



- molecular skeleton. *Physics of the Solid State* [Fizika tverdogo tela], 2003, vol. 45, iss. 1, pp. 189–196.
6. Goodwin L. A. New tight-binding parametrization for carbon. *J. Phys. : Condens. Matter.*, 1991, vol. 3, pp. 3869–3878.
7. Harrison U. *Elektronnaiia struktura i svoystva tverdyx tel.* [Electronic structure and properties of solids]. Moscow, Mir, 1983, 381 p. (in Russian).
8. Tersoff J. Modeling solid-state chemistry : Interatomic potentials for multicomponent systems. *Phys. Rev. B.*, 1989, vol. 39, no. 8, pp. 5566–5568.
9. Brenner D. W. Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films. *Phys. Rev. B.*, 1990, vol. 42, no. 15, pp. 9458–9471.
10. Stuart S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions. *J. Chem. Phys.*, 2000, vol. 112, no. 14, pp. 6472–6486.
11. Glukhova O. E. The study of mechanical properties of carbon nanotubes cayenne-type molecular-mechanical model. *Physics of wave processes and PC.*, 2009, vol. 12, iss. 1, pp. 69–75. (in Russian).
12. Kerdcharoen T., Liedl K. R., Rode B. M. A QM/MM simulation method applied to the solution of Li\* in liquid ammonia. *Chem. Phys.*, 1996, vol. 211, pp. 313–323.
13. Hofer T. S., Pribil A. B., Randolf B. R., Rode B. M. Structure and Dynamics of Solvated Sn(II) in Aqueous Solution : An ab Initio QM/MM MD Approach. *J. Am. Chem. Soc.*, 2005, vol. 127, pp. 14231–14238.
14. Kerdcharoen T., Morokuma K. J. Combined QM/MM Simulation of  $Ca^{2+}$ /Ammonia Solution based on ONIOM-XS Method : Octahedral Coordination and Implication to Biology. *Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, pp. 8856–8863.
15. Kerdcharoen T., Morokuma K. ONIOM-XS : an extension of the ONIOM method for molecular simulation in condensed phase. *Chem. Phys. Lett.*, 2002, vol. 355, pp. 257–262.
16. Heyden A., Lin H., Truhlar D. G. Adaptive partitioning in combined quantum mechanical and multiscale simulations. *J. Phys. Chem. B.*, 2007, vol. 111, pp. 2231–2241.
17. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Kossovich E. L., Zhnichkov R. Y. Super strong nanoindentors for biomedical applications based on bamboo-like nanotubes. *Proc. of SPIE.*, 2012, vol. 8233, pp. 823311(8).
18. Stuart S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions. *Journal of chemical physics*, 2000, vol. 112, no. 14, pp. 6472–6486
19. Glukhova O. E., Slepchenkov M. M. Influence of the curvature of deformed graphene nanoribbons on their electronic and adsorptive properties : theoretical investigation based on the analysis of the local stress field for an atomic grid. *Nanoscale*, 2012, vol. 11, pp. 3335–3344.
20. Wilkinson J. X. *Algebraicheskaia problema sobstvennyx znachenij* [The algebraic eigenvalue problem]. Moscow, Nauka, FIZMATLIT, 1970, 564 p. (in Russian).

УДК 622.4:536.21

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ ПОЛОСТИ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛОСТИ ГАЗА

О. И. Дударь<sup>1</sup>, Е. С. Дударь<sup>2</sup>, М. А. Осипенко<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, olegdudar@yandex.ru

<sup>2</sup>Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, elendudar@yandex.ru

<sup>3</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, oma@theormech.pstu.ac.ru

Найдено изменение температуры стенки цилиндрической полости в твердом теле как отклик на изменение температуры протекающего в полости газа. Рассмотрены 3 важных частных случая изменения температуры газа со временем: температура постоянна; температура изменяется по линейному закону; температура изменяется по гармоническому закону. Представлены графики пяти « $\theta$ -функций», через которые записываются решения. Графики получены с помощью квадратурной формулы Гаусса численным интегрированием несобственных интегралов, содержащих цилиндрические функции.

**Ключевые слова:** цилиндрическая полость, нестационарная теплопроводность, конвективный теплообмен, функции Бесселя и Неймана, несобственные интегралы.



## ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач горной теплофизики и теплофизики подземных сооружений является задача распространения тепла в бесконечном твердом теле от цилиндрической полости, по которой движется газ (воздух). Решение этой задачи позволяет улучшить методику расчета теплового режима горных выработок и протяженных подземных сооружений (тоннелей, метрополитенов и др.). Простейшие методики по расчету теплового режима подземных сооружений основываются на решении уравнений теплового баланса и использовании коэффициента нестационарного теплообмена, с помощью которого тепло, выделяющееся из горного массива в воздух, выражается через разность средней температуры воздуха и естественной (то есть при отсутствующей полости) температуры горных пород [1–4]. Такие методики позволяют решать достаточно широкий класс инженерных задач, однако они обладают ограниченной точностью и не могут быть использованы при описании «тонких» эффектов, таких, например, как конденсация влаги на стенках горных выработок.

Поэтому получил распространение и другой подход, основанный на решении нестационарного дифференциального (в частных производных) уравнения теплопроводности, записываемого для твердого тела. Причем теплообмен с воздухом учитывается с помощью граничных условий третьего рода (закона Ньютона–Рихмана), выражающего тепловой поток на границе фаз, через разность средней температуры воздуха и температуры стенки полости. Впервые решение задачи в такой постановке получили Г. Карслоу [5], А. Н. Щербань и О. А. Кремнев [6] с помощью преобразования Лапласа для случая неизменной во времени температуры движущегося в полости газа. В работе А. С. Галицына, А. Н. Жуковского [7] и работе А. С. Галицына [8] решение было получено с использованием модифицированного преобразования Вебера при произвольном законе изменения температуры движущегося в полости газа и произвольном начальном условии. В работе [9] задача была решена в той же постановке, что и в работах [7, 8], но для решения применялся метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа. Это позволило обнаружить содержащуюся в работе [8] ошибку в знаке. Задача распространения тепла в пространстве от цилиндрической полости с граничными условиями второго рода, записываемого для движущегося источника тепла, рассмотрена в [10].

А. Ф. Галкин и Ю. А. Хохолов [11] решали задачу численно, в сопряженной постановке, то есть одновременно для твердой и газовой фазы. В настоящее время такого рода решение несложно получить и с помощью такого программного комплекса, как SolidWorks Flow Simulation (COSMOSFloWorks), являющегося модулем газодинамического анализа в среде SolidWorks [12]. Однако такой способ анализа становится весьма трудоемким при расчете сети выработок или подземных сооружений.

Очевидно, что анализ теплового режима сети значительно упростится, если для расчета использовать аналитические выражения, приведенные в работах [5–10]. Однако проблема состоит в том, что в этих работах решение получено в виде несобственного интеграла от выражения, содержащего функции Бесселя и Неймана.

Данная статья является продолжением работы [9]. Но если в [9] выражение функции, описывающей изменение температуры воздуха в полости, не конкретизировано, то в настоящей статье рассмотрены следующие важные с точки зрения практического применения частные случаи изменения со временем температуры воздуха в горной выработке:

- температура воздуха постоянна;
- температура воздуха изменяется по линейному закону;
- температура воздуха изменяется по гармоническому закону.

Первое решение удобно применять для анализа усредненных по времени процессов (например, для анализа влияния среднегодовой температуры воздуха). Кроме того, оно входит как составная часть в два других решения. Второе решение может быть использовано для кусочно-линейной интерполяции зависимости, задающей закон изменения температуры воздуха в выработке со временем. Третье решение пригодно для приближенного анализа влияния годового колебания температуры воздуха в выработке.

Отметим, что случай постоянной температуры воздуха рассматривался в работах [5–8], и приведенное в этих работах решение совпадает с полученным в данной работе. Третий случай — гармонических колебаний температуры воздуха — исследовался в работе [6], однако записанное в этой



работе решение содержит много опечаток и неточностей, так что воспользоваться им не представляется возможным.

