где $g(x) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристичеких чисел, для которых* $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g,x)$ *– частичная сумма ряда Фурье по системе* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{4k\pi i x}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ *функции* $g(x)$ *на отрезке* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *для тех* k*, для которых* $|4k\pi| < r$.

Доказательство. Имеем $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f(x)\,d\lambda$, $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f(x)\,d\lambda$, где $y(x) = R_{0\lambda}f(x)$ есть решение краевой задачи $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1/2)$.

Пусть $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $R_{0\lambda}f(x) = (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}))_1$, $R_\lambda f(x) = (\Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda))_1$, где $(\cdot)_1$ означает первую компоненту вектора, помещенного в скобки. По лемме 18 имеем

$$\lim_{r\to\infty}\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} [(\Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda))_1 - (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1]\,d\lambda \right\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0.$$

Тогда $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1\,d\lambda + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$. Но $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1\,d\lambda = \sigma_r(f,x)$ и первое соотношение теоремы получено. Второе соотношение получается аналогично. Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06–01–00003).

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.
2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

УДК 517.984.52

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА n-ГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Ю. Дмитриев

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: DmitrievOU@info.sgu.ru

В работе рассматривается задача разложения по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида. Получены необходимые и достаточные условия разложения по собственным функциям на отрезке $[0,1]$ и внутри него.

Expansions in Eigenfunctions of the n-th Order Differential Operator with Non-Regular Boundary Conditions

O.Yu. Dmitriev

The paper deals with the expansions in eigenfunctions of the n-th order differential operator with non-regular boundary conditions of special type. Necessary and sufficient conditions for existing of such expansions either on the interval $[0,1]$ or inside it are derived.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, определенную дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

где a_i – константы, λ – спектральный параметр, $n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}$.

Для случая $n = 3$ А.П.Хромовым в [1] были получены необходимые и достаточные условия разложения функции в равномерно сходящийся на $(0,1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями. Там же были получены теоремы о разложении внутри интервала $(0,1)$.

В [2] автором этот результат был распространен на случай $n = 4k + 1$. Были получены теорема о необходимом условии и теорема о достаточном условии разложения функции в равномерно сходящийся на $(0, 1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями.

Данная статья является продолжением этих исследований для разложений внутри интервала $(0, 1)$, при этом необходимые условия, полученные в [2], сохраняются. Получение достаточных условий разложения требует изучения поведения функции Грина. Основная трудность состоит в том, что функция Грина $G(x, t, \lambda)$ краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$, причем такой рост наблюдается как при $t < x$, так и при $t > x$. В [1] и [2] справиться с таким ростом удавалось с помощью специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция. Рассматриваемая в данной статье ситуация отличается тем, что в связи с уменьшением интервала разложения функциональное уравнение перестает действовать. Поэтому чтобы справиться с экспоненциальным ростом функции Грина, аналогично [1], осуществляется переход к новому оператору, порожденному многоточечной краевой задачей.

Пусть $\lambda = -\rho^n$, $\omega_j = \exp\dfrac{2j-1}{n}\pi i,\ j = 1, \ldots, n$. Тогда если ρ пробегает сектор S с вершиной в начале координат, определяемый неравенствами $-\dfrac{\pi}{n} \le \arg\rho \le \dfrac{\pi}{n},\ 0 \le |\rho| < \infty$, то λ пробегает всю комплексную плоскость. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho \in S$. Положим $b_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_j(-\omega_j)^{i-1}$, $j = 1, \ldots, n$. Будем рассматривать такие краевые условия (2), для которых выполняется $b_j = 0$, $j = k+1, \ldots, 3k+1$; $b_k b_{3k+2} \ne 0$. В этом случае краевые условия (2) нерегулярны по Биркгофу ([3], с. 66-67).

