References

1. Vinogradov I. M. Representation of an Odd Number as a Sum of Three Primes. *Doklady AN USSR*. 1937, vol. 15, pp. 291–294 (in Russian).
2. Fatkina S. Yu. On the representation of a natural number as a sum of three almost equal terms generated by primes. *Russian Mathematical Surveys* [Uspekhi Mat. Nauk], 2000, vol. 55, no. 1, pp. 171. DOI: 10.1070/RM2000v055n01ABEH000254.
3. Evelyn C. J. A., Linfoot E. H. On a problem in the additive theory of numbers. I : *Math. Z.* 1929, vol. 30, pp. 433–448; II : *J. Reine Angew. Math.*, 1931, vol. 164, pp. 131–140; III : *Math. Z.*, 1932, vol. 34, pp. 637–644; IV : *Ann. of Math.*, 1931, vol. 32, pp. 261–270; V : *Quart. J. Math.*, 1932, vol. 3, pp. 152–160; VI : *Quart. J. Math.*, 1933, vol. 4, pp. 309–314.
4. Brüdern J., Perelli A. Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1999, vol. XXVIII, pp. 591–613.
5. Arkhipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. On the power of a singular set in binary additive problems with prime numbers. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 218, pp. 23–52.
6. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the exceptional set in a Goldbach-type binary problem. *Dokl. Math.* [Dokl. Akad. Nauk], 2002, vol. 66, no. 3, pp. 338—339.
7. Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D. On the exponential sum over k-free numbers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1998, vol. 356, pp. 739–761.
8. Tolev D. I. On the exponential sum with square-free numbers. *Bull. London Math. Soc.*, 2005, vol. 37, pp. 827–834. DOI: 10.1112/S0024609305004753.
9. Schlage-Puchta J. C. The exponential sum over squarefree integers. *Acta Arith.*, 2004, vol. 115, pp. 265–268. DOI: 10.4064/aa115-3-7.
10. Popov O. V. Arithmetic applications for estimates of Weyl sums of polynomials of increasing degree. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 595–640 (in Russian).
11. Goryashin D. V. Squarefree numbers in the sequence $[\alpha n]$. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2013, vol. 14, no. 3 pp. 60–66 (in Russian).
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the measure of «large arcs»' in the Farey partition. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 39–42.
13. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. *Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 87–100.

УДК 511.9

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОГО МЕТОДА В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ

Л. П. Добровольская[1], М. Н. Добровольский[2], Н. М. Добровольский[3], Н. Н. Добровольский[4], И. Ю. Реброва[5]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент, Институт экономики и управления, Тула, lbocharova6565@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН, Москва, dobrovolsky.michael@gmail.com

[3]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, dobrovol@tspu.tula.ru

[4]Аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[5]Кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, i_rebrova@mail.ru

В данной работе дается обзор некоторых актуальных проблем метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Данный обзор был сделан 12 сентября 2013 года в г. Саратове на XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».

Ключевые слова: метод оптимальных коэффициентов, алгебраические решётки, теорема Гельфонда, гиперболическая дзета-функция.

ВВЕДЕНИЕ

Параллелепипедальные сетки Н. М. Коробова (1959 г.)

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ — погрешность квадратурной формулы и

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \qquad \text{(Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов [1]).}$$

Обозначения и необходимые определения

Символ Коробова:

$$\delta_N(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod N, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Пусть целое $N > 1$, $N_1 = [(N-1)/2]$, $N_2 = [N/2]$, $a_\nu = a_\nu(N)$ — целые, взаимно простые с N $(\nu = 1, \ldots, s)$:

$$S_N(z_1, \ldots, z_s) = \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s},$$

где $z_1, \ldots, z_s$ — произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Оптимальные коэффициенты

Если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \le B \frac{\ln^\beta N}{N},$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю N.

Основная мера качества

Величину $S_N(a_1, \ldots, a_s)$ называют основной мерой качества набора оптимальных коэффициентов. Известно (см. [1, с. 81]), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \ge B_0 \frac{\ln^s N}{N},$$

с некоторой константой B_0.

Существование оптимальных коэффициентов

Для $\sigma(N)$ — *среднего арифметического основной меры качества набора коэффициентов по всем параллелепипедальным сеткам*, заданного равенством

$$\sigma(N) = \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_s = 1 \\ (a_v, N) = 1\ (v = 1, \ldots, s)}}^{N-1} S_N(a_1, \ldots, a_s),$$

и для любого составного модуля N справедливо асимптотическое равенство:

$$\sigma(N) = \frac{2^s \ln^s N}{N} + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N}\right).$$

Отсюда следует существование оптимальных коэффициентов для любого составного модуля N.

