового учебника. Недавно этот учебник переведен на китайский язык.

Геннадий Иванович является соавтором оригинальных монографий «Кратные тригонометрические суммы»(1980), «Теория кратных тригонометрических сумм»(1987), «Тригонометрические суммы в теории чисел и анализе»(2004), которые стали настольными руководствами для специалистов по аналитической теории чисел в России и за рубежом.

Геннадий Иванович принимал активное участие в организации и проведении научных школ, семинаров и конференций по теории чисел и алгебре. Много сил и энергии им отдано студентам, аспирантам и стажерам. Он оказал огромное влияние на многих известных математиков, работающих в разных странах мира. Среди его учеников доктора и кандидаты наук. Г. И. Архипов обладал поистине энциклопедическими знаниями во многих областях науки и культуры.

Г. И. Архипов скончался в Москве 14 марта 2013 г.

Перейдем к обзору научного творчества Геннадия Ивановича. Оно отражает черту характера его личности — глубоко, до мельчайших деталей, изучить исследуемое явление и изложить найденное решение задачи наиболее простым и понятным образом, поэтому его научные работы читаются очень легко и имеют определенную завершенность.

1. КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

Постановка проблемы принадлежит И. М. Виноградову. В монографии [1, введение] он пишет: «Одною из важнейших для теории чисел проблем является установление различного рода закономерностей в распределении значений функции $f(x_1,\ldots,x_r)$ от одной или более переменных... Из весьма разнообразных более частных видов этой в столь общей формулировке поставленной проблемы, получаемых при тех или иных ограничениях, налагаемых как на функцию $f(x_1,\ldots,x_r)$, так и на совокупность Ω, мы выделим три достаточно большие и весьма важные для теории чисел проблемы.

1. Весьма важной является проблема распределения значений показательной функции

$$f(x_1,\ldots,x_r)=e^{2\pi iF(x_1,\ldots,x_r)},$$

где $F(x_1,\ldots,x_r)$ — вещественная функция; наиболее существенным в этой проблеме является установление верхней границы модуля суммы

$$S=\sum_{\Omega} f(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{\Omega} e^{2\pi iF(x_1,\ldots,x_r)}$$

всех значений функции $f(x_1,\ldots,x_r)$ в том случае, когда число T точек совокупности Ω конечно.

2. С рассмотренной проблемой 1 самым тесным образом связана проблема распределения значений дробных частей

$$f(x_1,\ldots,x_r)=\{F(x_1,\ldots,x_r)\}$$

вещественной функции $F(x_1, \ldots, x_r)$. Как и в проблеме 1, мы ограничимся здесь лишь рассмотрением случая, когда число T точек совокупности Ω конечно.

3. Особый интерес представляют законы распределения значений функции $f(x_1, \ldots, x_r)$, принимающей для точек $(x_1, \ldots, x_r)$ совокупности Ω целочисленные значения. Здесь в отношении каждого данного целого N возникает вопрос: для скольких точек совокупности Ω это N будет служить значением функции $f(x_1, \ldots, x_r)$; иными словами: каково будет число $I(N)$ решений неопределенного уравнения:

$$f(x_1, \ldots, x_r) = N. \tag{17}$$

В некоторых случаях здесь речь идет только об установлении неравенства $I(N) > 0$, показывающего, что уравнение (17) разрешимо; в других случаях оказывается возможным установить для $I(N)$ асимптотическую формулу; наконец, иногда вопрос ставится о разыскании точного значения $I(N)$, и т. д.»

Г. И. Архипов внёс большой вклад в решение каждой из трёх проблем (см. [2–5]). Так, в своей кандидатской работе он получил первые существенные результаты теории кратных тригонометрических сумм, являющиеся решением первых двух приведенных выше проблем И. М. Виноградова. Эти исследования были отмечены как лучшие по Академии наук СССР за 1976–1980 гг.

Сначала Г. И. Архипов решил проблему моментов теории кратных тригонометрических сумм, составившую первый шаг в решении проблемы 1 И. М. Виноградова. Приведем ее формулировку в виде, данном в оригинальных работах Г. И. Архипова.

Рассмотрим множество пар целых чисел (m, t) с условиями $0 \le t \le m \le n$, где n — натуральное, $n > 4$. Всего таких пар будет

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

Занумеруем эти пары числами $0, 1, \ldots, \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ так, чтобы разные пары имели разные номера и номер пары (m_1, t_1) был больше номера (m_2, t_2), если или $m_1 > m_2$, или $m_1 = m_2, t_1 > t_2$. В дальнейшем символ $l = l(m,t)$ всегда будет обозначать определенный таким образом номер пары (m,t). Очевидно, что $l = \dfrac{m(m+1)}{2} + t$. Обратно, если l — номер пары (m,t), то m является наибольшим целым числом с условием $\dfrac{m(m+1)}{2} \le l$, а $t = l - \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Пусть K — натуральное, τ — неотрицательное целое,

$$K \ge 2n^3 + n^2\tau, \qquad N = \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1,$$

$\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ — действительные числа;

$$f(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \cdots + \alpha_N y^N = \sum_{m=0}^{n}\sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t,$$

где $l = \dfrac{m(m+1)}{2} + t$. Положим $S(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) = \sum\limits_{x=1}^{P}\sum\limits_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(x,y)}$.

Теорема 1.1. *При* $P \ge (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\tau}$ *имеет место оценка*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)|^{2K}\, d\alpha_0 \ldots d\alpha_N \le K^{2n^2\tau} 2^{3n^3\tau} P^{4K - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau}.$$

В основе доказательства этой теоремы лежат два оригинальных вспомогательных утверждения.

Рассмотрим систему сравнений в кольце классов вычетов по модулю p^n, p — простое,

$$\sum_{k=1}^{2n^2} (-1)^k z_k^{m-t} v_k^t \equiv \lambda_l \pmod{p^m},$$

где λ_l при $l = 0, 1, \ldots, N$ — фиксированные целые, z_k, v_k при $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$ — неизвестные. Обозначим эту систему сравнений буквой W, а число ее решений символом $T(W)$.

Лемма 1.1. *Пусть строки матрицы B, соответствующей набору $(z_1, v_1, \ldots z_{2n^2}, v_{2n^2})$, (т. е. $B = (b_{l,k})$, $b_{l,k} = z_k^{m-t} v_k^t$ при $l = 0, 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$) линейно независимы над Z_p — полем вычетов по модулю p. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$T(W) \le n^{2n^2} p^{4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}.$$

Уточним обозначения. Пусть A — $(N+1)$-мерный вектор, $A = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$, Ω обозначает $(N+1)$-мерный единичный куб. Положим

$$f_A(x, y) = f(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t, \qquad l = \frac{m(m+1)}{2} + t,$$
$$S_Q(A) = S_Q(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) = \sum_{1 \le x \le Q} \sum_{1 \le y \le Q} e^{2\pi i f_A(x,y)},$$

где $Q > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ — целочисленный вектор размерности $N+1$; (A, Λ) — скалярное произведение векторов A и Λ. Обозначим

$$J(n, K, Q, \Lambda) = \int\limits_{\Omega} |S_Q(A)|^{2K} e^{-2\pi i (A, \Lambda)} dA.$$

При $\Lambda = 0$ величину $J(n, K, Q, \Lambda)$ будем обозначать символом $J_0(n, K, \Lambda)$.