Аналогично [2] будем рассматривать функциональное уравнение вида

$$\Phi(y, x) = \sum_{j=1}^{k} b_j y(\overline{\omega}_j x) + \sum_{j=3k+2}^{4k+1} b_j y(\overline{\omega}_j x) + ny(1-x) = 0. \tag{3}$$

Определим многоугольник $T_{1-\alpha/\mathrm{Re}\,\omega_k}$ системой неравенств:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\omega_j z < \mathrm{Re}\,\omega_{2k+1}\alpha + \mathrm{Re}\,\omega_j, & j \in J^+, \\ \mathrm{Re}\,\omega_j z < \mathrm{Re}\,\omega_{2k+1}\alpha + \mathrm{Re}\,\omega_{3k+2}, & j \in J^-, \\ \mathrm{Re}\,\omega_{2k+1} z < \mathrm{Re}\,\omega_{2k+1}\alpha, \end{cases}$$

где $J^+ = \{1, 2, \ldots, k, 3k+2, \ldots, 4k+1\}$, $\quad J^- = \{k+1, \ldots, 2k, 2k+2, \ldots, 3k+1\}$.

Разложение внутри интервала $(0, 1)$ имеет смысл рассматривать, учитывая результаты [2], на интервалах $J_\beta = (\mathrm{Re}\,\omega_k(1-\beta); \beta)$, где $\beta \in (\gamma, 1]$, $\gamma = \dfrac{\mathrm{Re}\,\omega_k}{1 + \mathrm{Re}\,\omega_k}$. Кроме того, из [2] следует, что функциональное уравнение (3) не имеет смысла при $\beta \in (\gamma, 1-\gamma]$.

Поскольку аналитичность разлагаемой функции $f(z)$, согласно результатам [2], можно предполагать только в области T_β, а экспоненциальный рост функции Грина $G(x, t, \rho)$ тем больше, чем ближе x к концам отрезка $[0, 1]$, то для преодоления этой трудности аналогично [1] мы осуществим переход к новому оператору.

Введем в рассмотрение операторы:

$$L_0: \ y^{(n)},\ U_i(y) = 0,\ i = 1, \ldots, n, \qquad L_1: \ y^{(n)},\ V_i(y) = \frac{1}{n} D^{i-1}\Phi(y, \gamma) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Операторы L_0 и L_1 имеют одни и те же с.п.ф.

Обозначим через L_2 оператор, полученный в результате замены $w = \frac{c}{\gamma}(z - \gamma)$, $c = \omega_k + \omega_{3k+2} = 2\mathrm{Re}\,\omega_k$, $y(z) = u(w)$ из оператора L_1:

$$L_2: u^{(n)}, \quad U_i(u) = \sum_{j \in J^+} \alpha_{ij} u^{(i-1)}(c(\overline{\omega}_j - 1)) + \alpha_{i2k+1} u^{(i-1)}(\tilde{\gamma}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\alpha_{ij} = (\overline{\omega}_j)^{i-1} b_j$, $j \in J^+$, $\alpha_{i2k+1} = (\omega_{2k+1})^{i-1} n$, $\tilde{\gamma} = 2 - c$.

Таким образом, задача разложения по с.п.ф. оператора L_1 сводится к задаче разложения по с.п.ф. оператора L_2 функции $f(w)$, аналитичной в области, представляющей из себя треугольник T_{x_0}, гомотетичный треугольнику $T_{\tilde{\gamma}} = (c(\overline{\omega}_{3k+2} - 1), \tilde{\gamma}, c(\overline{\omega}_k - 1))$ с центром гомотетии в начале координат и имеющий вершину x_0 на положительной полуоси, причем, $0 < x_0 \le \tilde{\gamma}$, так как мы рассматриваем тот случай, когда функциональное уравнение (3) не имеет смысла.

Аналогично [3, с. 46–47] имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Резольвента $\tilde{R}_\lambda f$ оператора L_2 имеет вид (λ не является собственным значением оператора L_2):*

$$\tilde{R}_\lambda f = \frac{1}{\Delta(\rho)} \begin{vmatrix} \tilde{M}_\lambda f(x) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ U_1(\tilde{M}_\lambda f) & U_1(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_1(e^{\rho\omega_n x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(\tilde{M}_\lambda f) & U_n(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_n(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{M}_\lambda f(x) = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \int_0^x \omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi, \qquad \Delta(\rho) = \det \|U_i(e^{\rho\omega_j x})\|_{i,j=1,\dots,n}.$$