В данной работе для трех упомянутых выше случаев изменения температуры воздуха со временем записаны аналитические выражения изменения со временем температуры стенки цилиндрической полости. Для записи всех решений используются 3 универсальные функции  $\Theta_1(Fo)$ ,  $\Theta_2(Fo)$ ,  $\Theta_3(Fo)$ , где  $Fo$  — число Фурье, по своему смыслу представляющее безразмерное время, и две универсальные «константы»  $\Theta_4$  и  $\Theta_5$ . Все функции и «константы» параметрически зависят от  $Bi$  — числа Био, по своему смыслу представляющего безразмерный коэффициент теплоотдачи. Приведены выражения универсальных функций и констант через несобственные интегралы от выражений, содержащих функции Бесселя и Неймана, а также графики их зависимостей от числа Фурье и (или) числа Био, полученные численным интегрированием с использованием квадратурных формул Гаусса.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Математическая постановка данной задачи приведена в работах [5–9] с той или иной степенью общности. Здесь воспроизводится постановка из работы [9].

Будем полагать, что подземная горная выработка представляет собой цилиндрическую полость радиуса  $r_0$ . Задача распространения тепла в горном массиве от этой полости при движении по ней воздуха описывается следующим нестационарным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

при начальном условии

$$T|_{t=0} = T_0(r), \quad r > r_0, \quad (2)$$

причем

$$T_0|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad (3)$$

и при граничных условиях:

$$T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad (4)$$

$$\left( -\frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_a(t)) \right) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)–(4):  $T$  — температура;  $a$  — коэффициент температуропроводности твердого тела;  $T_\infty$  — естественная температура горного массива (то есть температура горного массива при отсутствующей выработке).

Уравнение (5) представляет собой закон Ньютона–Рихмана, записанный с учетом закона теплопроводности Фурье. В уравнении (5):  $T|_{r=r_0} = T_w$  — температура на границе раздела фаз (температура стенки);  $T_a$  — усредненная в некотором смысле по сечению полости температура воздуха;  $h = \alpha/\lambda$ , где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности твердого тела;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи. Очевидно, что значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  зависит от того, что понимается под средней температурой воздуха  $T_a$ . В соответствии с работами [13, 14] под  $T_a$  будем понимать среднемассовую по поперечному сечению полости температуру воздуха.

Для определения коэффициента теплоотдачи чаще всего применяют экспериментальный метод. Но для условий горных выработок его использование связано с большими затруднениями. В то же время в некоторых случаях для коэффициента  $\alpha$  можно получить аналитическое выражение. Например, в работах [13, 15] приведено следующее выражение для коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , полученное с помощью решения Лайона для цилиндрической полости (трубы):

$$\alpha = \frac{\lambda_a}{4r_0 \int_0^1 I_T(R) \frac{w(R)}{w} R dR}, \quad (6)$$



где выражение

$$I_T(R) = \int_R^1 \frac{\int_0^R \frac{w(R)}{\bar{w}} R dR}{\left(1 + \frac{\varepsilon_q(R)}{a_a}\right) R} dR \quad (7)$$

называется интегралом Лайона. В формулах (6), (7):  $R = r/r_0$  — безразмерная радиальная координата;  $\lambda_a$  и  $a_a$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности воздуха соответственно,  $a_q$  — коэффициент турбулентной температуропроводности воздуха;  $w(R)$  — функция, задающая профиль скорости течения воздуха в поперечном сечении полости, а  $\bar{w}$  — среднее по сечению полости значение этой скорости. Формулы (6), (7) позволяют оценить, как те или иные параметры потока влияют на величину коэффициента теплоотдачи.

В работе [9] методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение задачи (1)–(5) в виде

$$T(r, t) = T_\infty + \frac{2ah}{\pi} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \left\{ \int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau \right\} \xi d\xi + \\ + \int_{r_0}^\infty \int_0^\infty \frac{[N_0(\xi r')J(\xi r_0) - J_0(\xi r')N(\xi r_0)][N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \times \\ \times e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi [T_0(r') - T_\infty] r' dr', \quad (8)$$

где  $J(\xi r_0) = \xi J_1(\xi r_0) + hJ_0(\xi r_0)$ ,  $N(\xi r_0) = \xi N_1(\xi r_0) + hN_0(\xi r_0)$ , а  $J_0, J_1, N_0, N_1$  — функции Бесселя и Неймана с индексом нуль и один соответственно [16, 17].