Лемма 1.2. *Пусть $Q > 0$, p — простое, $\frac{2}{3} Q^{1/n} \le p \le Q^{1/n}$, $p \ge n^2$. Тогда*

$$J_0(n, K, Q) \le K^{2n^2} 2^{3n^3 - 1} p^{4K - 4n^2 + 4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}} J_0\left(n, K - n^2, \frac{Q}{p} + 1\right).$$

2. ОЦЕНКА ДВОЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

Пусть, как и раньше, многочлен

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t$$

с вещественными коэффициентами α_l имеет степень n, причем $0 \le t \le m \le n$ и $l = \dfrac{m(m+1)}{2} + t$. Далее, пусть

$$S_P(A) = \sum_{x=1}^{P} \sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(x,y)}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\alpha_l = \alpha_{m,t} = u\beta_{m,t}$, $l = 0, \ldots, N = n(n+3)/2$, и пусть для некоторого коэффициента $\beta_{r,s}$ справедливы соотношения*

$$\beta_{r,s} = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{qQ}, \qquad (p, q) = 1, \qquad |\theta| < 1,$$

и, кроме того,

$$P^{1/2} \le q \le Q, \qquad Q = P^{r-1/2}, \qquad P \ge 1.$$

Положим $\rho^{-1} = 25n^3(1 + \ln n)$. Тогда при натуральном u, не превосходящем $P^{2\rho}$, имеет место оценка

$$|S_P(A)| < 2^{5n} P^{2-\rho}.$$

В основе доказательства теоремы 2, кроме теоремы Г. И. Архипова о среднем значении двойной тригонометрической суммы, лежит следующая оригинальная комбинаторная лемма.

Пусть

$$f(x+a, y+b) - f(x+a_0, y+b_0) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r} B_{r,s}x^{r-s}y^s,$$

$$F_{r,s,m} = \sum_{t=s}^{m-r+s} \alpha_{m,t}\binom{m-t}{r-s}\binom{t}{s}(a^{m-1-r+s}b^{t-s} - a_0^{m-1-r+s}b_0^{t-s}).$$

Лемма 2.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$a) \quad B_{r,s} = \sum_{m=r}^{n} F_{r,s,m} = \sum_{m=r+1}^{n} F_{r,s,m},$$

$$b) \quad B_{r,s} = \sum_{m=r+1}^{n}\sum_{t=s}^{m-r+s-1} \frac{(m-t-1)!t!}{(r-s)!s!(m-r)!} Q_{m,t}^{(r,s)} F_{m-1,t,m},$$

где $Q_{m,t}^{(r,s)} = Q(m,t,r,s,a,b,a_0,b_0)$ *— коэффициент при* z^t *в разложении по степеням* z *функции*

$$g(z) = \sum_{t=s}^{m-r+s-1} Q_{m,t}^{(r,s)} z^t = z^s\frac{(a+bz)^{m-1} - (a_0+b_0z)^{m-1}}{(a+bz)-(a_0+b_0z)}.$$

3. ДРОБНЫЕ ДОЛИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Завершает исследования в кандидатской диссертации Г. И. Архипова решение проблемы 2 И. М. Виноградова о равномерном распределении по модулю 1 значений многочленов от двух переменных с хотя бы одним иррациональным коэффициентом.

Теорема 3.1. *Пусть* $P \geq 1$ *и для некоторого коэффициента* $\alpha_{r,s}$ *многочлена* $f(x,y)$ *справедливы соотношения*

$$\alpha_{r,s} = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{qQ}, \qquad (p,q)=1, \qquad |\theta|<1, \qquad P^{1/2} \leq q \leq Q, \qquad Q = P^{r-1/2}.$$

Пусть, далее, σ *— любое число, заключенное в промежутке* $0 < \sigma \leq 1$, *и* $D(\sigma)$ *— количество пар* $(x,y), \quad x,y = 1,2,3,\ldots,P$ *с условием* $\{f(x,y)\} < \sigma$. *Представим* $D(\sigma)$ *в следующем виде:*

$$D(\sigma) = P^2\sigma + \lambda(\sigma).$$

Тогда имеет место оценка

$$|\lambda(\sigma)| \leq P^{2-\rho_1}, \rho_1^{-1} = 26n^3(1+\ln n).$$

4. ИНТЕГРАЛ И. М. ВИНОГРАДОВА

Получены точные оценки моментов тригонометрических сумм Г. Вейля при малых значениях степени осреднения.

Пусть буква S обозначает тригонометрическую сумму Г. Вейля вида

$$S = S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{x=1}^{P} \exp\{2\pi i f(x)\},$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Интеграл J вида

$$J = J(P;k,n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|^{2k}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

называется интегралом И. М. Виноградова.

Теорема 4.1. *Пусть* $\tau, r_1, \dots, r_\tau, k$ — *натуральные числа, где* $\tau \ge 1$ *и* $1 = r_1 \le r_2 \le \dots \le r_\tau \le n$. *Далее, положим*

$$\Delta(\tau) = \left(n - \frac{r_\tau - 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(n - \frac{r_{\tau-1} - 1}{2}\right) + \dots +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{r_{\tau-1}}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{r_2}\right)\left(n - \frac{r_1 - 1}{2}\right),$$
$$\kappa_\tau = \sum_{j=1}^{\tau}(r_j^2 + \Delta(j)).$$

Тогда при $k \ge n\tau$ *и* $P \ge 1$ *справедлива следующая оценка:*

$$J = J(P; n, k) \le n^{2\Delta(\tau) r_\tau} 2^{\kappa_\tau} (8k)^{2n\tau} P^{2k - \Delta(\tau)}.$$

В частности, отсюда следует, что для любого ε с условием $0 < \varepsilon < 1/2$, $k \le \varepsilon^2$ и $k = mn$, m — натуральное число, справедлива следующая оценка:

$$J = J(P; n, k) \ll P^{k(1+\varepsilon)}.$$

5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПРОБЛЕМА ХУА ЛО-КЕНА

Решена проблема Хуа Ло-Кена о показателе сходимости особого интеграла $\theta = \theta(k)$ проблемы Терри, который имеет вид

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)\} \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Интеграл* $\theta = \theta(k)$ *сходится при* $2k > 0,5(n^2 + n) + 1$ *и расходится при* $2k \le 0,5(n^2 + n) + 1$.

Далее сформулируем теорему о показателе сходимости особого интеграла, отвечающего неполной системе уравнений в проблеме Гильберта–Камке.