ТЕОРЕМА А. О. ГЕЛЬФОНДА И ОПТИМАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ

$\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ — решётка решений линейного сравнения

$$m + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N,$$

$\Lambda^{(p)}$ — присоединенная решётка решений системы линейных сравнений

$$\begin{cases} k_1 \equiv a_1 k \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_s \equiv a_s k \end{cases} \pmod N,$$

$q(\Lambda)$ — гиперболический параметр и присоединенный гиперболический параметр $Q(\Lambda)$:

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \overline{m}\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s, \qquad Q(\Lambda) = \min_{\substack{\vec{k} \in \Lambda^{(p)}, \\ k \not\equiv 0 \pmod N}} |k||k_1| \ldots |k_s|.$$

Теорема А. О. Гельфонда (1967 г.)

Согласно теореме А. О. Гельфонда для величин $q(\Lambda)$ и $Q(\Lambda)$ справедливы неравенства

$$Q(\Lambda) \geq C_1(s) q(\Lambda)^s, \qquad q(\Lambda) \geq C_1(s) \frac{Q(\Lambda)^s}{N^{s^2-1}},$$

где $C_1 = \min\left(1/(2s+3)^{s+1}, 1/5^{2s}\right)$.

Присоединенная мера качества

$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ — расстояние до ближайщего целого.

$$S_N^*(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{1}{k \left\| \frac{z_1 k}{N} \right\| \ldots \left\| \frac{z_s k}{N} \right\|},$$

где z_1, …, z_s — произвольные целые взаимно простые с N.

Критерий оптимальности с присоединенной мерой качества

Теорема 1. *Целые $1, z_1, \ldots, z_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю N тогда и только тогда, когда существуют константы $\beta_2 = \beta_2(s)$ и $B_2 = B_2(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N^*(z_1, \ldots, z_s) \leq B_2 \ln^{\beta_2} N.$$

Новое доказательство существования оптимальных коэффициентов

Теорема 2. *Для любого натурального $N > 2$ существует набор оптимальных коэффициентов $1, a_1, \ldots, a_s$ по модулю N с*

$$S^*(a_1, \ldots, a_s) \leq (2 \ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^s (\ln N + C - \ln 2).$$

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ

Проблема правильного порядка

Как известно, на классе алгебраических решёток достигается правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток при росте детерминанта решёток (см. [2]). Более того, для этих решеток справедлива асимптотическая формула (см. [3–5]). Из непрерывности гиперболической дзета-функции на пространстве решёток следует, что правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток достижим на классе рациональных решёток. Действительно, достаточно брать рациональные решетки из очень маленьких окрестностей алгебраических решёток.

Возникает естественный вопрос, а на классе целочисленных решёток правильный порядок убывания достижим или нет?

Если достижим, то надо указать алгоритм построения таких оптимальных параллелепипедальных сеток, для которых будет правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах E_s^α. Другими словами, в этом случае необходимо построить алгоритм вычисления модуля N и оптимальных коэффициентов по модулю N, для которых выполняется оценка

$$\zeta(\Lambda(1, a_1, \ldots, a_{s-1}; N)|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}\right) \qquad (\alpha > 1).$$

Если такой порядок недостижим, то мы получим некоторый аналог теоремы Лиувиля–Туэ–Зигеля–Рота для алгебраических решёток, так как отсутствие правильного порядка будет означать, что алгебраические решетки нельзя хорошо приближать целочисленными.

Проблема существования аналитического продолжения

Как известно, для любой декартовой решётки существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде (см. [3, 4, 6]).

Естественно, возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции в следующих случаях:

Для решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$, где F — произвольное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а q — простое натуральное число и целочисленная решетка $\Lambda(F, q)$ соответствует идеалу $\mathfrak{L} \subset \mathbb{Z}_F$ с нормой $N(\mathfrak{L}) = q$, если фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ соответствует кольцу $\mathbb{Z}_F$ целых алгебраических чисел поля F.

Сам С. М. Воронин вместе со своим учеником Н. Темиргалиевым рассмотрел случай кольца целых гауссовых чисел и случай круговых полей. Это объясняется тем, что и квадратичное поле гауссовых чисел, и круговые поля относятся к числу наиболее изученных алгебраических полей. В частности, там имеются теоремы об описании соответствующих идеалов и о распределении их норм в арифметических прогрессиях, явно заданных алгебраическим полем.

Для решётки совместных приближений $\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, заданной равенством

$$\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \{(q, q\theta_1 - p_1, \ldots, q\theta_s - p_s) \mid q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — произвольные иррациональные числа. Важность таких решеток уже обсуждалась в связи с проблемой Литлвуда.