Обозначим $P_j(x,f,\rho) = \begin{vmatrix} f_j(x) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ U_1(f_j) & U_1(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_1(e^{\rho\omega_n x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(f_j) & U_n(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_n(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix}$, где $f_j(x) = \int\limits_0^x e^{\rho\omega_j(x-\xi)} f(\xi) d\xi$,

$U_m(f_j) = \sum\limits_{l\in J^+} \alpha_{ml} \int\limits_0^{c(\overline{\omega}_l-1)} (\rho\omega_j)^{m-1} e^{\rho\omega_j(c(\overline{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi + \alpha_{m2k+1} \int\limits_0^{\tilde{\gamma}} (\rho\omega_j)^{m-1} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)} f(\xi) d\xi$, $j = 1,\dots,$ $\dots, n$, $\quad m = 1,\dots,n$. Тогда, согласно лемме 1, резольвента примет вид

$$\tilde{R}_\lambda f = -\frac{1}{n\rho^{n-1}\Delta(\rho)} \sum_{j=1}^{n} \omega_j P_j(x,f,\rho). \tag{4}$$

Распространим (как в [4]) резольвенту $\tilde{R}_\lambda f$ оператора L_2 на функции n раз радиально непрерывно дифференцируемые относительно начала координат. Теперь получим нужные нам оценки слагаемых P_j в формуле (4).

Лемма 2. *Пусть $f(w)$ регулярна в T_{x_0}, непрерывна в $\overline{T}_{x_0}$, где $x_0 \in (0,\tilde{\gamma})$, и радиально продолжена в $\overline{T}_{\tilde{\gamma}}$. Тогда*

при $\arg\rho \in [0;\pi/n]$ $\qquad P_j(x,f,\rho) = O(\rho^\sigma e^{\rho æ})$, $j = 1,\dots,4k+1$,

при $\arg\rho \in [-\pi/n;0]$ $\qquad P_j(x,f,\rho) = O(\rho^\sigma e^{\rho\tilde{æ}})$, $j = 1,\dots,4k+1$,

где $\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$, $\tilde{æ} = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{æ}_i$, $æ = \sum\limits_{i=1}^{n} æ_i$, $æ_i = \begin{cases} 2\rho\omega_i - c\rho\omega_i, & i = 1,\dots,k-1, 3k+2,\dots,4k+1, \\ c\rho\omega_i(\overline{\omega}_k - 1), & i = k,\dots,2k, \\ c\rho\omega_i(\overline{\omega}_{3k+2} - 1), & i = 2k+1,\dots,3k+1, \end{cases}$

$$\tilde{æ}_i = \begin{cases} 2\rho\omega_i - c\rho\omega_i, & i = 1,\dots,k, 3k+3,\dots,4k+1, \\ c\rho\omega_i(\overline{\omega}_k - 1), & i = k+1,\dots,2k+1, \\ c\rho\omega_i(\overline{\omega}_{3k+2} - 1), & i = 2k+2,\dots,3k+2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\arg\rho \in [0;\pi/n]$, $j = 1,\dots,k-1, 3k+2,\dots,4k+1$. Используя радиальное продолжение f в $T_{\tilde{\gamma}}$ и теорему Коши в области T_{x_0}, представим элементы первого столбца $P_j(x,f,\rho)$ в виде суммы. Затем разложим P_j на сумму нескольких определителей:

$$P_j(x,f,\rho) = \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n\vec{\varepsilon}_{j+2k} \int\limits_{x_0}^{\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{l\in J^+} \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l\vec{\varepsilon}_{j-l} \int\limits_{c(\overline{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}}^{c(\overline{\omega}_l-1)} e^{\rho\omega_j(c(\overline{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{l\in J^+} \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l\vec{\varepsilon}_{j-l} \int\limits_{x_0}^{c(\overline{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(c(\overline{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi)\, d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} +$$

$$+ \rho^\sigma \int_0^{x_0} e^{-\rho\omega_j\xi} \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_j x}\varepsilon(x,\xi) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} f(\xi)\, d\xi,$$

$\vec{U}(u) = \begin{pmatrix} U_1(u) \\ \rho^{-1}U_2(u) \\ \vdots \\ \rho^{-n+1}U_n(u) \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j^{n-1} \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$, $\varepsilon(x,\xi) = \begin{cases} 1, & x \le \xi \\ 0, & x > \xi \end{cases}$, где $\varepsilon_j = \exp\frac{2j\pi i}{n}$, $\alpha_{ij} = (\overline{\omega}_j)^{i-1}b_j$, $j \in J^+$, $\alpha_{i2k+1} = (\omega_{2k+1})^{i-1}n$.