Если в качестве начального момента времени выбран момент прохождения шахтной выработки, то можно принять начальную температуру горного массива величиной постоянной по  $r$  и равной естественной температуре пород  $T_\infty$ :  $T_0(r) = T_\infty$ . В этом случае решение (8) принимает вид

$$T(r, t) = T_\infty + \frac{2ah}{\pi} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \left\{ \int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau \right\} \xi d\xi. \quad (9)$$

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА В ПОЛОСТИ

В данной работе нас интересует значение температуры стенки цилиндрической полости  $T_w(t) = T(r_0, t)$ . Поэтому, принимая  $r = r_0$  и учитывая значение определителя Вронского [16]

$$N_0(x)J_1(x) - J_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x},$$

получим из (9)

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4ah}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \xi d\xi. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет определить температуру стенки полости при произвольном законе изменения температуры воздуха, протекающего по полости.

Далее рассмотрим три упомянутых выше случая изменения температуры воздуха в полости.

а. *Температура воздуха постоянна*:  $T_a(t) = T_{a0} = \text{const}$ . В этом случае

$$T_w(t) = T_\infty + (T_{a0} - T_\infty) \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-a\xi^2 t})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Введем безразмерные числа Фурье и Био:

$$Fo = \frac{at}{r_0^2}, \quad Bi = hr_0, \quad (11)$$



и обозначим

$$\mu = \xi r_0 \quad f(Bi, \mu) = \left\{ \left[ \frac{\mu}{Bi} J_1(\mu) + J_0(\mu) \right]^2 + \left[ \frac{\mu}{Bi} N_1(\mu) + N_0(\mu) \right]^2 \right\} \mu. \quad (12)$$

Тогда температура стенки полости вычисляется по формуле

$$T_w(Fo) = T_\infty + (T_{a0} - T_\infty) \frac{4h}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu.$$

Если в соответствии с работой [6] ввести безразмерную температуру стенки  $\Theta_1 = \frac{T_w - T_{a0}}{T_\infty - T_{a0}}$ , то получим выражение для  $\Theta_1$ , совпадающее с приведенным в [6]:

$$\Theta_1(Fo) = 1 - \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2 Fo}}{f(Bi, \mu)} d\mu. \quad (13)$$

В свою очередь температура стенки для случая постоянной температуры воздуха в цилиндрической полости может быть определена через  $\Theta_1$  по формуле

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo). \quad (14)$$

б. Температура воздуха изменяется по линейному закону:

$$T_a(t) = T_{a0} + kt, \quad k = \frac{\Delta T_a}{\Delta t}.$$

В этом случае из формулы (10) имеем:

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{kt + (1 - e^{-a\xi^2 t})(T_{a0} - T_\infty - \frac{k}{a\xi^2})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Учитывая (11), (12), а также, определяя число Фурье, соответствующее интервалу времени  $\Delta t$ , формулой

$$Fo_1 = \frac{a\Delta t}{r_0^2},$$

приходим к выражению

$$T_w(Fo) = T_\infty + \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{\Delta T_a \frac{Fo}{Fo_1} + (1 - e^{-a\xi^2 t})(T_{a0} - T_\infty - \frac{\Delta T_a}{Fo_1 \mu^2})}{f(Bi, \mu)} d\mu.$$

Обозначая

$$\Theta_2(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)\mu^2} d\mu, \quad (15)$$

получаем формулу, позволяющую определить температуру стенки полости при линейном законе изменения температуры воздуха в этой полости

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo) + \frac{\Delta T_a}{Fo_1} [Fo - \Theta_2(Fo)]. \quad (16)$$

в. Температура воздуха изменяется по гармоническому закону:

$$T_a(t) = T_{a0} + \Delta T_a \cos(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{t_Y}.$$



В этом случае в соответствии с формулой (10) имеем:

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{(T_{a0} - T_\infty)(1 - e^{-a\xi^2 t}) + \frac{\Delta T_a}{1 + \omega_1^2} (\cos \omega t + \omega_1 \sin \omega t - e^{-a\xi^2 t})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi},$$

где  $\omega_1 = \frac{\omega}{a\xi^2}$ .