Легко видеть, что взаимная решетка $\Lambda^*(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ имеет вид

$$\Lambda^*(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \{(q - \theta_1 p_1 - \ldots - \theta_s p_s, p_1, \ldots, p_s) \mid q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Естественно предполагать, что гиперболические дзета-функции этих решеток связаны некоторым функциональным уравнением между значениями в левой и правой полуплоскостях.

Для алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$, где решётка

$$\Lambda(F) = \left\{\vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu\right) \middle| m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Для произвольной решётки Λ. Если для произвольной решётки гиперболическая дзета-функция не продолжается на всю комплексную плоскость (что весьма сомнительно), то требуется описать класс всех решёток, для которых гиперболическая дзета функция аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс s-го порядка.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решеток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки. Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток.

Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая и имеет тольку одну главную компоненту. Например, все алгебраические решётки относятся к этому случаю.

Проблема поведения в критической полосе

На важность этой проблемы указывал в беседах Н. М. Коробов. Он высказывал гипотезу, что аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки в критическую полосу из правой полуплоскости и аналитическое продолжение в критическую полосу гиперболической дзета-функции взаимной решетки или присоединенных решеток из левой полуплоскости позволит получать константы в соответствующих теоремах переноса.

Проблема значений тригонометрических сумм сеток

Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1. Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1. Для неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O(1/\sqrt{N})$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками.

Библиографический список

1. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2004.

2. *Добровольский Н. М.* Гиперболическая дзета-функция решёток. Тула, 1984. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

3. *Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н.* Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 4(44). Тула : Из-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. С. 4–107.

4. *Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н.* Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 283 с.

5. *Добровольский Н. М.* Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. 195 с.

6. *Добровольский М. Н.* Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

Some Questions of Number-theoretical Method in Approximation Analysis

L. P. Dobrovolskaya[1], M. N. Dobrovolsky[2], N. M. Dobrovol'skii[3], N. N. Dobrovol'skii[4], I. Y. Rebrova[5]

[1]Institute of Economics and Management, Russia, 300041, Tula, Veresaeva st., lbocharova6565@mail.ru

[2]Geophysical center RAS, Russia, 119296, Moscow, Molodezhnaya str., 3, dobrovolsky.michael@gmail.com

[3]Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, pr. Lenina, 125, dobrovol@tspu.tula.ru

[4]Tula State University, Russia, 300600, Tula, pr. Lenina, 92, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[5]Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, pr. Lenina, 125, i_rebrova@mail.ru

This article gives an overview of several actual problems of optimal coefficients method. This overview was done on September 12, 2013 on XI internation conference «Algebra and number theory: modern problems and applications» in Saratov city.

Key words: optimal coefficients method, algebraic lattices, Gelfond theorem, hyperbolic zeta-function.

References

1. Korobov N. M. *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximations analysis]. Moscow, 2004 (in Russian).
2. Dobrovolskiy N. M. *Giperbolicheskaia dzeta-funktsiia reshetok* [Hyperbolic zeta-function on lattices]. Tula, 1984. Dep. v VINITI 24.08.84, no. 6090–84 (in Russian).
3. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolskiy M. N., Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N. *Giperbolicheskie dzeta-funktsii setok i reshetok i vychislenie optimal'nykh koeffitsientov* [Hyperbolic zeta-functions on nets and lattices and computation of optimal coefficients]. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2012, vol. 13, iss. 4(44), pp. 4–107 (in Russian).
4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolskiy M. N., Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N. *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshetki i algoritmy poiska optimal'nykh koeffitsientov* [Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications]. Tula, State Pedagogic University Press, 2005, 195 p. (in Russian).
5. Dobrovolskiy N. M. *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshetki i ikh prilozheniia* [Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications]. Tula, State Pedagogic University Press, 2005, 195 p. (in Russian).
6. Dobrovolskiy M. N. Funktsional'noe uravnenie dlia giperbolicheskoi dzeta-funktsii tselochislennykh reshetok [Functional equation of hyperbolic zeta-function on integral lattices]. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 2007, iss. 3, pp. 18–23 (in Russian).

УДК 512.567.5

ОБ УСЛОВИЯХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ И МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТОК КОНГРУЭНЦИЙ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

В. К. Карташов[1], А. В. Карташова[2], В. Н. Пономарёв

[1]Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, kartashovvk@yandex.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, kartashovaan@yandex.ru

Статья посвящена известной проблеме описания унарных алгебр, решетки конгруэнций которых обладают заданным свойством. К настоящему времени эта проблема решена для унарных алгебр с одной операцией. Показано, что для произвольных коммутативных унарных алгебр данная проблема является гораздо более сложной. Здесь приводится несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности таких решеток. Доказано также, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруэнций подходящей связной коммутативной унарной алгебры.

Ключевые слова: коммутативная унарная алгебра, дистрибутивная решетка, модулярная решетка, решетка конгруэнций алгебры.