Теорема 5.2. *Пусть натуральные числа* $r, m, \dots, n$ *удовлетворяют условиям* $r < \dots < m < n$ *и* $r + \dots + m + n < n(n+1)/2$,

$$\theta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \alpha_m x^m + \dots + \alpha_r x^r)\} \right|^{2k} d\alpha_n d\alpha_m \dots d\alpha_r.$$

Тогда интеграл θ' *сходится при* $2k > n + m + \dots + r$ *и расходится при* $2k \le n + m + \dots + r$.

6. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Тригонометрические суммы с многочленом в экспоненте, следуя И. М. Виноградову, будем называть суммами Г. Вейля. Они имеют вид

$$S = S(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \dots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp\{2\pi i F_A(x_1, \dots, x_r)\},$$

где $F_A(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами $\alpha(t_1, \dots, t_r)$, которые являются координатами точки A в m-мерном единичном кубе Ω, $m = (n_1 + 1)\dots(n_r + 1)$.

Г. И. Архипов совместно с В. Н. Чубариковым решил задачу И. М. Виноградова оценки сумм Г. Вейля при всевозможных значениях коэффициентов многочлена от нескольких переменных, стоящего в экспоненте. Здесь, как и в методе И. М. Виноградова, оценка индивидуальной тригонометрической суммы сводится к оценке ее среднего значения.

Пусть $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ обозначает среднее значение степени $2k$ модуля тригонометрической суммы $S(A)$ по кубу Ω, т. е.

$$J = \int \dots \int_{\Omega} |S(A)|^{2k}\, dA.$$

Имеет место следующая теорема о среднем значении.

Теорема 6.1. *Пусть $\tau \geq 0$ — целое число и $n_1, \dots, n_r$ — натуральные числа. Тогда при $k_1 \geq k = m\tau$ для величины интеграла $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ справедлива оценка*

$$J \leq k^{2m\tau} \kappa^{4\kappa^2 \Delta(\tau)} 2^{8m\kappa\tau} (P_1 \dots P_r)^{2k_1} P^{-\kappa\Delta(\tau)},$$

где $\kappa = n_1\nu_1 + \dots + n_r\nu_r$, $\gamma\kappa = 1$, и $P_1 = \min\{P_1, \dots, P_r\}$, $\Delta(\tau) = 0.5m(1-(1-\gamma)^\tau)$, $P = (P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r})^\gamma$, причем $\nu_1, \dots, \nu_r$ — натуральные числа такие, что $-1 < \dfrac{\log P_s}{\log P_1} - \nu_s \leq 0$, $s = 1, \dots, r$.

7. ОЦЕНКИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ. КОМБИНАТОРНАЯ ЛЕММА

Отметим, что вывод оценки суммы существенно зависит от леммы комбинаторного характера, имеющей и самостоятельный научный интерес. Для ее формулировки необходимы следующие обозначения.

Пусть $F(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Определим функции $B = B(u_1, \dots, u_r) = B(\bar{u})$ из равенства

$$F(x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r) - F(x_1 + z_1, \dots, x_r + z_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} B(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

где

$$B(t_1, \dots, t_r) = \sum_{u_1=t_1}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \dots \binom{u_r}{t_r} (y_1^{u_1-t_1} \dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Положим $n = n_1 + \dots + n_r, t = t_1 + \dots + t_r, u = u_1 + \dots + u_r$. Пусть функция $A = A(\bar{t}; s)$ обозначает форму степени s многочлена $B(\bar{t})$, т. е.

$$A(t_1, \dots, t_r; s) = \sum_{\substack{u_1=t_1 \\ u=t+s}}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \dots \binom{u_r}{t_r} (y_1^{u_1-t_1} \dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Тогда получим $B(\bar{t}) = \sum\limits_{s=0}^{n-u} A(\bar{t}; s)$. Заметим, что линейная форма имеет вид

$$A(\bar{t}; 1) = \sum_{j=1}^{r} (u_j + 1) \alpha(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + 1, u_{j+1}, \dots, u_r)(y_j - z_j).$$

Лемма 7.1. *Существуют многочлены $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ с целыми неотрицательными коэффициентами от переменных $\bar{y}, \bar{z}$ такие, что*

$$A(\bar{t}; s) = \frac{1}{t_1! \dots t_r! s!} \sum_{\substack{u_1=t_1 \\ u=t+s-1}}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} v_1! \dots v_r! H(\bar{t}, \bar{u}; s) A(\bar{u}; 1),$$

причем сумма коэффициентов каждого из многочленов $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ не превосходит sr^{s-1} и сумма степеней переменных $y_j, z_j (j = 1, \dots, r)$, содержащаяся в любом мономе многочлена H, не превосходит $u_j - t_j (j = 1, \dots, r)$.

Далее, пусть A точка m-мерного единичного куба Ω, координаты которой удовлетворяют условиям $0 \le \alpha(t_1,\dots,t_r) < 1$ $(0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r)$, $\alpha(0,\dots,0)=0$. Разобьем все точки A куба Ω на два класса Ω_1 и ω_2. Сначала определим области $\Omega(\bar{a},\bar{q})$, состоящие из всех точек A, координаты которых имеют вид

$$\alpha(t_1,\dots,t_r) = \frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)} + \beta(t_1,\dots,t_r),$$

где

$$0 \le a(t_1,\dots,t_r) < q(t_1,\dots,t_r), \quad (a(t_1,\dots,t_r), q(t_1,\dots,t_r)) = 1$$

и

$$|\beta(t_1,\dots,t_r)| \le P_1^{-t_1}\dots P_r^{-t_r}P^{0,1}, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r.$$

Пусть Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\dots,t_r)$, $0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r$, $t_1+\dots+t_r \ge 1$. Каждой области $\Omega(\bar{a},\bar{q})$ отвечает свое значение Q. Первый класс Ω_1 состоит из всех областей $\Omega(\bar{a},\bar{q})$, для которых $Q < P^{0,1}$. Второй класс Ω_2 содержит оставшиеся точки куба Ω. В следующей теореме дана оценка тригонометрической суммы Г.Вейля $S(A)$ для каждой точки A единичного куба Ω.