Учитывая (11), (12), а также, определяя число Фурье, соответствующее периоду колебания  $t_Y$ , формулой

$$Fo_2 = \frac{at_Y}{r_0^2},$$

приходим к выражению

$$T_w(Fo) = T_\infty + \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(T_{a0} - T_\infty)(1 - e^{-\mu^2 Fo}) + \frac{\Delta T_a}{1 + \omega_1^2} (\cos \varphi + \omega_1 \sin \varphi - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu,$$

где

$$\varphi = 2\pi \frac{Fo}{Fo_2}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{Fo_2 \mu^2}.$$

Вводя обозначения

$$\Theta_3(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2 Fo}}{(1 + \omega_1^2) f(Bi, \mu)} d\mu, \quad (17)$$

$$\Theta_4(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1 + \omega_1^2) f(Bi, \mu)}, \quad (18)$$

$$\Theta_5(Fo) = \frac{8}{\pi Bi Fo_2} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1 + \omega_1^2) \mu^2 f(Bi, \mu)}, \quad (19)$$

приходим к формуле, позволяющей определить температуру стенки полости при гармоническом законе изменения температуры воздуха в этой полости

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo) - \Delta T_a \Theta_3(Fo) + \Delta T_a (\Theta_4 \cos \varphi + \Theta_5 \sin \varphi). \quad (20)$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Согласно формулам (14), (16), (20) температура стенки полости для трех рассмотренных выше случаев определена, если известен вид функций  $\Theta_1(Fo)$ ,  $\Theta_2(Fo)$ ,  $\Theta_3(Fo)$  и значения «констант»  $\Theta_4$  и  $\Theta_5$ . Как следует из формул (13), (15), (17)–(19), определение этих функций и «констант» сводится к вычислению несобственных интегралов. Значения интегралов определялись численно с использованием квадратурной формулы Гаусса [18].

Вид функций  $\Theta_1(Fo)$ ,  $\Theta_2(Fo)$  для ряда значений параметра  $Bi$ , функции  $\Theta_3(Fo)$  для ряда значений параметров  $Bi$  и  $Fo_2$ , зависимостей  $\Theta_4(Bi)$  и  $\Theta_5(Bi)$  для ряда значений параметра  $Fo_2$  приведен на рис. 1 и рис. 2.