Оценим каждый определитель отдельно. Рассмотрим сначала определители вида

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l\vec{\varepsilon}_{j-l}\int\limits_{c(\overline{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}}^{c(\overline{\omega}_l-1)} e^{\rho\omega_j(c(\overline{\omega}_l-1)-\xi)}f(\xi)\,d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Легко получить предварительную оценку этого определителя:

$$O\left(\{1 + |e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}|\}|e^{\rho æ}| \max_{i=\overline{1,n}} |e^{\rho\omega_i x - \rho æ_i}|\right).$$

Поскольку $x < x_0 < \tilde{\gamma}$, то, по определению $æ_i$, очевидно, что $\mathrm{Re}\,(\rho\omega_i x - \rho æ_i) \le 0$, $i = \overline{1,n}$.

Чтобы оценить $\mathrm{Re}\,\{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l - 1)(1 - x_0/\tilde{\gamma}) + \rho\omega_i x - \rho æ_i\}$, рассмотрим все случаи в зависимости от значения $æ_i$ и получим, что оценка определителя (5) будет $O(e^{\rho æ})$.

Получим оценку следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l\vec{\varepsilon}_{j-l}\int\limits_{x_0}^{c(\overline{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(c(\overline{\omega}_l-1)-\xi)}f(\xi)\,d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} =$$

$$= O\Big(\{|e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}| + |e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l-1)-c\rho\omega_j x_0}|\}|e^{\rho æ}| \max_{i=\overline{1,n}} |e^{\rho\omega_i x-\rho æ_i}|\Big) =$$

$$= O\Big(\{1 + |e^{(c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l-1)-\rho\omega_j\tilde{\gamma})x_0/\tilde{\gamma})}|\}|e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}||e^{\rho æ}| \max_{i=\overline{1,n}} |e^{\rho\omega_i x-\rho æ_i}|\Big) = O(e^{\rho æ}).$$

Рассмотрим еще один определитель. Сначала вынесем интеграл из первого столбца, затем вычтем первый столбец из $(j+1)$-го столбца, разложим определитель по $(j+1)$-му столбцу и оценим

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n\vec{\varepsilon}_{j+2k}\int\limits_{x_0}^{\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)}f(\xi)\,d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{\tilde{\gamma}} f(\xi)e^{-\rho\omega_j\xi}\,d\xi \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_j x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n\vec{\varepsilon}_{j+2k}e^{\rho\omega_j\tilde{\gamma}} & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) - n\vec{\varepsilon}_{j+2k}e^{\rho\omega_j\tilde{\gamma}} & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} =$$

$$= O\Big(\{|e^{-\rho\omega_j x_0}| + |e^{-\rho\omega_j\tilde{\gamma}}|\}\Big\{|e^{\rho\omega_j x}||e^{\rho æ}| + |e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_j-1)}||e^{\rho æ}| \max_{i=\overline{1,n},\, i\ne j} |e^{\rho\omega_i x-\rho æ_i}|\Big\}\Big) =$$

$$= O\Big(\Big\{|e^{\rho\omega_j(x-x_0)}| + |e^{c\rho\omega_j(\overline{\omega}_j-1)-\rho\omega_j x_0}| \max_{i=\overline{1,n},\, i\ne j} |e^{\rho\omega_i x-\rho æ_i}|\Big\}|e^{\rho æ}|\Big) = O(e^{\rho æ}).$$

Рассмотрим последний определитель. Вычитая первый столбец из $(j+1)$-го столбца и раскладывая по $(j+1)$-му столбцу, получим:

$$\int\limits_0^{x_0} e^{-\rho\omega_j\xi}\begin{vmatrix} e^{\rho\omega_j x}\varepsilon(x,\xi) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_j x}\varepsilon(\xi,x) & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & 0 & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} f(\xi)d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^{x_0} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varepsilon(\xi,x)\Delta(\rho)f(\xi)d\xi = O(e^{\rho æ}).$$

Аналогично рассматриваются все остальные случаи. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ регулярна в T_α при $\alpha \in (\gamma; 1-\gamma]$. Тогда на каждом интервале $J_\beta = (\mathrm{Re}\,\omega_k(1-\beta); \beta)$, $\gamma < \beta < \alpha$, функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. краевой задачи* (1)–(2).