Теорема 7.1. *Пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1, $\nu \max\{n_1,\dots,n_r\} = 1$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(A)| \le 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}P_1\dots P_rQ^{-\nu}.$$

Более того, если $\delta(t_1,\dots,t_r) = P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r}\beta(t_1,\dots,t_r)$, $\delta = \max\limits_{t_1,\dots,t_r}|\delta(t_1,\dots,t_r)|$, то при $\delta > 1$ справедлива оценка

$$|S(A)| \le 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}P_1\dots P_r(\delta Q)^{-\nu}(\log(\delta+2))^{r-1}.$$

Теорема 7.2. *Пусть, далее, точка A принадлежит второму классу Ω_2. Положим $\tau(t_1,\dots,t_r) = P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r}P^{-1/3}$ и координаты $\alpha(t_1,\dots,t_r)$ точки A представим в виде*

$$\alpha(t_1,\dots,t_r) = \frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)} + \frac{\theta(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)\tau(t_1,\dots,t_r)},$$
$$(a(t_1,\dots,t_r), q(t_1,\dots,t_r)) = 1, \qquad 1 \le q(t_1,\dots,t_r) \le \tau(t_1,\dots,t_r),$$
$$|\theta(t_1,\dots,t_r)| \le 1, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r.$$

Теорема 7.3. *Пусть Q_0 обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\dots,t_r)$ при условии, что $t_1+\dots+t_r \ge 2$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$|S(A)| \le 2^{32\kappa}P_1\dots P_rP^{-\rho},$$

где $\rho = (32m\kappa\log(8m\kappa))^{-1}$. Если же $Q_0 \le P^{1/6}$, то для суммы $S(A)$ имеем оценку

$$|S(A)| \le (5n^{2n})^{r\nu(Q_0)}(\tau(Q_0))^{r-1}P_1\dots P_rP^{-0,1\nu} + 2^{8r}(r\nu^{-1})^{r-1}P_1\dots P_rP^{-\nu/16}.$$

8. ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА–КАМКЕ. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Решена классическая проблема Гильберта — Камке об одновременном представлении системы чисел суммами степеней и установлен точный порядок для количества слагаемых.

Более точно проблема Гильберта–Камке состоит в том, чтобы доказать разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_k = N_1, \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n+\dots+x_k^n = N_n \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ в случае, когда число неизвестных k ограниченно и возрастающие параметры $N_1, \ldots, N_n$ удовлетворяют некоторым естественным условиям.

Другими словами, следует получить наилучшую возможную оценку $r(n)$ для количества переменных k, при котором эта система уравнений разрешима.

Пусть P — натуральное число, переменные $x_1, \ldots, x_k$ системы уравнений Гильберта–Камке лежат в пределах от 1 до P и $I = I(P; n, k; N_1, \ldots, N_n)$ обозначает число ее решений.

Теорема 8.1. *При $k \geq n^2(4\log n + 2\log\log n + 9)$, $k \leq P^{0,1}$ и при $P \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$I = \sigma\gamma P^{k-0,5n(n+1)} + \theta n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)-(30(2+\log n))^{-1}},$$

кроме того, имеет место оценка $I \leq n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)}$. Здесь θ — вещественное число, $|\theta| \leq 1$, и σ, γ — неотрицательные числа.

Теорема 8.2. *Значение величины σ равно сумме «особого ряда в проблеме Гильберта–Камке», значение величины γ равно значению величины «особого интеграла в проблеме Гильберта–Камке», а именно*

$$\sigma = \sum_{q_1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a_1 < q_1 \\ (a_1, q_1) = 1}} \cdots \sum_{\substack{0 \leq a_n < q_n \\ (a_n, q_n) = 1}} q^{-k} V^k \exp -2\pi i A,$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} W^k \exp -2\pi i B \, d\beta_1 \ldots d\beta_n,$$

где $q = q_1 \ldots q_n$,

$$V = \sum_{x=1}^{q} \exp\left\{2\pi i \left(\frac{a_1 x}{q_1} + \cdots + \frac{a_n x}{q_n}\right)\right\}, \qquad A = \frac{a_1 N_1}{q_1} + \cdots + \frac{a_n N_n}{q_n},$$

$$W = \int_0^1 \exp\{2\pi i(\beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n)\}\, dx, \qquad B = \frac{\beta_1 N_1}{P} + \cdots + \frac{\beta_n N_n}{P^n}.$$

Показатель сходимости $k = k_0$ особого ряда $\sigma = \sigma(k)$ равен $0.25n(n+1)+1$, а особого интеграла $\gamma = \gamma(k)$ равен $0.25n(n+1)+0.5$.

Заметим, что полученная асимптотическая формула нетривиальна тогда и только тогда, когда особый ряд σ и особый интеграл γ положительны. Более того, если $\sigma = 0$, то система уравнений Гильберта–Камке не имеет решений вообще, а если $\gamma = 0$, то число ее решений остается ограниченным при растущих числах $N_1, \ldots, N_n$. Необходимое условие арифметического характера для разрешимости системы уравнений Гильберта–Камке состоит в том, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} t_1 \cdot 1 + \cdots + t_n \cdot n = N_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ t_1 \cdot 1^n + \cdots + t_n \cdot n^n = N_n \end{cases}$$

разрешима в целых числах $t_1, \ldots, t_n$. Обозначим его через (H). В несколько иной форме это условие впервые было сформулировано К. К. Марджанишвили.

Теорема 8.4. *Пусть $k \geq T = \min\{n^2 2^{2n-1}, 3n^3 2^n - n\}$. Тогда при условии (H) для особого ряда σ справедливо неравенство*

$$\sigma \geq n^{-20n^4 2^n}.$$

Если же для наборов $(N_1, \ldots, N_n)$ выполняется условие (H) и $\sigma = 0$, то $k < 2^n - 1$.

Для исследования особого интеграла γ Г.И.Архипов вводит понятие характеристики числового множества на отрезке $[0,1]$. Пусть $l \geq n$ и множество $\{0 \leq y_1,\dots,y_l \leq 1\}$. Произвольным способом κ выбираем из них n чисел с различными индексами. Пусть это будут $z_1,\dots,z_n$ и полагаем $z_0 = 0, z_{n+1} = 1$. Тогда величина

$$\Delta(y_1,\dots,y_l) = \max_{\kappa} \min_{0\leq i<j\leq n+1} |z_i - z_j|$$

называется характеристикой множества $\{y_1,\dots,y_l\}$. Характеристика множества $\{x_1,\dots,x_k\}$, которое является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = \beta_1, \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = \beta_n, \end{cases}$$

где $\beta_s = N_s P^{-s}$, $s = 1,\dots,n$ и неизвестные $x_1,\dots,x_k$ могут принимать значения из отрезка $[0,1]$, называется характеристикой этого решения. Обозначим через ε максимальное значение характеристики решений указанной системы уравнений.

Теорема 8.5. *Справедливы следующие неравенства:*

$$2^{2n(n-k)} k^{n-k} n^{-k-n} \varepsilon^{n(k-n)} \leq \gamma \leq 2^{2n^2} k^{2n} n^{k-2n} \varepsilon^{k-3n-n^2}.$$

Заметим, что если особый интеграл γ равен 0, то $\varepsilon = 0$. Это означает, что среди чисел решения $x_1,\dots,x_k$ найдется не более $n-1$ различных. То же самое можно сказать и о решениях системы уравнений Гильберта–Камке с правыми частями $N_1,\dots,N_n$.

9. ГИПОТЕЗА АРТИНА

Дано принципиальное опровержение гипотезы Артина о представлении нуля формой и системой форм в поле p-адических чисел. Это исследование продолжает работу по проблеме Гильберта–Камке.