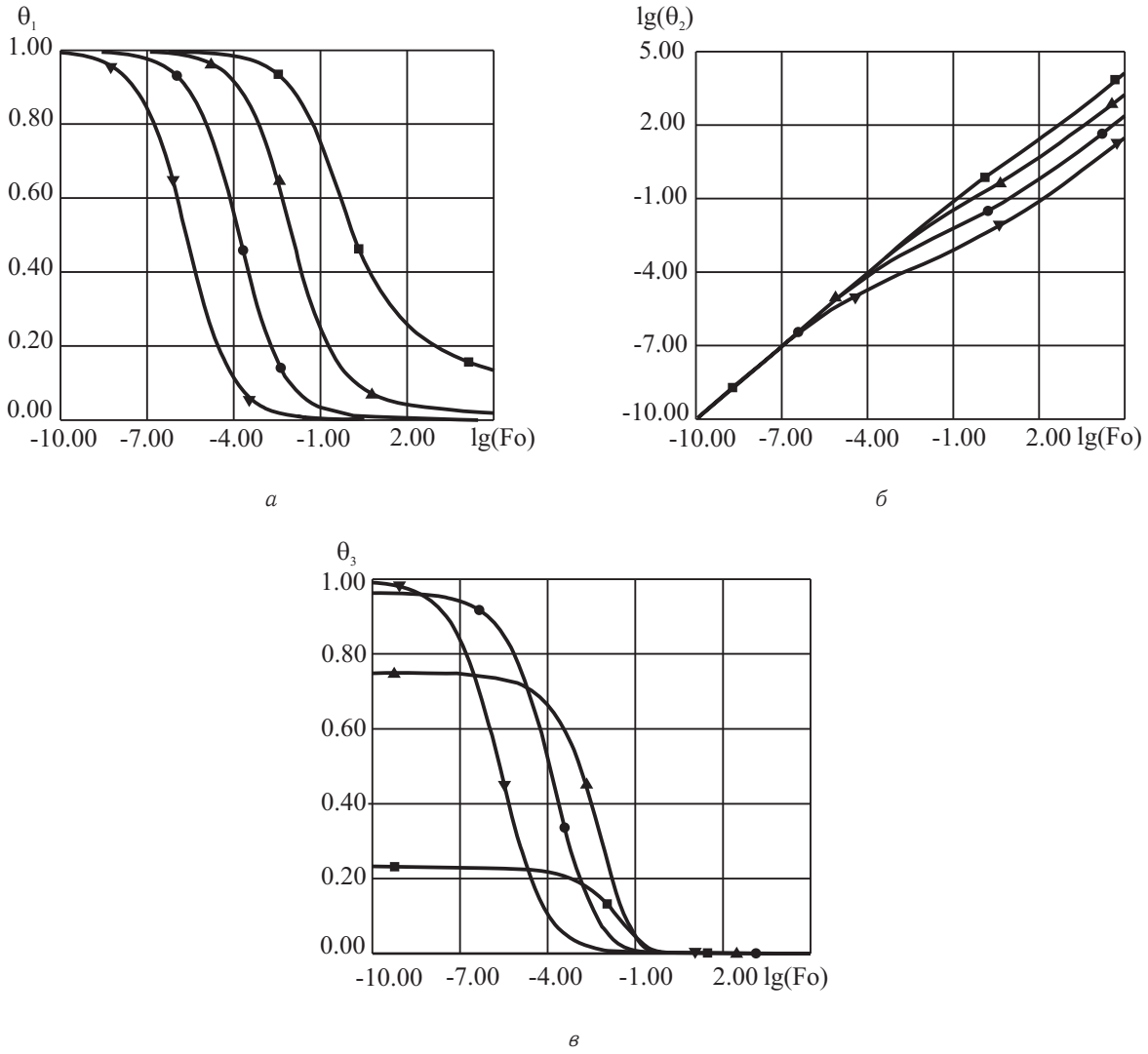


Рис. 1. Зависимость  $\Theta_1$  (а),  $\lg \Theta_2$  (б),  $\Theta_3$  (в) от  $\lg(Fo)$ : ■ —  $Bi = 1.004$ ; ▲ —  $Bi = 7.94$ ; ● —  $Bi = 63.00$ ; ▼ —  $Bi = 500.00$

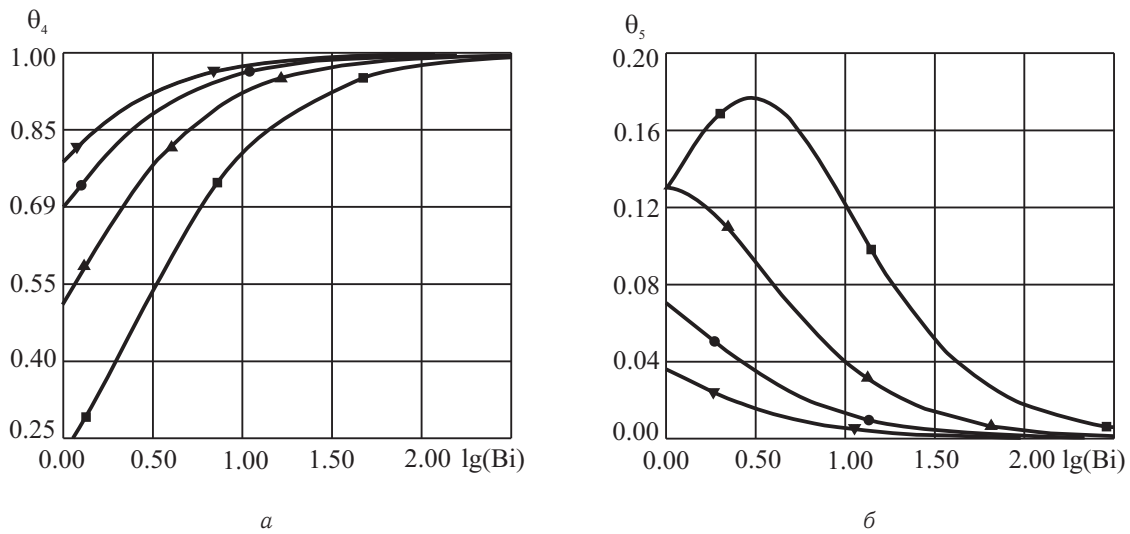


Рис. 2. Зависимость  $\Theta_i$  ( $i = 4, 5$ ) от  $\lg(Bi)$ : ■ —  $Fo_2 = 0.90$ ; ▲ —  $Fo_2 = 16.94$ ; ● —  $Fo_2 = 318.80$ ; ▼ —  $Fo_2 = 6000.00$





Из представленных результатов видно:

- во всех трех случаях изменения температуры воздуха затухающая функция  $\Theta_1(Fo)$  описывает процесс перехода температуры стенки от начального значения  $T_\infty$  к постоянной составляющей температуры воздуха  $T_{a0}$ ;
- функция  $\Theta_2(Fo)$  задает отклонение закона изменения температуры стенки от линейного;
- функция  $\Theta_3(Fo)$  затухает очень быстро, и влиянием слагаемого, содержащего эту функцию, в большинстве случаев можно пренебречь;
- «константы»  $\Theta_4$  и  $\Theta_5$  определяют изменение амплитуды и фазы колебания температуры стенки по отношению к закону колебания температуры воздуха.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее полученное авторами методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа решение задачи о распространении тепла в бесконечном горном массиве от протекающего в цилиндрической полости потока воздуха [9] использовано для определения температуры стенки цилиндрической полости. Рассмотрены 3 важных с точки зрения горной теплофизики и теплофизики подземных сооружений частных случая изменения температуры протекающего воздуха:

- температура воздуха постоянна;
- температура воздуха изменяется по линейному закону;
- температура воздуха изменяется по гармоническому закону.

Численным интегрированием с использованием квадратурной формулы Гаусса определен вид пяти « $\theta$ -функций» числа Фурье и (или) числа Био, через которые записываются эти частные решения.

## Библиографический список

1. Щербань А. Н., Кремнев О. А., Журавленко В. Я. Руководство по регулированию теплового режима шахт. М. : Недра, 1977. 359 с.
2. Воропаев А. Ф. Тепловое кондиционирование рудничного воздуха в глубоких шахтах. М. : Недра, 1979. 192 с.
3. Дядькин Ю. Д. Основы горной теплофизики для шахт и рудников Севера. М. : Недра, 1968. 256 с.
4. Гендлер С. Г. Тепловой режим подземных сооружений. Л. : Изд-во ЛГИ, 1987. 102 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 488 с.
6. Щербань А. Н., Кремнев О. А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт : в 2 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. 425 с.
7. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев : Наук. думка, 1976. 286 с.
8. Галицын А. С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с.
9. Осипенко М. А., Дударь О. И., Дударь Е. С. Распространение тепла в бесконечном твердом теле от цилиндрической полости при конвективном теплообмене // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1, С. 89–93.
10. Пинскер В. А. Аналитическое решение нестационарного уравнения теплопроводности в пространстве, содержащем бесконечную круговую цилиндрическую полость с движущимся в ней источником тепла // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 5. С. 604–607.
11. Галкин А. Ф., Хохолов Ю. А. Теплоаккумулирующие выработки. Новосибирск : ВО «Наука», 1992. 133 с.
12. Алямовский А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation. М. : Изд-во «ДМК-Пресс», 2010. 235 с.
13. Теория тепломассообмена / под ред. А. И. Леонтьева. М. : Высш. шк., 1979. 495 с.
14. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент : справочник / под ред. В. А. Григорьева, В. М. Зорина. М. : Энергоиздат, 1982. 512 с.
15. Дударь Е. С., Дударь О. И. Использование интеграла Лайона для решения задачи конденсации влаги из турбулентного потока бинарной смеси // Строительство и образование : сб. науч. тр. Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2005. Вып. 14 (66). С. 319–322.
16. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.
17. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М. : Наука, 1984. 344 с.
18. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : ФИЗМАТГИЗ, 1963. 660 с.





## Determination of the Wall Temperature Change for a Cavity in a Solid as a Result of the Temperature Change of the Gas Flow in a Cavity

O. I. Dudar, E. S. Dudar, M. A. Osipenko

Perm National Research Politechnic University, Russia, 614990, Perm, Komsomolsky Ave., 29, olegdudar@yandex.ru, elendudar@yandex.ru, oma@theormech.pstu.ac.ru

The wall temperature change for a cylindrical cavity in a solid was found as a response to the temperature change of the gas flowing in a cavity. Three important special cases of the gas temperature dependence on time are considered: temperature is constant; temperature changes according to the linear law; temperature changes according to the harmonic law. The plots of five « $\theta$ -functions» used to denote solutions are submitted. The plots are obtained by the means of the numerical integration of the Gauss quadrature formula applied to improper integrals containing cylindrical functions.