Доказательство. Пусть μ не является собственным значением оператора L_2. Обозначим через $f_1(z)$ функцию, удовлетворяющую условиям: а) $f_1(z) = f(z)$ при $z \in T_\beta$; б) относительно точки $x = \gamma$ она n раз радиально непрерывно дифференцируема в $T_{1-\gamma}$; в) $U_i(f_1) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Будем рассуждать аналогично [4]. Распространим на такие функции резольвенту $\tilde{R}_\lambda f$. Пусть $C_n = \{\lambda : \ |\lambda| = r_n \uparrow \infty\}$. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \tilde{R}_\lambda f_1(z) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{\tilde{R}_\lambda F(z)}{\lambda - \mu} d\lambda, \quad z \in T_\beta, \tag{6}$$

где функция $F(z) = f_1^{(n)}(z) - \mu f_1(z)$ будет регулярна в T_β, непрерывна в $\overline{T}_\beta$ и непрерывно продолжима в $\overline{T}_{1-\gamma}$. Тогда для $F(z)$ будет справедлива лемма 2. Следовательно, с учетом леммы 1, $\tilde{R}_\lambda F = -\frac{1}{n\rho^{n-1}\Delta(\rho)} O(\rho^\sigma e^{\rho æ}) = O(\frac{1}{\rho^{n-1}})$. Отсюда получаем, что правая часть (6) при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно на интервале J_β. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 17–24.
2. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 70–72.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. *Хромов А.П.* Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 6. С. 759–766.

УДК 517.51

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МАТРИЦЕ ЯКОБИ, НОРМИРОВАННОЙ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В.В. Егоров

Волгоградский государственный университет,
кафедра математических методов и информатики в экономике
E-mail: yegoroff_vv@mail.ru

Рассмотрена система дифференциальных уравнений $f'(x) = \Phi(f'(x))M(x)$ с обобщенными частными производными, где $f'(x)$ — матрица Якоби искомого отображения, M — заданная матричнозначная функция размерности $n\times n$ с суммируемыми элементами, Φ — заданная функция от матриц.

Recovering of a Mapping Via Jacobi Matrix, Normalized Homogeneous Function

V.V. Egorov

Consider system of the differential equations $f'(x) = \Phi(f'(x)) \times M(x)$ with generalized partial derivatives, where $f'(x)$ is a matrix Jacobi of sought mapping, M is a given $n \times n$ matrix-value function with integrable elements, Φ is a given function of matrices.

Уточним используемые в работе понятия и определения. Пусть $\mathcal{M}_n$ — пространство матричнозначных функций, размерности $n\times n$, а $\Phi : \mathcal{M}_n \to R^1$ — заданная функция на этом пространстве. Пусть $f=(f^1,\ldots,f^n)$: $D\subset R^n \to R^n$ — отображение класса $W^1_{p,loc}(D)$, $p\geq 1$, а $f'(x)$ — его матрица Якоби. Введем матрицу $M_f(x)=\dfrac{f'(x)}{\Phi(f'(x))}$, которую назовем матрицей Якоби непостоянного отображения f, нормированной функцией Φ. В настоящей работе исследована система дифференциальных уравнений в обобщенных частных производных

$$f'(x) = \Phi(f'(x))M(x), \tag{1}$$

где $x\in D\subset R^n$ (D — односвязная область в R^n), $f\colon D\to R^n$ — искомое отображение, а $M\colon D \to \mathcal{M}_n$ и $\Phi\colon \mathcal{M}_n \to R^1$ — заданные функции.

Система (1) — обобщение систем, изученных в [1]–[6], что позволило на основе идей работ И.В. Журавлева [1], [2] провести исследование схожим образом, с учетом соответствующих особенностей.