Пусть p — простое число, $F(x_1,\dots,x_k)$ — форма степени n от k переменных $x_1,\dots,x_k$ с целыми коэффициентами над полем p-адических чисел Q_p. Если существуют целые p-адические числа $x_1,\dots,x_k$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и $F(x_1,\dots,x_k) = 0$, то говорят, что существует нетривиальное представление нуля формой F в поле Q_p. Гипотеза Артина предполагала, что для любого простого числа p, $n \geq 1$ и $k > n^2$, форма $F(x_1,\dots,x_k)$ степени n нетривиально представляет нуль в поле Q_p. Эта гипотеза была опровергнута Г. Тержаньяном и Д. Бровкиным. После чего возникло предположение о том, что величину n^2 в формулировке гипотезы Артина следует заменить на n^3. Подобное утверждение для системы форм было опровергнуто в докторской диссертации Г. И. Архипова. Оказалось, что количество переменных в этом случае имеет порядок не менее 2^n. Той же силы результаты были получены и для одной формы.

Говорят, что форма F не представляет нуль по модулю p, если для некоторого натурального числа r из сравнения

$$F(x_1,\dots,x_r) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Теорема 9.1. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_0 = n_0(r)$ такое, что для любого $n \geq n_0$ найдется форма $F(x_1,\dots,x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю 2; число ее переменных k,*

$$k > 2^u, \qquad u = \frac{n}{\log_2 n \cdot \log_2\log_2 n \dots \underbrace{\log_2\dots\log_2 n}\cdot\underbrace{\log_2\dots\log_2^2 n}}.$$

Теорема 9.2. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_1 = n_1(r)$ такое, что для любого $n \geq n_1$ найдется форма $F(x_1, \ldots, x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю p; число ее переменных k,*

$$k > p^u, \qquad u = \frac{n}{\log_p n \cdot \log_p \log_p n \ldots \underbrace{\log_p \ldots \log_p n}_{} \cdot \underbrace{\log_p \ldots \log_p^2 n}_{}}.$$

10. АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ С НЕЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Найден новый метод оценок тригонометрических сумм, основанный на оценке величин производных функции, стоящей в экспоненте, что позволило получить новую оценку показателя нецелой степени в асимптотической формуле для количества простых чисел в задаче Пятецкого–Шапиро.

Пусть $x \geq 1$ — вещественное число, $c > 0$ — произвольная постоянная и $\pi_c(x)$ — количество простых чисел вида $[n^c]$ при $n \leq x$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Теорема 10.1. *При $1 < c < \dfrac{149}{129} = 1\dfrac{1}{6.45} = 1.1550\ldots$ и при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:*

$$\pi_c(x) = \frac{x}{c \log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Теорема 10.2. *При $1 < c < \dfrac{149}{129}$ и при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:*

$$\sum_{n \leq T} \tau_k(n) = TQ_{k-1}(\log T) + O\left(\frac{T}{\log T}\right),$$

где $\tau_k(n)$ — количество решений в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения $x_1 \ldots x_k = n$, $Q_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $k-1$.

Одним из обобщений проблемы Варинга является задача о представлении натурального числа N ограниченным количеством слагаемых вида $[n^c]$, где n принимает значения натуральных чисел и $c > 1$ — фиксированное нецелое число.

Пусть $W_{k,c}(N)$ обозначает количество решений в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения

$$[x_1^c] + \cdots + [x_k^c] = N.$$

В 1972 г. Ж. М. Дезуйе вывел асимптотику при $N \to \infty$ величины $W_{k,c}(N)$ для k порядка $c^3 \log c$. Заметим, что в классической проблеме Варинга при натуральном c данная асимптотика найдена И. М. Виноградовым при k порядка $c^2 \log c$. Результат той же силы, что и при натуральном c, получен Г. И. Архиповым и А. Н. Житковым.

Теорема 10.3. *Пусть $k > 22c^2 \log(c+4)$, $\gamma c = 1$. Тогда для величины $W_{k,c}(N)$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$W_{k,c}(N) \asymp \frac{\Gamma^k(1+\gamma)}{\Gamma(k\gamma)} N^{k\gamma - 1}.$$

11. РЯДЫ ВИНОГРАДОВА

Доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова. В частности, доказано, что для любого вещественного числа α сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha n^3)}{n}.$$

Пусть r — натуральное число, $P(x)$ — алгебраический многочлен степени r с вещественными коэффициентами и $\mathscr{P}_r$ обозначает множество всех многочленов степени r с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим симметрическую частичную сумму:

$$h_N(P) = \sum_{1\le|n|\le N} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}, \qquad N \ge 1,$$

ряда $h(P) = v.p. \sum\limits_{n\ne 0} \dfrac{e^{2\pi i P(n)}}{n}$.

Теорема 11.1. *Пусть $r \ge 2$. Тогда*

$$\sup_{N\ge1} \sup_{P\in\mathscr{P}_r} |h_N(P)| = g_r < \infty.$$

Далее, для каждого многочлена $P \in \mathscr{P}_r$ последовательность $h_N(P)$ сходится при $N \to \infty$ и сумма ряда $h(P)$, рассматриваемая в смысле главного значения, ограничена на $\mathscr{P}_r$.

12. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В БИНАРНЫХ ПРОБЛЕМАХ ГОЛЬДБАХОВА ТИПА

Получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблемы Гольдбаха.

Теорема 12.1. *Пусть λ_1, λ_2 — положительные вещественные числа такие, что λ_2/λ_1 — иррациональное алгебраическое число. Пусть, далее, $T_2(x)$ обозначает количество натуральных чисел $n \le x$, для которых не существует решений уравнения*

$$[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2] = n,$$

где p_1 и p_2 — простые неизвестные. Тогда для любого ε справедлива оценка

$$T_2(x) \ll_\varepsilon x^{2/3+\varepsilon}.$$

Константа в знаке $\ll_\varepsilon$ неэффективная.

В основу доказательства этого утверждения положены явные формулы в теории дзета-функции Римана и следующая лемма о совместном приближении двух чисел.

Лемма 12.1. *Пусть $1 \le Q \le X^{1/2}$, a — целое число, q — натуральное число, $(a,q)=1$, $q \in [1,Q]$ и интервал $I_{a,q}$ вида*

$$I_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{Q}{X}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{X}\right).$$

Далее, пусть β — иррациональное алгебраическое вещественное число, α, t — вещественные числа, $|t| \gg X^{-1/3}, \alpha, \beta \in (1,2), k$ — целое число, $|k| \le \log X$. Обозначим через μ меру множества T точек $\{t\}$ таких, что оба числа $\nu_1 = t\alpha\beta$ и $\nu_2 = (t+k)\alpha$ лежат в некоторых промежутках из указанной выше совокупности $\{I_{a,q}\}$, т. е. $\nu_1 \in I_{a,q}$ при некотором значении $a = a_1, q = q_1$ и с параметром $Q = Q_1$ (т. е. $q_1 \le Q_1$); $\nu_2 \in I_{a,q}$ при значениях $a = a_2, q = q_2$ с параметром $Q = Q_2$ (т. е. $q_2 \le Q_2$).