**Key words:** cylindrical cavity, nonstationary heat conductivity, convective heat transfer, Bessel's and Neumann's functions, improper integral.

### References

1. Scherban' A. N., Kremnev O. A., Zhuravlenko V. Ia. *Rukovodstvo po regulirovaniu teplovogo rezhima shakht* [Manual for Heat Condition Regulation in Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1977, 359 p. (in Russian).
2. Voropaev A. F. *Teplovoe konditsionirovanie rudnichnogo vozdukh v glubokikh shakhtakh* [Mine Air Thermal Conditioning in Deep Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1979, 192 p. (in Russian).
3. Diad'kin Iu. D. *Osnovy gornoj teplofiziki dlia shakht i rudnikov Severa* [Bases of Mining Thermophysics for Northern Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1968, 256 p. (in Russian).
4. Gendler S. G. *Teplovoi rezhim podzemnykh sooruzhenii* [Thermal Regimes of Underground Constructions]. Leningrad, LGI Press, 1987, 102 p. (in Russian).
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1959, 450 p. (Rus. ed. : Carslaw H., Jaeger J. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964, 488 p.)
6. Scherban' A. N., Kremnev O. A. *Nauchnye osnovy rascheta i regulirovaniia teplovogo rezhima glubokikh shakht : v 2 t.* [Scientific Bases of Calculation and Regulation of Thermal Regimes in Deep Mines: 2 vol.] Kiev, Acad. of Sci. Publ. House, 1959. Vol. 1. 425 p. (in Russian).
7. Galitsyn A. S., Zhukovskii A. N. *Integral'nye preobrazovaniia i spetsial'nye funktsii v zadachakh teploprovodnosti*. [Integral Transformations and Special Functions in Heat Conduction Problems.] Kiev, Nauk. dumka Publ., 1976, 286 p. (in Russian).
8. Galitsyn A. S. *Kraevye zadachi teplofiziki podzemnykh sooruzhenii* [Boundary value problems in thermal physics of underground constructions]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1983, 236 p. (in Russian).
9. Osipenko M. A., Dudar O. I., Dudar E. S. The Heat Conductivity in the Infinite Solid of the Convection in a Cylindrical Cavity. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012. vol. 12., iss. 1. pp. 89–93 (in Russian).
10. Pinsker V. A. Analytical Solution of the Non-stationary Heat Conductivity Equation in a Space Containing Infinite Cylindrical Cavity with a Moving Heat Source. *Doklady RAN* [Proc. Rus. Acad. Sci.], 2000. vol. 372, no. 5. pp. 604–607. (in Russian).
11. Galkin A. F., Khokholov Iu. A. *Teploakkumuliruiushchie vyrabotki* [Heat-retaining Workings]. Novosibirsk, VO «Nauka», 1992, 133 p. (in Russian).
12. Aliamovskii A. A. *Inzhenernye raschety v SolidWorks Simulation* [Engineering Calculations in SolidWorks Simulation]. Moscow, «DMK-Press» Publ., 2010, 235 p. (in Russian).
13. *Teoriia teplomassoobmena* [Heat and Mass Transfer Theory] / ed. A. I. Leont'ev. Moscow, Vysshiaia shkola Publ., 1979, 495 p. (in Russian).
14. *Teplo- i massobmen. Teplotekhnicheskii eksperiment : spravochnik* [Heat and Mass Transfer. Calorifics Experiment : Handbook] / Edit. V. A. Grigor'ev, V. M. Zorin. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 512 p. (in Russian).
15. Dudar E. S., Dudar O. I. *Ispol'zovanie integrala Laiona dlia resheniia zadachi kondensatsii vlagi iz turbulentnogo potoka binarnoi smesi* [Use of Lyon's Integral for the Solution of a Problem of Wet Condensation from a Turbulent Stream of a Binary Mix] *Stroitel'stvo i obrazovanie* [Building and Education]. Ekaterinburg, UGTU-UPI Press, 2005, iss. 14 (66), pp. 319–322 (in Russian).
16. Korenev B. G. *Vvedenie v teoriu besselevykh funktsii* [Introduction to the Theory of Bessel functions]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 288 p. (in Russian).
17. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki*. [Special Functions of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 344 p. (in Russian).
18. Demidovich B. P., Maron I. A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Foundations of Numerical Mathematics]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1963, 660 p. (in Russian).