Тогда для величины μ имеет место оценка сверху вида

$$\mu \ll_\varepsilon X^{-2+\varepsilon} Q_1^2 Q_2^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно мало.

13. ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ

Впервые получены эффективные оценки первого собственного значения оператора Лапласа–Бельтрами для дискретной подгруппы движений в трехмерном пространстве Лобачевского.

Получено уточнение формулы Левитана для количества целых точек в круге на плоскости Лобачевского, а также степенное улучшение оценок Эстермана и Хис-Брауна для среднего значения функции делителей от квадратичного многочлена.

Для любых двух точек $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости $(y, y' > 0)$ определим расстояние между ними $d = d(z, z')$. Положим

$$u = u(z, z') = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Тогда расстояние d задается равенством

$$d = \ln\left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2}\right).$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 и радиусом T состоит из точек z, удовлетворяющих неравенству $d(z_0, z) \le T$. Обозначим символом $N(z_0, T)$ количество элементов γ модулярной группы $PSL_2(Z) = SL_2(Z)/\pm I$ таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$. Положим $N(T) = N(i, T)$.

Теорема 13.1. *При $T \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$N(T) = 8 \operatorname{ch} T + O(e^{3T/4} T^4).$$

К этой задаче близка по формулировке классическая проблема Ингама о среднем значении количества делителей от разложимого квадратичного многочлена. Сам А. Ингам в 1927 г. выделил главный член его асимптотики. В 1931 г. Т.Эстерман получил оценку остатка $x^{11/12} \log^{17/3} x$. Последняя оценка была улучшена до значения $O(x^{5/6+\varepsilon})$ только в 1978 г. Д. Исмоиловым, в 1979 г. Хис-Брауном и в 1984 г. А. И. Виноградовым и Л. А. Тахтаджяном. В 2006 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков дали новое степенное понижение остаточного члена вида $O(x^{3/4+\varepsilon})$. Пусть символом $\tau(n)$ обозначается функция количества делителей числа n, а символом $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, и $\gamma = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Положим

$$\xi_0 = \frac{6}{\pi^2}, \qquad \xi_j = (-1)^j \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) d^{-2} \ln^j d, \qquad j \ge 1.$$

Теорема 13.2. *При $x \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$I(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)\tau(n+1) = \sum_{n \le x} \tau(n^2 + n) = M(x) + R(x),$$

где главный член $M(x)$ асимптотической формулы имеет вид

$$M(x) = x(A_0 \ln^2 x + A_1 \ln x + A_2),$$
$$A_0 = \xi_0, \qquad A_1 = (4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1, \qquad A_2 = ((2\gamma - 1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma - 1)\xi_1 + 4\xi_2,$$

а остаточный член оценивается следующим образом:

$$R(x) \ll x^{3/4} \ln^4 x.$$

14. МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРОБЛЕМ ГОЛЬДБАХА–ВАРИНГА И ГИЛЬБЕРТА–КАМКЕ

Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблем Гольдбаха–Варинга и Гильберта–Камке. Обнаружен ряд неожиданных эффектов. Оказалось, что если переменные пробегают значения:

а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности, б) простых чисел — зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности,

в) целых алгебраических чисел — скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений.

Приведем результаты относительно асимптотически точной формулы для числа слагаемых в проблеме Гильберта–Камке в простых числах, состоящей в том, что при некоторых естественных условиях набор $\{N_1, \ldots, N_n\}$ из n растущих натуральных чисел представляется в виде ограниченного числа наборов $\{p, \ldots, p^n\}$, где p — простое число. Другими словами, найдется число $V(n)$ такое, что для любого набора $\{N_1, \ldots, N_n\}$, удовлетворяющего некоторым естественным условиям, существуют простые числа $p_1, \ldots, p_k$, где $k \le V(n)$, такие, что имеем:

$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_k = N_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ p_1^n + \cdots + p_k^n = N_n. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют системой Марджанишвили–Хуа (МН-система).

Имеется два типа условий на набор $N_1, \ldots, N_n$ для его представимости в приведенном выше виде: вещественной и арифметической разрешимости. Набор $(N_1, \ldots, N_n)$, удовлетворяющий этим условиям, называется допустимым.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon > 0$ — постоянные, и пусть переменные $\theta_m = \theta_m(N_1, \ldots, N_m, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям $|\theta_m| \le 1, m = 1, \ldots, n$. Далее, предположим, что при $N_1 \ge N_0(\varepsilon)$ справедливы следующие соотношения

$$N_m = N_1^m(\gamma_m + O(N_1^{-\varepsilon})), \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Говорят, что набор $(N_1, \ldots, N_n)$ условию вещественной разрешимости, если система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = \gamma_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = \gamma_n \end{cases}$$

разрешима в вещественных числах $0 \le x_1, \ldots, x_k \le 1$, где матрица Якоби

$$\|m x_s^{m-1}\| \qquad (m = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$$

решения $x_1, \ldots, x_k$ имеет максимальный ранг. При $k \ge m$ он равен m. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 14.1. *Пусть набор $(N_1, \ldots, N_n)$ удовлетворяет условию вещественной разрешимости. Тогда особый интеграл асимптотической формулы для количества решений МН-системы положителен. В противном случае особый интеграл равен нулю и МН-система имеет только конечное число решений.*

Далее представим натуральное число $n+1$ в виде

$$n + 1 = l_p(p-1) + r_p, 0 \le r_p \le p - 1, l_p = [(n+1)/(p-1)].$$

Теорема 14.2. *Для того чтобы МН-система была разрешима, необходимо, чтобы выполнялись арифметические условия следующего вида: для любого простого числа $p \le n+1$ разрешимы системы сравнений*

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p}\nu^m \equiv N_m \pmod{p^{\delta_p}}, \qquad m = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_p = n + l_p$ и неизвестные $t_{\nu,p}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{δ_p}.

Пусть символ k_p обозначает сумму

$$k_p = \sum_{\substack{\nu=1\\(\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p}, \qquad p \le n+1$$

и $k_0 = k_0(N_1, \dots, N_n)$ — наименьшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее системе сравнений

$$k_0 \equiv k_p \pmod{p^{\delta_p}}, \qquad p \le n+1.$$

Теорема 14.3. *Для любого допустимого набора $(N_1, \dots, N_n)$ число k слагаемых в МН-системе имеет вид $k = k_0 + tb(n)$, где t — неотрицательное целое число и $b(n) = \prod_{p \le n+1} p^{\delta_p}$.*

Отсюда следует, что $V(n) \sim b(n)$ при $n \to \infty$.

15. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Найдены новые оценки абсциссы и показателя Карлсона в теории моментов дзета-функции Римана.

Абсциссой Ф. Карлсона называют величину σ_k, определяемую соотношениями вида

$$\sigma_k = \inf M,$$

где M — множество всех вещественных чисел σ, для которых справедлива оценка

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon,$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа.

Теорема 15.1. *Пусть при некотором a, где $1 \le a \le 20, t \ge 1$ и всех $\sigma \in (1/2, 1)$ выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Пусть, далее, $k_0 = 44 - [22/a]$. Тогда для функции σ_k при всех $k \ge 45$ имеет место оценка

$$\sigma_k \le 1 - \frac{1}{(3a(k-k_0) + (3a(k-k_0))^{1/2})^{2/3}}.$$

Экспонентой Ф. Карлсона называют величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция, обратная к σ_k. Функцию $m(\sigma)$ можно определить как $\sup\{m\}$, где m таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

Теорема 15.2. *При всех $\beta \ge \beta_1 = \dfrac{2701}{2880}$ и $k_0 = 44 - [22/a]$ справедлива оценка*

$$\frac{m(\beta)}{2} \ge k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1-\beta)^{3/2}} - \frac{1}{(3a)^{1/2}(1-\beta)^{3/4}}.$$

16. ОЦЕНКА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА ЕДИНИЧНОЙ ПРЯМОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Дано улучшение современной оценки модуля дзета-функции Римана в критической полосе в окрестности единичной прямой.

Теорема 16.1. *Пусть для некоторого $\gamma \geq 3600^{-1}$ и для всех $1 \geq y \leq t^{0.5}$ справедлива оценка вида*

$$\left|\sum_{n\leq y} n^{it}\right| \leq cy \exp -\gamma \ln^3 y \cdot \ln^{-2} t,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Тогда при $1 \geq \sigma > 1 - 2\cdot 10^{-4}$, $t \geq 1, s = \sigma + it$ имеет место оценка

$$|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{1,5}} (\ln t)^{2/3} \left((1-\sigma)^{1/4} (\ln t)^{1/6} + 1\right)^{-1},$$

где $a = 2\cdot 3^{-1.5}\gamma^{-0.5}$.

Доказательство основано на следующем утверждении, имеющем и самостоятельный интерес.

Теорема 16.2. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа, $n \geq 1$, $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$, $\beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!$, $r = 1, \ldots, n$. Далее, пусть $\beta_0 = (b-a)^{-1}$, $W(x) = |\beta_0| + \sum\limits_{r=1}^{n} |\beta_r(x)|^{1/r}$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$I = \int_a^b e^{f(x)}\, dx \leq e^{M+1} n(n+1) H^{-1},$$

где $H = \min\limits_{a\leq x\leq b} W(x)$, $M = \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

17. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ ИСХОДНЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Выполнен цикл исследований по вопросам общей теории сходимости, важных для обоснования исходных понятий математического анализа [6].

Пусть A — основное множество элементов. Определим множество B — базу его подмножеств. База B состоит из бесконечного числа окончаний $b \subset A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) любое окончание $b \in B$ непустое множество;

2) для любых двух окончаний $b_1 \in B$ и $b_2 \in B$ найдется окончание $b_3 \in B$ такое, что $b_3 \in b_1 \cap b_2$.

Далее ограничимся рассмотрением баз, для которых выполняются следующие три условия.

3) для любых двух окончаний $b_1 \in B$ и $b_2 \in B$ выполняется одно из следующих двух включений: $b_1 \subset b_2$ или $b_2 \subset b_1$.

Назовем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, фундаментальной по базе B, если для любого окончания $b \in B$ только конечное число ее членов не принадлежит b. Фундаментальную последовательность назовем монотонной по базе B, если для любого окончания $b \in B$ условие $x_n \in b$ влечет $x_{n+1} \in b$.

4) существует, по крайней мере, одна монотонная последовательность по базе B;

Наконец, пусть функция $f(x)$ определена на основном множестве A и пусть $D = \bigcap\limits_{b\in B} b$. Тогда последнее ограничение на базу B имеет следующий вид:

5) или D пустое множество, или функция $f(x)$ на множестве D.

Число l называют пределом функции $f(x)$ по базе B (в смысле Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b \in B$ такое, что для любого элемента x из b имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$. Дадим теперь определение предела функции в смысле Гейне. Число l называют пределом функции $f(x)$ по базе B (в смысле Гейне), если для любой монотонной последовательности по базе B имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Теорема 17.1. *Понятия предела функции по базе в смысле Коши и в смысле Гейне эквивалентны.*

Число l называется частичным пределом по базе B, если существует монотонная по базе B последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Наибольший (наименьший) частичный предел функции

$f(x)$ по базе B называется верхним (нижним) пределом функции $f(x)$ по базе B. Функцию $f(x)$ называют финально ограниченной по базе B, если окончание базы, на котором функция ограничена.

Теорема 17.2. *Пусть функция финально ограничена по базе B. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \inf_{b\in B}\sup_{x\in b} f(x), \qquad \underline{\lim_{B}} f(x) = \sup_{b\in B}\inf_{x\in b} f(x).$$

Доказаны также теоремы о двойных, повторных и последовательных пределах по базам множеств.

18. УПРОЩЕНИЕ И УТОЧНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Дано простое доказательство формул Эйлера, Абеля и Пуассона суммирования значений функций по целым точкам отрезка на вещественной прямой. Получено уточнение теоремы ван дер Корпута о замене тригонометрической суммы на интеграл и теоремы И. М. Виноградова о замене тригонометрической суммы на более короткую с небольшой ошибкой (формула обращения для тригонометрических сумм).

Теорема 18.1. (Модификация метода «стаканчиков» И. М. Виноградова). *Пусть α и β — вещественные числа, $0 \le \alpha \le \beta \le 1$. Рассмотрим периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом единица такую, что она принимает значение 1 при $\alpha < x < \beta$, 0 — при $\beta < x < \alpha + 1$, и удовлетворяет условию $|\varphi(x)| \le 1$ при $x = \alpha$ и $x = \beta$. Тогда функция $\varphi(x)$ представляется в виде*

$$\varphi(x) = \beta - \alpha + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\pi n(x+\alpha) - \sin 2\pi n(x+\beta)}{\pi n} + R,$$

где $N \ge 10$ — произвольное натуральное число, $R = R(x) = R_N(x+\alpha) - R_N(x+\beta)$, и при всех x справедлива оценка $|R_N(x)| \le \psi_M(x)$.

Теорема 18.2. *Здесь $M = \pi\sqrt{3}(2N+1)/4$ и $\psi_M(x)$ — периодическая функция с периодом единица такая, что она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида*

$$\psi_M(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

коэффициенты которого оцениваются следующим образом:

$$|c_m| \le 3M^{-1}(2 + \ln M)e^{-|m|/M}.$$

Теорема 18.3. (Аналог формулы Виноградова–ван дер Корпута обращения для кратных тригонометрических сумм). *Пусть функция $f = f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области Ω, выпуклой по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ в прямоугольном параллелепипеде $a_k \le x_k \le b_k$, $1 \ll a_k < b_k \ll a_k$ и пусть $A_k > 1$, $1 \le k \le n$, — вещественные числа. Наконец, пусть все третьи частные производные $f(\bar{x})$ непрерывны в Ω и пусть в Ω выполняются условия*

$$f'_{x_k}(\bar{x}) \asymp a_k A_k^{-1}, \qquad f^{>>}_{x_k x_k}(\bar{x}) \asymp A_k^{-1}, \qquad f^{>>'}_{x_k x_k x_k}(\bar{x}) \asymp (a_k A_k)^{-1}.$$

Тогда кратная тригонометрическая сумма

$$S = \sum_{\bar{x}\in\Omega} e^{2\pi i f(\bar{x})}$$

может быть записана в виде

$$S = e^{-\pi i n/4} \sum_{\bar{\nu}\in\Omega_1} |G|^{-1/2} e^{-2\pi i g(\bar{\nu})} + R,$$

где $g(\bar{\nu}) = x_1\nu_1 + \cdots + x_n\nu_n - f(x_1, \ldots, x_n)$, и при целочисленных наборах $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ набор вещественных чисел $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ определяется из системы уравнений

$$f'_{x_k}(\bar{x}) = \nu_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Через $G = G(\bar{x})$ *обозначается определитель матрицы, составленной из всех вторых частных производных функции* $f(\bar{x})$ *(гессиан функции* $f(\bar{x})$*), а область* Ω_1 *есть образ области* Ω *при отображении* $F : \Omega \to \Omega_1$*, задаваемом системой уравнений*

$$f'_{x_k}(\bar{x}) = \nu_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

причем гессиан $G(\bar{x}) \neq 0$ *для всех* $\bar{x} \in \Omega$*. (Другими словами, набор* $(\bar{\nu}, g)$ *является преобразованием Лежандра набора* $(\bar{x}, f)$*). Для величины* R *справедлива оценка*

$$R \ll a_1 \ldots a_n (A_1^{1/2} a_1^{-1/2} + \cdots + A_n^{1/2} a_n^{-1/2}).$$

Теорема 18.4. (Уточнение остаточного члена в формуле ван дер Корпута замены тригонометрической суммы на интеграл). *Пусть* a *и* b *— полуцелые числа,* $f(x)$ *— вещественная функция на* (a, b)*, причем* $f'(x)$ *непрерывна и монотонна на* (a, b) *и* $|f'(x)| \leq \delta < 1$*. Тогда справедлива формула*

$$\sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx + R_0,$$

где $|R_0| \leq 4\delta/(1-\delta)$.

19. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ И РАБОТА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В студенческие и аспирантские годы Г. И. Архипов работал в математическом классе школы №179 и был членом оргкомитетов Московских математических олимпиад школьников, составителем сборников подготовительных задач. В его выступлениях на конференциях и статьях даны концепции развития школьного математического образования в России, а также освещено участие в этом процессе выдающихся российских математиков, представлено современное состояние математического образования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* НК 13-01-00835).

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН СССР. М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1947. Т. XXIII. 109 с.
2. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Кратные тригонометрические суммы // Тр. МИАН СССР. М. : Наука, 1980. Т. 151. 128 с.
3. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М. : Наука, 1987. Т. 151. 368 с.
4. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. , Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis (De Gruyter expositions in mathematics; 39). Berlin; N. Y. : Walter de Gruyter, 2004. 554 p.
5. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орёл : Изд-во Орловск. ун-та, 2013. 437 с.
6. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу : учебник для вузов. 5-е изд., испр. М. : Дрофа, 2005. 640 с.

Mathematical life of G. I. Arkhipov

V. N. Chubarikov

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia, 119991, Leninskie Gory, 1, chubarik1@mech.math.msu.su

This paper presents the most important discoveries made by outstanding mathematician G. I. Arhkipov since the end of 60s to the middle of 2000s.

Key words: exponential sums, simple trigonometric sums estimates, Hilbert–Kamke problem.

References

1. Vinogradov I. M. Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisell [Trigonometric sums method in number theory]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR, 1947, vol. XXIII, 109 p. (in Russian).

2. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. Kratnye trigonometricheskie summy [Multiple trigonometric sums]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Nauka, 1980, vol. 151, 128 p. (in Russian).

3. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. *Teoriia kratnykh trigonometricheskikh summ* [Theory of multiple trigonometric sums]. Moscow, Nauka, 1987, vol. 151, 368 p. (in Russian).

4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis (De Gruyter expositions in mathematics; 39)*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2004, 554 p.

5. Arkhipov G. I. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Orel State University Press, 2013, 437 p. (in Russian).

6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu : Uchebnik dlia vuzov. 5-e izd.,ispr.* [Lectures on calculus. University coursebook. 5th edition, corrected]. Moscow, Drofa, 2005, 640 p. (in Russian).

УДК 512.522

ПОЛУПРОСТЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

И. Н. Балаба[1], Е. Н. Краснова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, ibalaba@mail.ru

[2]Аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

Получен градуированный аналог теоремы Веддерберна–Артина, дающий описание полупростых G-градуированных колец для произвольной группы G. Дана гомологическая классификация полупростых градуированных колец.

Ключевые слова: градуированные кольца, градуированные модули, полупростые кольца.

В последнее время возрос интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой; активно развивается структурная теория градуированных колец. Важным направлением в этих исследованиях является описание простых и полупростых объектов. Ряд результатов, описывающих строение простых и полупростых градуированных колец, можно найти в монографии К. Настасеску (C. Năstăsescu) и Ф. ван Ойстайена (F. van Oystaeyen) [1]. В [2] изучались градуированные центральные простые алгебры, а в [3] дано описание конечномерных простых градуированных алгебр над алгебраически замкнутым полем.

Целью данной работы является описание полупростых градуированных колец.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей 1, все модули — унитарными, G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо A называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, где $\{A_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца A и $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(A) = \bigcup_{g\in G} A_g$ называются *однородными элементами* кольца. Идеал I кольца A называется *градуированным*, если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \bigcap A_g)$. *Изоморфизмом* градуированных колец называется сохраняющий градуировку кольцевой изоморфизм.

Правый A-модуль называется *G-градуированным*, если если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$, где $\{M_g | g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$ и $M_gA_h \subseteq M_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Аналогично определяется левый градуированный A-модуль. Обозначим через $\mathrm{gr.mod}-A$ категорию правых градуированных A-модулей, объектами которой являются правые градуированные A-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы.

Для правых градуированных модулей M_A и N_A обозначим через $\mathrm{HOM}_A(M, N)_g$ множество *однородных гомоморфизмов степени* g, т. е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$